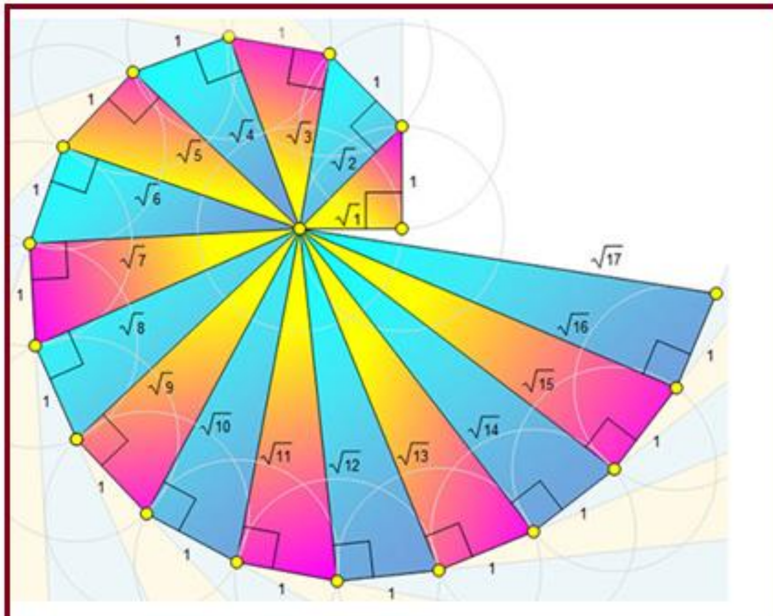
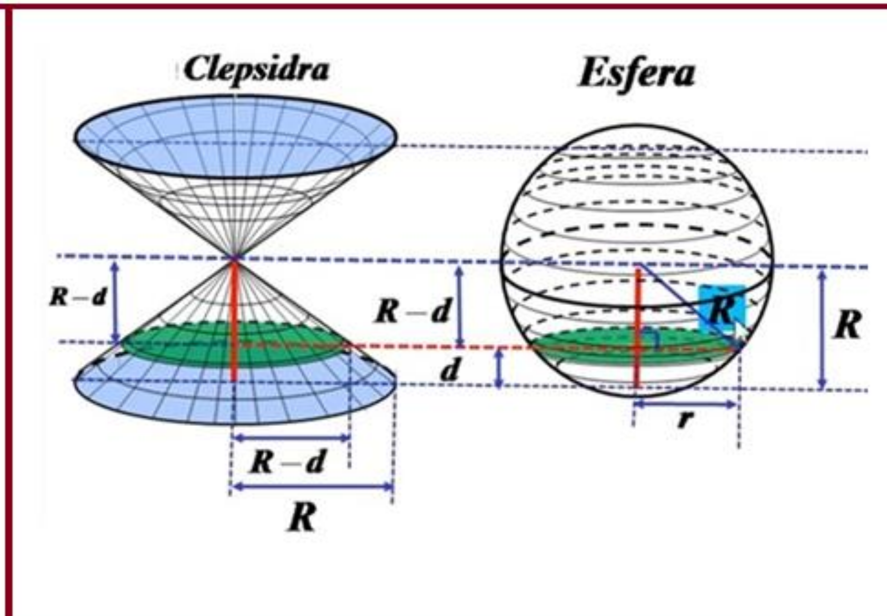
UERJ 2018

ENEM 2018

PISM 2018

Geometria Plana e Espacial - 8/9/2018



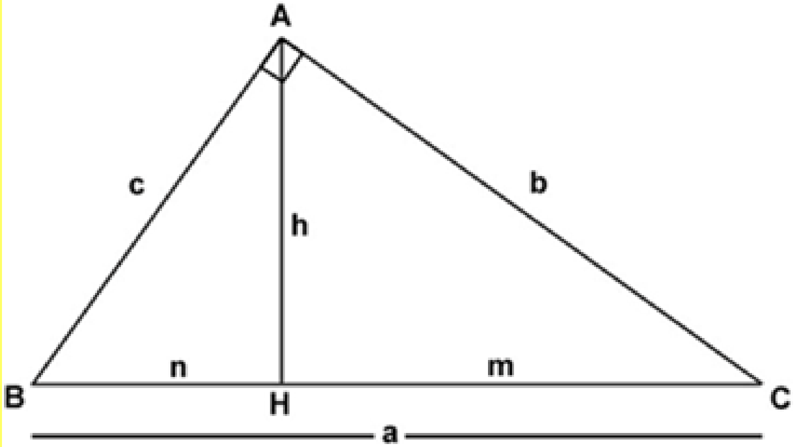


Prof. Walter Tadeu

www.professorwaltertadeu.mat.br

Resumos da Geometria Plana

Áreas planas		
Quadrado	$S = \ell^2$	
Retângulo	$S = b.h$	
Paralelogramo	$S = b.h$	
Trapézio Retângulo	$S = \frac{(B+b).h}{2}$	
Trapézio Isósceles	$S = \frac{(B+b).h}{2}$	
Losango	$S = \frac{D.d}{2}$	
Triângulo qualquer (com base e altura)	$S = \frac{b.h}{2}$	
Triângulo qualquer (com os lados) p=semi-perímetro	$S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$	
Círculo	$S = \pi.r^2$	
Circunferência	$C = 2\pi r$	
Coroa circular	$S = \pi(R^2 - r^2)$	
Setor circular	$S = \frac{\alpha \pi r^2}{360°}$	



Relações Métricas no Triângulo Retângulo

1ª Relação → $b^2 = a\,m$

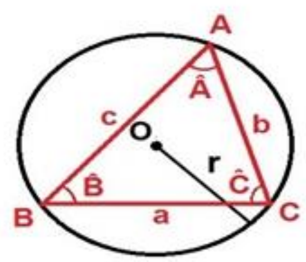
2ª Relação → $c^2 = a\,n$

3ª Relação → $a^2 = b^2 + c^2$

4ª Relação → $a\,h = b\,c$

5ª Relação → $h^2 = m\,n$

Lei dos senos e cossenos



Lei dos senos:

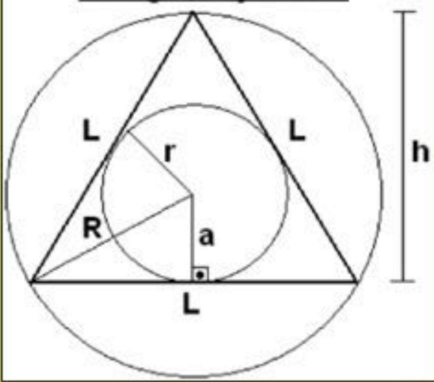
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2 \cdot R$$

Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

Principais polígonos regulares

Triângulo Eqüilátero:



Área: $A = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$ ou $A = \dfrac{3 \cdot L}{2} \cdot a$

Perímetro: $P = 3L$

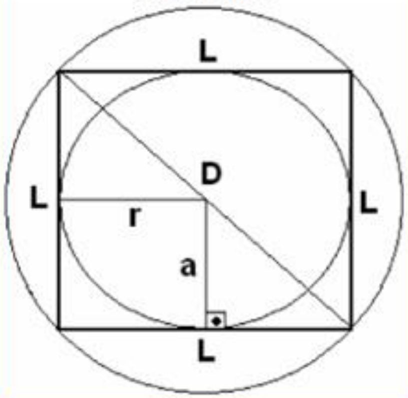
Altura: $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Apótema: $a = \dfrac{L\sqrt{3}}{6} = \dfrac{R}{2}$

Raio da circunferência inscrita: $r = \dfrac{L\sqrt{3}}{6}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$

Quadrado:



Área: $A = L^2$ ou $A = 2 \cdot L \cdot a$

Perímetro: $P = 4L$

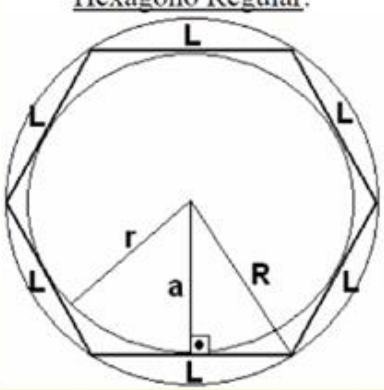
Diagonal: $D = L\sqrt{2}$

Apótema: $a = \dfrac{L}{2}$

Raio da circunferência inscrita: $r = \dfrac{L}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = \dfrac{D}{2} = \dfrac{L\sqrt{2}}{2}$

Hexágono Regular:



Área: $A = \dfrac{6L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3L^2\sqrt{3}}{2}$ ou $A = 3 \cdot L \cdot a$

Perímetro: $P = 6L$

Apótema: $a = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Raio da circunferência inscrita: $r = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = L$

PRISMAS

1-CONCEITO: Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

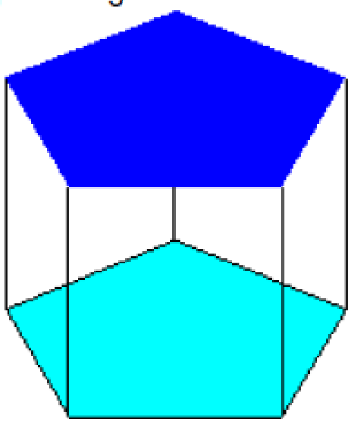
2-ASPECTOS GEOMÉTRICOS

2.1- Os polígonos que formam a base e a tampa são congruentes.

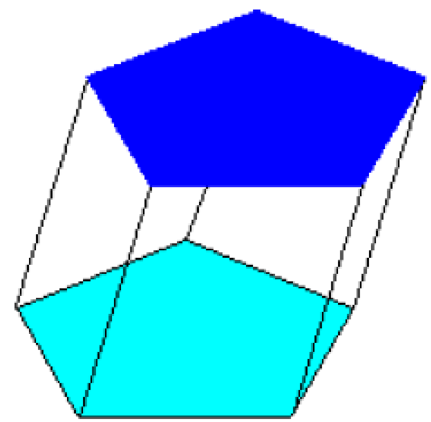
2.2- As arestas laterais são paralelas e todas têm a mesma medida.

2.3-Se as arestas laterais forem perpendiculares a base temos um “prisma reto”, caso contrário temos um prisma oblíquo.

2.3- Se o prisma for reto as faces laterais são retangulares se for oblíquo as faces laterais formam um paralelogramo

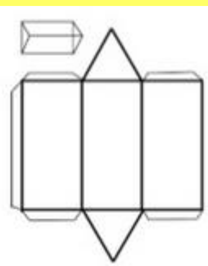


PRISMA PENTAGONAL RETO

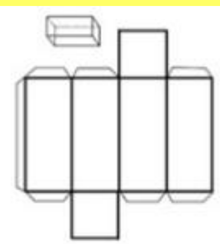


PRISMA PENTAGONAL OBLÍQUO

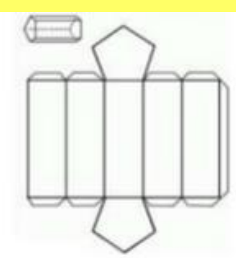
Exemplo de planificações:



Prisma Reto de Base Triangular



Prisma Reto de Base Quadrangular



Prisma Reto de Base Pentagonal

3-SECÇÃO TRANSVERSAL É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.

4-PRISMA REGULAR É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.
Em outras palavras a base é um polígono regular.

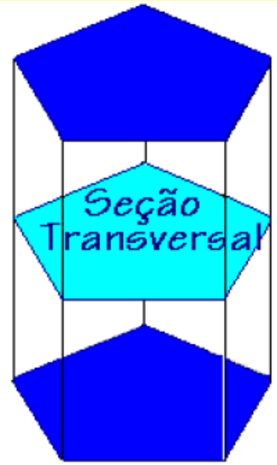
5- CÁLCULO DA ÁREA DA BASE: Para calcular a área da base de um prisma depende do formato da base. As faces com maior freqüência nos vestibulares, são triangulares, quadrangulares e hexagonais.

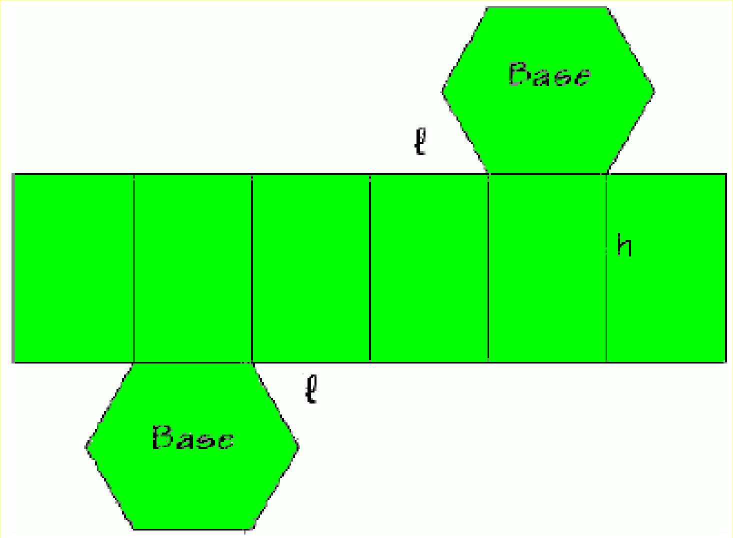
6- ÁREA LATERAL: É a soma de todas as áreas das faces laterais do prisma.

Se o prima for regular todas as faces laterais têm a mesma área, então basta calcular uma delas e multiplicar pelo número de faces.

7- ÁREA TOTAL: É a soma da áreas da base com a área da "tampa" e com a área lateral. A " tampa " também é considerada como base.

8-VOLUME: É o produto da área da base pela altura do prisma.
Se o prisma for reto a altura é congruente a aresta lateral.



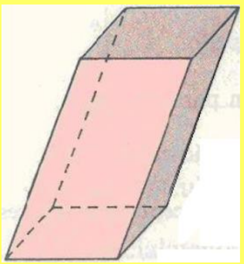


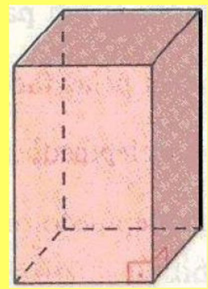
PARALELEPÍPEDO E CUBO

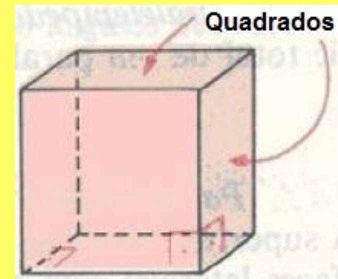
1-CONCEITO DE PARALELEPÍPEDO: É um prisma que possui em suas bases um paralelogramo. Sendo que o paralelepípedo é configurado pela reunião dos seis paralelogramos que o constituem.

2-PARALELEPÍPEDO RETO É aquele onde todas as arestas são perpendiculares entre si.

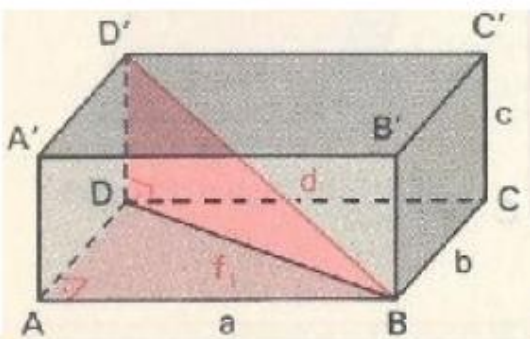
3-CUBO (HEXAEDRO REGULAR): É o paralelepípedo reto que tem todas as arestas congruentes







4.1-DIAGONAL: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

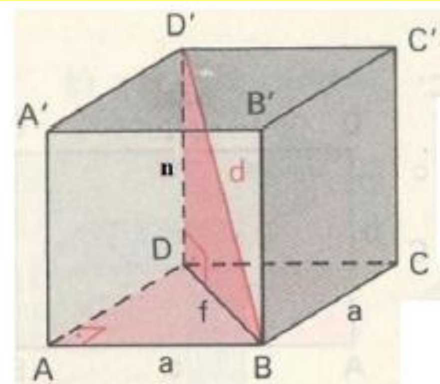


4.2- ÁREA TOTAL: É a soma de todas as faces de um paralelepípedo.

$\boxed{At= 2 (ab + AC + BC)}$

4.3-VOLUME: É o produto de todas as dimensões do paralelepípedo.

$\boxed{V = a.b.c}$

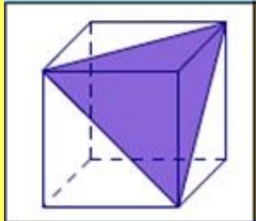


5.1-DIAGONAL: $\boxed{d = a\sqrt{3}}$

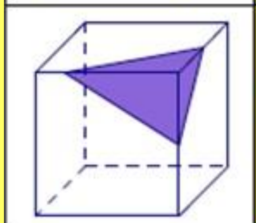
5.2-ÁREA TOTAL: $\boxed{At= 6a^2}$

5.3-VOLUME: $\boxed{V = a^3}$

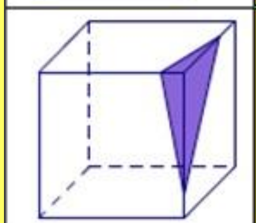
Com um corte no cubo é possível obter vários polígonos



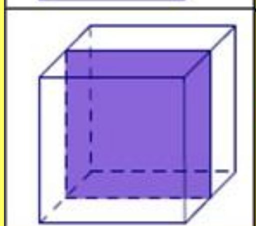
Triângulos equiláteros:
O plano de corte é perpendicular a uma diagonal espacial e intersecta 3 faces do cubo.



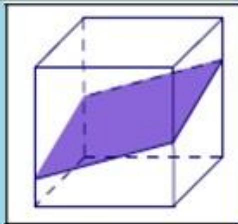
Triângulos isósceles:
O plano de corte é paralelo a uma diagonal facial e intersecta três faces do cubo.



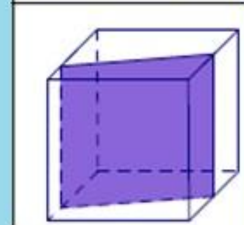
Triângulos escalenos:
O plano de corte não é paralelo a nenhuma diagonal facial e intersecta três faces do cubo.

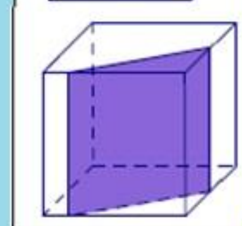


Quadrados:
O plano de corte é paralelo a uma das faces e intersecta quatro faces do cubo sendo estas paralelas duas a duas.

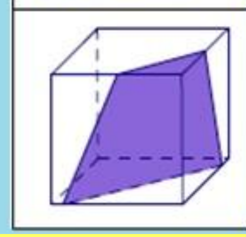


Paralelogramos:
O plano de corte intersecta quatro faces do cubo sendo estas paralelas duas a duas.

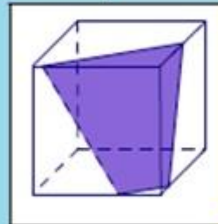




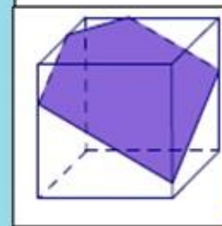
Retângulos:
O plano de corte é paralelo a uma aresta e intersecta quatro faces do cubo sendo estas paralelas duas a duas ou apenas duas delas paralelas.



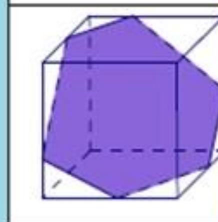
Trapézio isósceles:
O plano de corte é paralelo a uma diagonal facial e intersecta quatro faces do cubo sendo somente duas destas paralelas.



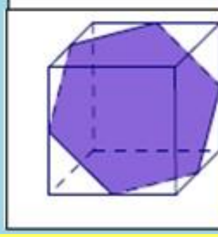
Trapézios escalenos:
O plano de corte não paralelo à diagonal facial e intersecta quatro faces do cubo sendo somente duas destas paralelas.



Pentágonos irregulares:
O plano de corte intersecta cinco faces. Os pentágonos vão ter sempre dois pares de lados paralelos. Não é possível obter nenhum pentágono regular.



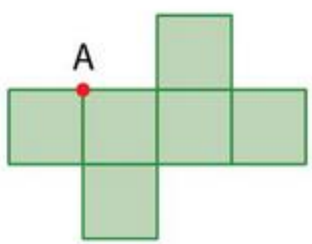
Hexágonos irregulares:
O plano de corte intersecta seis faces do cubo.



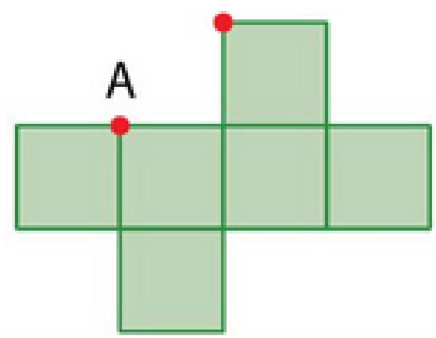
Hexágonos regulares:
O plano de corte é perpendicular a meio de uma diagonal espacial do cubo e intersecta seis arestas nos seus pontos médios.

Exercício resolvido

Na planificação da superfície de um cubo, foi assinalado um ponto *A*. Marcar nessa planificação o ponto que coincidirá com *A* depois de o cubo ser montado.



Resolução



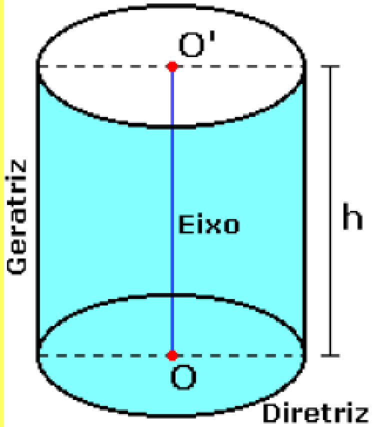
Cilindros

01-CONCEITO: Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a AB com uma extremidade no círculo.

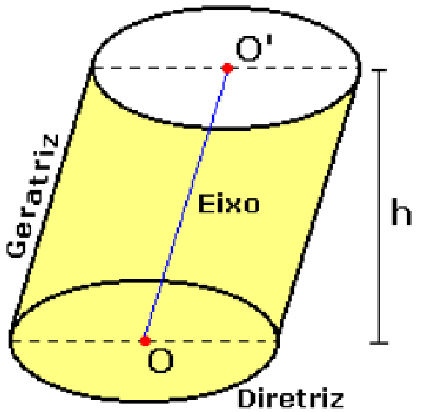
A reta que contém o segmento AB é denominada *geratriz*.

Podemos também definir cilindro como sendo o sólido formado pela rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados.

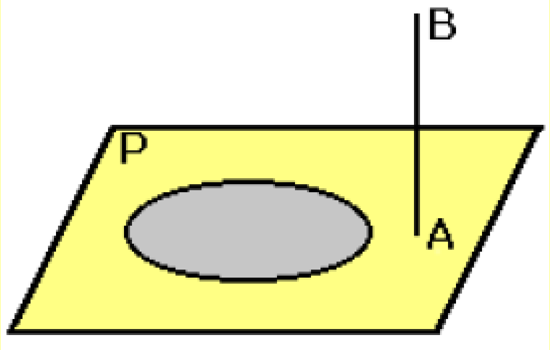
02-TIPOS: Como prismas, podem ser de dois tipos: retos e oblíquos.



CILINDRO RETO



CILINDRO OBLÍQUO



03-CONCEITOS IMPORTANTES

3.1- Eixo de simetria: É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".

3.2- Altura: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".

Se o cilindro for reto a altura tem a mesma medida da geratriz.

04-O QUE CALCULAR EM UM CILINDRO:

4.1-Área da Base: $\boxed{Ab = \pi.r^2}$

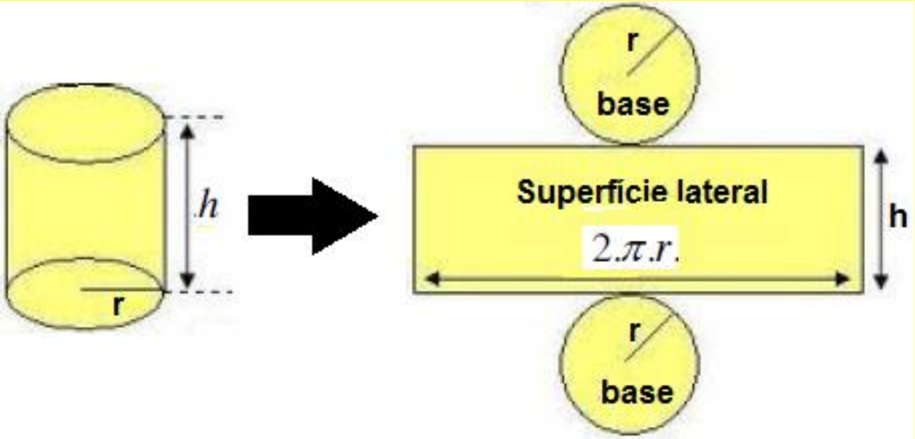
4.2-Área lateral: Se planificarmos um cilindro, a área da base é equivalente a um retângulo de lados $2.\pi.r$ e altura h, portanto a sua areal lateral é : $\boxed{Al = 2.\pi.r.h}$

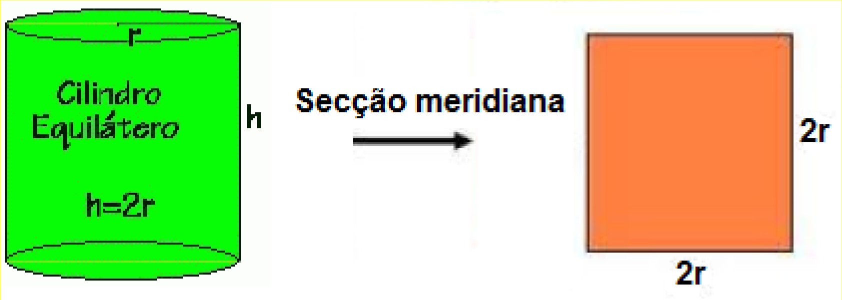
4.3-Área total: É a soma da área lateral mais a base mais a " tampa" .Como a tampa tem a mesma área da base, podemos dizer que At= Al + 2. Ab, logo $\boxed{At = 2.\pi.r.h + 2.\ \pi.r^2}$

4.4-Volume: É o produto da área de base pela altura. $\boxed{V = \pi.r^2.h}$

4.5-Secção Meridiana: É um corte no sentido vertical (meridional) que contém o eixo de simetria do cilindro. A secção meridiana é um retângulo onde um dos lados é o diâmetro da base e a altura a própria altura do cilindro. Na figura é o retângulo ABCD.

05-CILINDRO EQUILÁTERO: É o cilindro reto cuja altura tem a mesma medida do diâmetro da base.



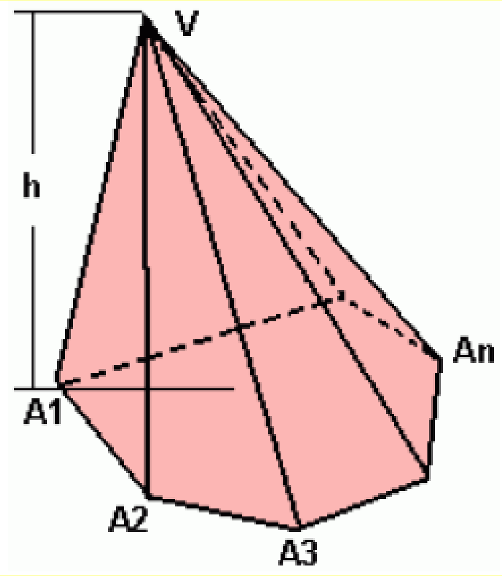


Pirâmides

1-CONCEITO: Consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma Pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.

2-Elementos da Pirâmide

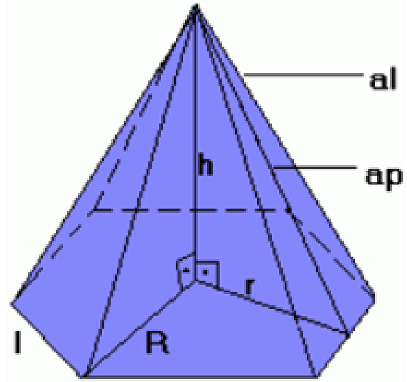
- O ponto V é chamado de vértice da pirâmide
- A região poligonal é chamada de base
- Os vértices da região poligonal são os vértices da base
- E o polígono é o polígono de base
- As demais faces, que não a base, são chamadas de faces laterais
- As arestas não pertencentes a base, são arestas laterais
- A distancia entre o vértice V e o plano da base é a altura da pirâmide
- A soma das áreas das faces laterais é a área lateral
- E a soma da área da base com a área lateral é a área total



Classificação da Pirâmide:

- A Pirâmide é denominada de acordo com o numero de arestas de base
- pirâmide reta. É aquela em que a projeção do vértice sobre o plano de base é o centro do polígono da base
- Pirâmide regular, é a pirâmide reta e seu polígono de base é regular.

3-PIRÂMIDE REGULAR RETA: Pirâmide regular reta é aquela que tem uma base poligonal regular e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base



R –raio do círculo circunscrito
r- raio do círculo inscrito
h- altura
ap- apótema lateral (é sempre perpendicular a aresta da base)
al- aresta lateral
Obs. Todas as faces laterais são triângulo isósceles congruentes

4-O QUE CALCULAR EM UMA PIRÂMIDE:

4.1-RELAÇÃO FUNDAMENTAL: $(ap)^2 = h^2 + r^2$

4.2- ÁREA DA BASE: Depende do polígono da base.

4.3- ÁREA LATERAL: É a soma das áreas das faces laterais.

ATENÇÃO: Se a pirâmide for regular reta, basta calcular a área de uma face e multiplicar pelo número de faces.

A face lateral é sempre um triângulo isósceles e a sua altura é o apótema lateral.

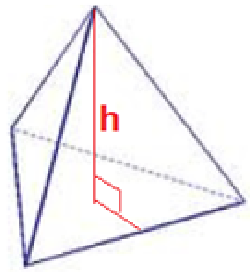
4.4-ÁREA TOTAL: É a soma das áreas das faces laterais e a área da base.

4.5-VOLUME: $\boxed{V = \frac{1}{3} Ab.h}$

5-TETRAEDRO REGULAR

DEFINIÇÃO: O tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as faces são triângulos eqüiláteros.

ALTURA DO TETRAEDRO REGULAR: $\boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$ **ÁREA TOTAL:** $\boxed{At = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2.\sqrt{3}}$



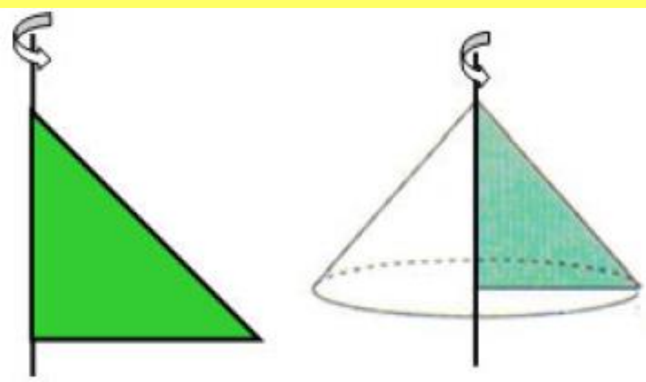
VOLUME: $\boxed{V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

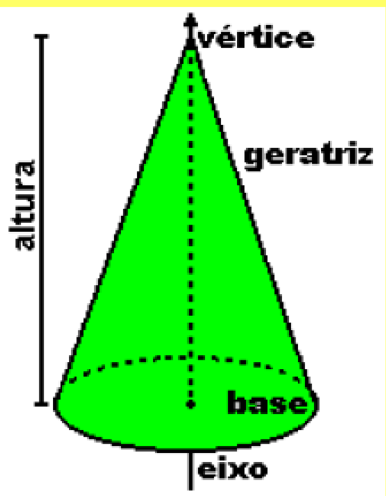
CONE CIRCULAR RETO

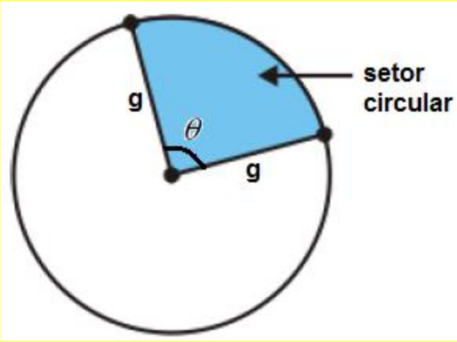
1-CONCEITO: É o sólido formado pela rotação completa de um triângulo retângulo sobre um de seus catetos.

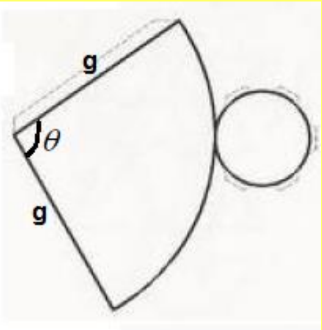
2-ELEMENTOS DE UM CONE:

1) Vértice de um cone é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta.
2) Base de um cone : CÍRCULO DA BASE
3)Eixo do cone é quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
4) Geratriz é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
5) Altura é a distância do vértice do cone ao plano da base.
6) Área lateral de um cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base. É UM SETOR CIRCULAR
7)Área total é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
8) Seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.









3- O QUE CALCULAR EM UM CONE CIRCULAR.

3.1-RELAÇÃO FUNDAMENTAL: Aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo de formado pela altura, geratriz e raio da base. $\boxed{g^2 = r^2 + h^2}$

3.2-ÁREA DA BASE: É a área do círculo da base $Ab = \pi . r^2$

3.3-ÁREA LATERAL: É área do setor circular obtido com a planificação do cone. Note que o raio do setor circular é a geratriz do cone. $Al = \pi r g$

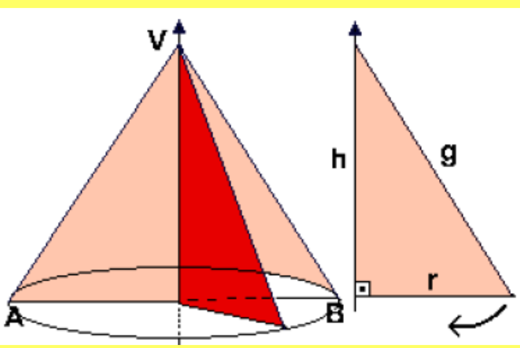
3.4-ÁREA TOTAL: É a soma da área lateral com a área da base $At = Al + Ab = \pi . r^2 + \pi . r . g$

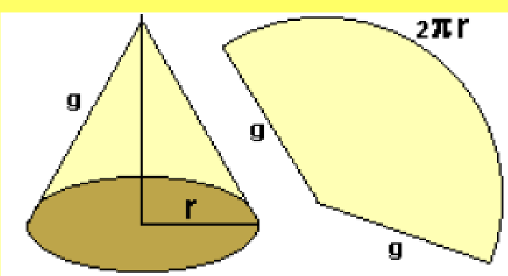
3.5-VOLUME: É a terça parte do produto da área da base pela altura $V = \frac{1}{3}.Ab.h = \frac{1}{3}\pi . r^2 h$

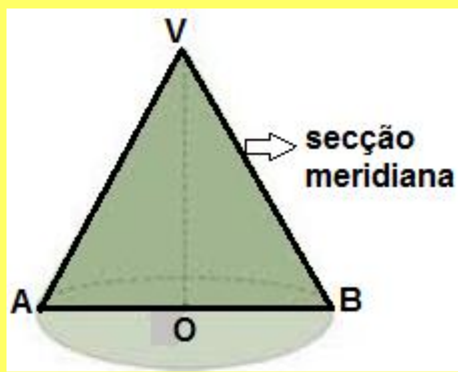
3.6-ÂNGULO CENTRAL: É o ângulo formado pela planificação da área lateral do cone.
O cálculo desse ângulo é a divisão entre o comprimento da circunferência da base e a geratriz. $\theta = \frac{2.\pi . r}{g}$

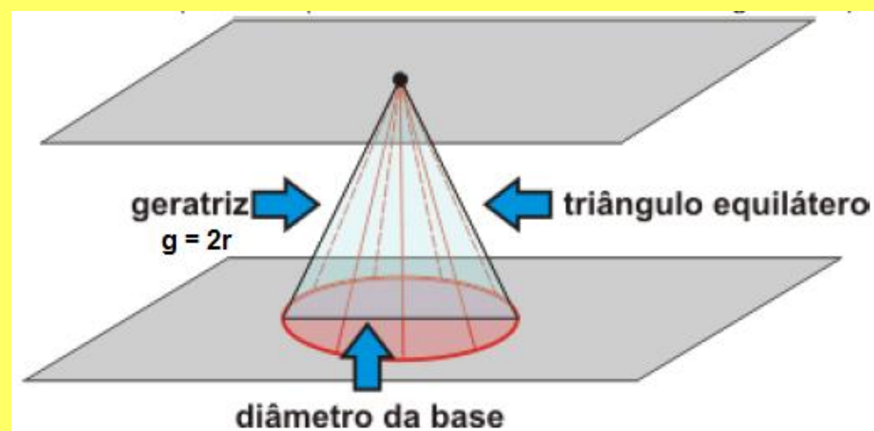
3.7-SECÇÃO MERIDIANA: É o triângulo isósceles formado pelo corte meridional .

4-CONE EQUILÁTERO: Um cone é eqüilátero quando o diâmetro da base é congruente (mesma medida) à altura.





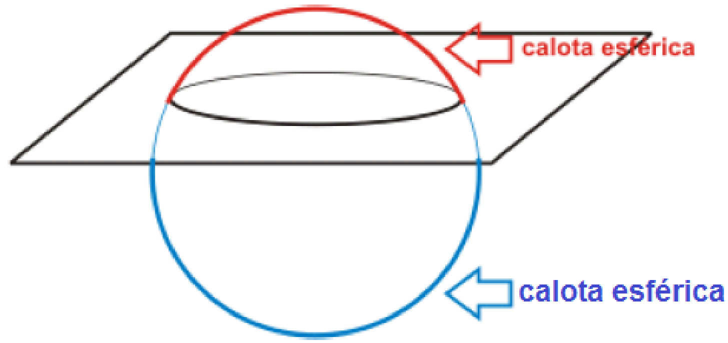


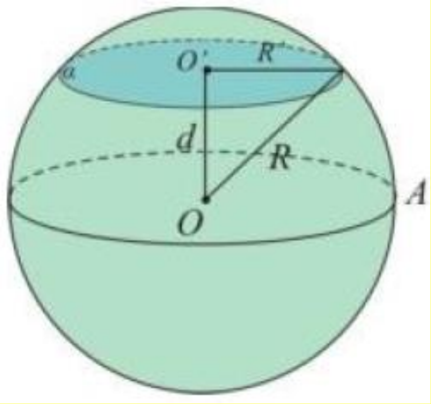


ESFERAS

1-CONCEITO: E o conjunto de pontos do espaço equidistantes de um ponto **O** denominado de centro.

2-ÁREA DE SECÇÃO: Ao seccionarmos uma esfera por um plano, sempre vamos encontrar um círculo. O plano de secção divide a esfera em dois sólidos chamados de "calotas esféricas".





3-O QUE CALCULAR EM UMA ESFERA:

3.1-RELAÇÃO FUNDAMENTAL: É a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos elementos: R (Raio da Esfera), d (distância do plano de secção ao centro da esfera) e R´ (Raio do círculo formado pela secção do plano com a esfera): $R^2 = R'^2 + d^2$

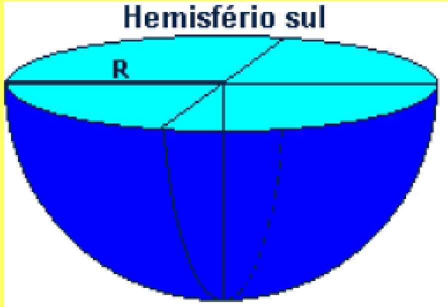
3.2-SUPERFÍCIE: É a área da superfície da esfera: $S = 4.\pi.R^2$

3.3-VOLUME: $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$

4-HEMISFÉRIO.

O hemisfério é o sólido formado pela intersecção de um plano com o centro da esfera. É a metade da esfera. Neste caso o raio da secção é igual ao raio da esfera.

A parte plana do hemisfério é chamado de CÍRCULO MÁXIMO.

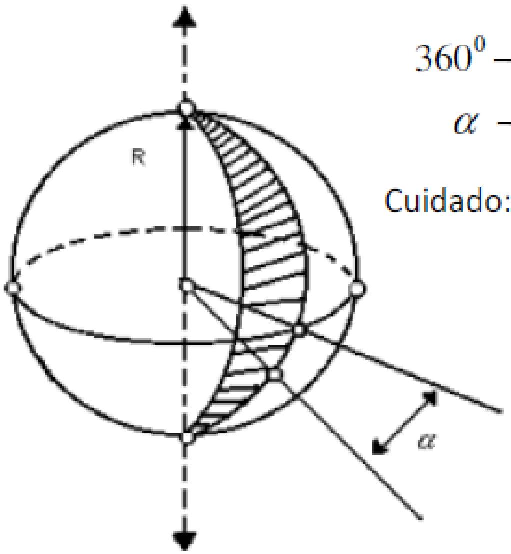


5-FUSO

Considere dois semiplanos que contenham um diâmetro AB de uma **superfície esférica**.
Fuso esférico é a parte da **superfície esférica** limitada pelos semiplanos.

FUSO TEM ÁREA

O ângulo α é chamado de ângulo de diedro. Para calcular a área do fuso fazemos a seguinte regra de três.



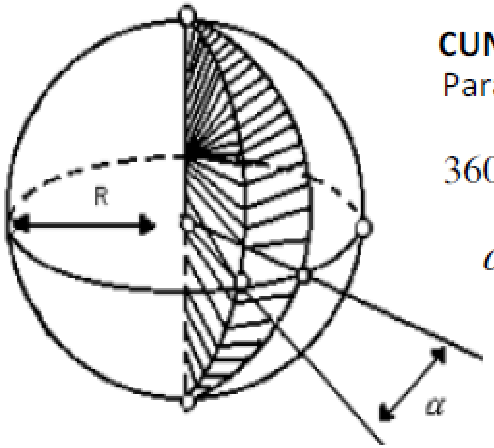
$$360^0 \longrightarrow 4.\pi.R^2$$
$$\alpha \longrightarrow A$$

$$\boxed{A = \frac{4.\pi.R^2.\alpha}{360^0}}$$

Cuidado: Se o ângulo de diedro estiver em radianos o denominador da fração deverá ser 2π.

6-CUNHA:

Considere dois semiplanos que contenham um diâmetro AB de uma **esfera**. Cunha esférica é a parte da **esfera** limitada pelos semiplanos. O ângulo α é chamado de ângulo de diedro.



CUNHA TEM VOLUME:

Para calcular o volume de uma cunha fazemos a seguinte regra de três.

$$360^0 \longrightarrow \frac{4.\pi.R^3}{3}$$
$$\alpha \longrightarrow V$$

$$\boxed{V = \frac{.\pi.R^3.\alpha}{270^0}} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{V = \frac{2}{3}.R^3.\alpha}$$

ângulo em graus **ângulo em radianos**

SÓLIDOS SEMELHANTES-TRONCO DE PIRÂMIDE E CONE

SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA PIRÂMIDE OU CONE

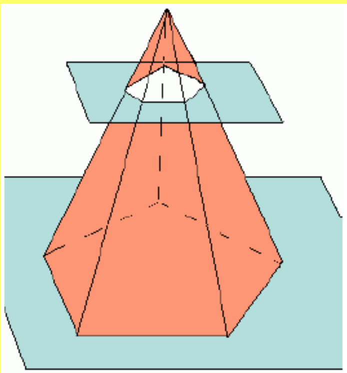
É a interseção da pirâmide(ou cone) com um plano paralelo à base. A seção transversal tem a mesma forma que a base, isto é, as suas arestas correspondentes são proporcionais. Em uma pirâmide a razão entre uma aresta da seção transversal e uma aresta correspondente da base é a razão de semelhança. Já no cone a razão de semelhança é a razão entre o raio da o plano de secção com o raio da base, ou a geratriz do cone menor com a geratriz do cone maior,

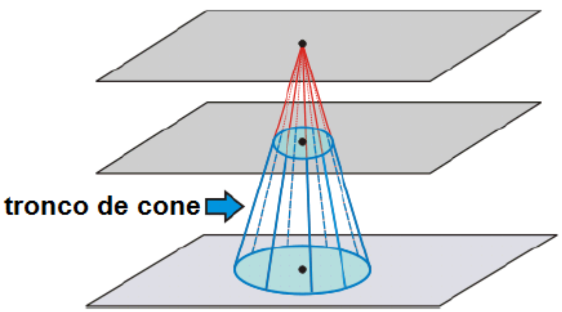
OBSERVAÇÕES:

1-Em uma pirâmide qualquer, a seção transversal e a base são regiões poligonais semelhantes. A razão entre a área da seção transversal e a área da base é igual ao quadrado da razão de semelhança. Em um cone é a mesma coisa apenas que as secções transversais são círculos e não regiões poligonais;

2-Ao seccionar uma pirâmide (ou um cone) por um plano paralelo à base, obtemos outra pirâmide (ou um cone) menor (acima do plano) semelhante em todos os aspectos à pirâmide (ou cone) original. O sólido abaixo da secção transversal chama-se tronco de pirâmide (ou cone).

3-Se duas pirâmides (ou cones) têm a mesma altura e as áreas das bases são iguais, então as seções transversais localizadas à mesma distância do vértice têm áreas iguais





h – Altura da pirâmide menor (ou cone menor)

H- Altura da pirâmide maior (ou cone maior)

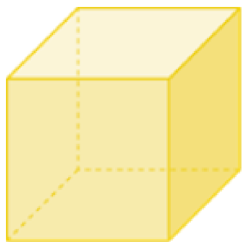
$$\frac{h}{H} = k \qquad \frac{\text{Asecção}}{\text{Abase}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \qquad \frac{\text{Vsecção}}{\text{Vpirâmide}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Poliedro

É chamado de **poliedro** o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

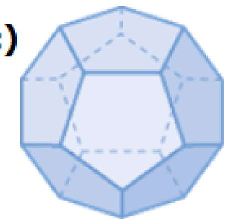
Exemplos

a)

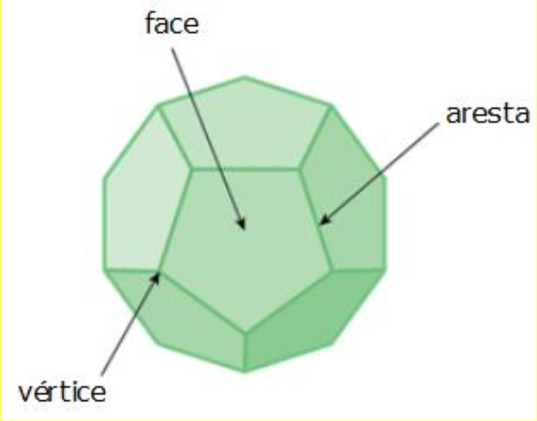


b)

c)



Elementos de um poliedro



Relação de Euler

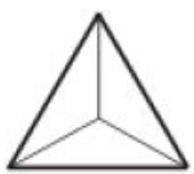
$$V + F - 2 = A$$

- V: número de vértices
- F: número de faces
- A: número de arestas

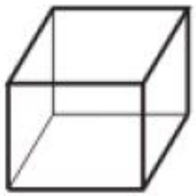
SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLIEDRO

S=(V-2).360   V é o número de vértices

SÓLIDOS DE PLATÃO



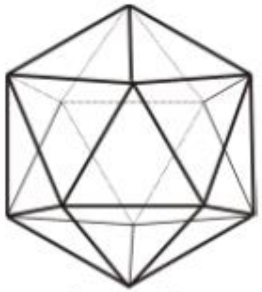
tetraedro



hexaedro

octaedro

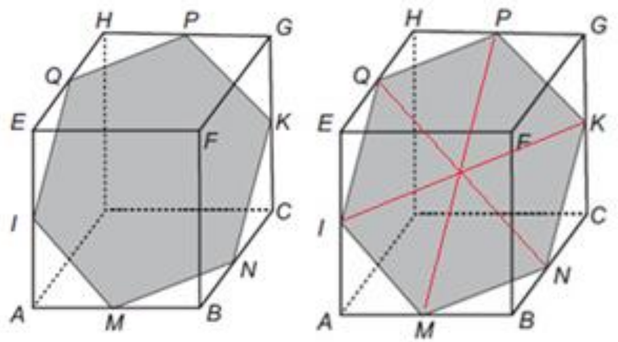
dodecaedro



icosaedro

1ª Questão

(ENEM) Um artista utilizou uma caixa transparente para a confecção de sua obra, que consistiu em construir um polígono *IMNKPQ*, no formato de um hexágono regular disposto no interior da caixa. Os vértices desse polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa. Um esboço da sua obra pode ser visto na figura.



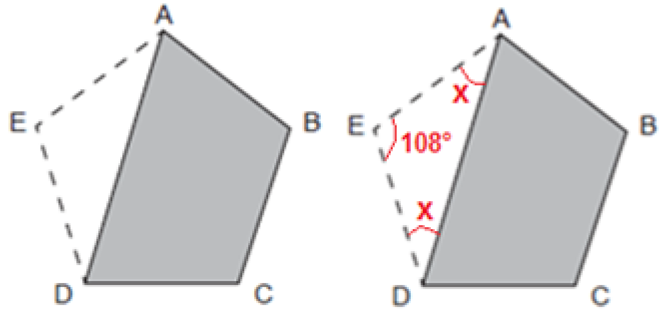
Considerando as diagonais do hexágono, distintas de IK, quantas têm o mesmo comprimento de *IK*?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9

Solução. No hexágono regular as diagonais que passam pelo centro possuem a mesma medida. Logo há duas diagonais com o mesmo comprimento de IK: QN e PM.

2ª Questão

(ENEM) Um gesseiro que trabalha na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.



Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos $x = E\hat{A}D$, $y = E\hat{D}A$ e $z = A\hat{E}D$ do triângulo ADE. As medidas x, y e z, desses ângulos são, respectivamente:

a) 18, 18 e 108 b) 24, 48 e 108 c) 36, 36 e 108 d) 54, 54 e 72 e) 60, 60 e 60

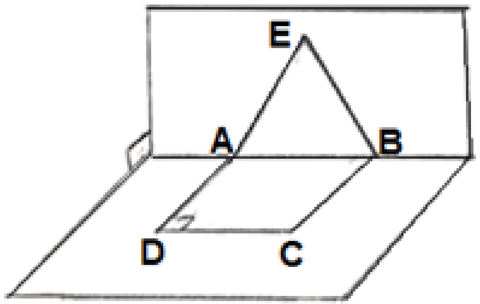
Solução. Os ângulos internos do pentágono regular medem: $\boxed{A_1 = \frac{180°.(5-2)}{5} = (36°).(3) = 108°}$.

Esse é o valor, portanto, do ângulo interno no vértice E. O triângulo EAD é isósceles.

Calculando os demais ângulos desse triângulo, temos: $\boxed{x + x + 108° = 180° \Rightarrow 2x = 72° \Rightarrow x = 36°}$.

3ª Questão

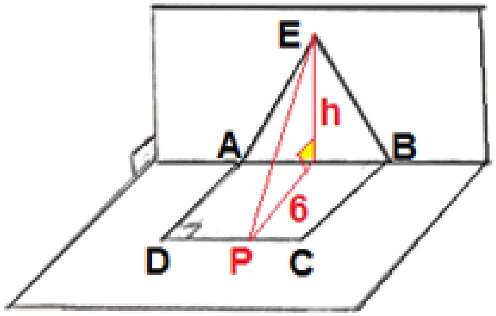
(PISM) Um quadrado ABCD e um triângulo equilátero ABE têm o lado comum AB = 6 cm e estão em planos perpendiculares. Calcule as distâncias:

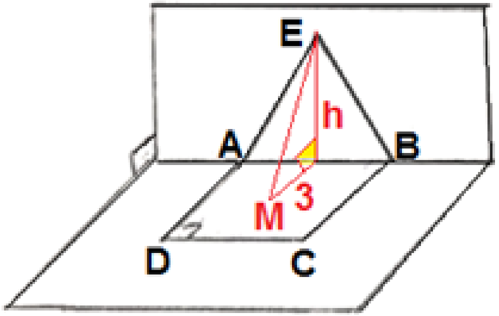


a) do ponto E à reta CD;

b) do ponto E ao centro do quadrado.

Solução. Em ambos os casos são formados triângulos retângulos onde as distâncias pedidas são as hipotenusas. Temos:





a) $h=\dfrac{L\sqrt{3}}{2}=\dfrac{6.\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

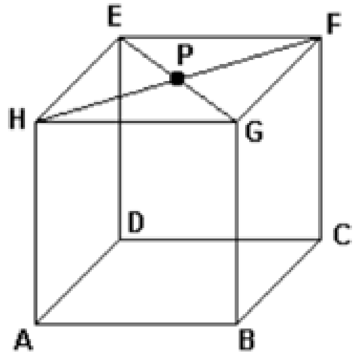
$\overline{EP}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+6^2}=\sqrt{27+36}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}\ cm$.

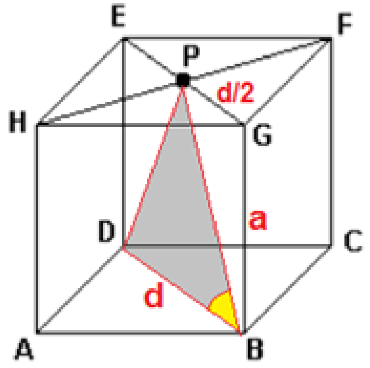
b) $h=\dfrac{L\sqrt{3}}{2}=\dfrac{6.\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\overline{EM}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6\ cm$.

4ª Questão

(UERJ) No cubo de base ABCD da figura, marca-se o ponto P, centro da face EFGH, A medida, em graus, do ângulo PBD é um valor entre:





a) 0 e 30 b) 30 e 45 c) 45 e 60 d) 60 e 90 e) 90 e 120

Solução. O triângulo PDB é isósceles. Logo, PB = PD. Identificando DB como diagonal da face e PG como metade dessa medida e aplicando a lei dos cossenos no triângulo PDB, temos:

$$i)\ \overline{DB} = a\sqrt{2} \Rightarrow \overline{PG} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$ii)\ \overline{DP} = \overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$iii)\ Lei\ dos\ Cossenos: \overline{DP}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{DB}^2 - 2.\left(\overline{PB}\right)\left(\overline{PD}\right)\cos P\hat{B}D \Rightarrow$$

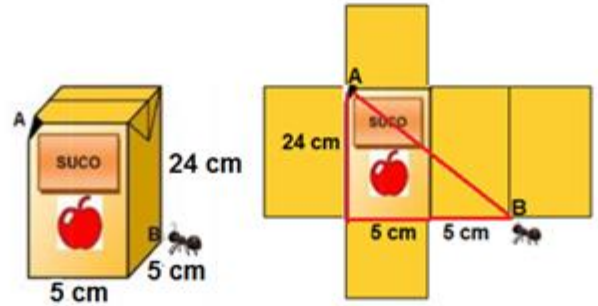
$$\Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - 2.\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)(a\sqrt{2}).\cos P\hat{B}D \Rightarrow 2a^2 - a^2\sqrt{12}.\cos P\hat{B}D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2.2\sqrt{3}.\cos P\hat{B}D = 2a^2 \Rightarrow \cos P\hat{B}D = \frac{2a^2}{a^2 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0{,}58$$

$$iv)\begin{cases}\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7 \\ \cos 60° = \dfrac{1}{2} = 0{,}5\end{cases} \Rightarrow \cos 60° < \cos P\hat{B}D < \cos 45° \Rightarrow 45° < P\hat{B}D < 60°$$

5ª Questão

(UERJ) A figura abaixo representa uma caixa de suco cujas dimensões estão indicadas. Determinar a menor distância que tem que percorrer uma formiga localizada em B para chegar até a abertura da caixa, localizada em A.



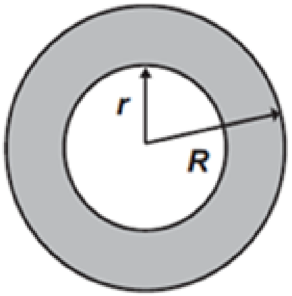
a) $\left(5+\sqrt{601}\right) cm$ b) 34 cm c) $\sqrt{26}\ cm$ d) 26 cm

Solução. Observando a planificação da caixa de suco, temos que a menor distância será a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo 24 cm e 5 cm:

$$\boxed{\overline{AB}=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26\,cm}.$$

6ª Questão

(ENEM) No projeto de arborização de uma peça está prevista a construção de um canteiro circular. Esse canteiro será constituído de uma área central e de uma faixa circular ao redor, conforme ilustra a figura. Deseja-se que a área central seja igual à área da faixa circular sombreada.



A relação entre os raios do canteiro (R) e da área central (r) deverá ser:

a) $R = 2r$ b) $R = r\sqrt{2}$ c) $R = \dfrac{r^2 + 2r}{2}$ d) $R = r^2 + 2r$ e) $\dfrac{3}{2}r$

Solução. Calculando as respectivas áreas, temos:

$$\begin{cases} \acute{A}rea\ (canteiro) = \pi.R^2 \\ \acute{A}rea\ (central) = \pi r^2 \\ \acute{A}rea\ (sombreada) = \pi.(R^2 - r^2) \end{cases} \Rightarrow \pi.r^2 = \pi.(R^2 - r^2) \Rightarrow r^2 = (R^2 - r^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = 2.r^2 \Rightarrow R = r.\sqrt{2}$$

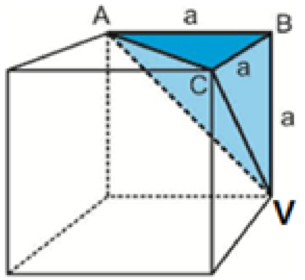
7ª Questão

(PISM) Três das arestas de um cubo, com um vértice em comum, são também arestas de um tetraedro. A razão entre o volume do tetraedro e o volume do cubo é:

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{1}{6}$ c) $\dfrac{2}{9}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{1}{3}$

Solução. Considerando a como a medida da aresta do cubo e observando a figura, temos:

$$\begin{cases} i)\ V_{VABC} = \dfrac{\left[\dfrac{(a).(a)}{2}\right]a}{3} = \dfrac{a^3}{6} \Rightarrow \dfrac{V_{VABC}}{V_{Cubo}} = \dfrac{\dfrac{a^3}{6}}{a^3} = \dfrac{1}{6} \\ ii)\ V_{Cubo} = a^3 \end{cases}$$



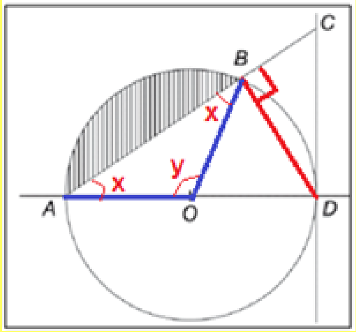
8ª Questão

(FUVEST) Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overline{CD}$ no ponto D, o qual pertence à reta $\overline{AO}$. Além disso, A e B são pontos da circunferência, $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$.

Nessas condições, determine:

a) a medida do segmento $\overline{CD}$; b) o raio da circunferência;

c) a área do triângulo AOB; d) a área da região hachurada na figura.



Solução. O triângulo ADC é retângulo devido à tangência em D. Como BD está sobre o diâmetro, AB é perpendicular à BD, isto é BD é altura de relativa à hipotenusa AC e determina as projeções AB e BC. Temos:

a) $\boxed{\overline{CD}^2 = \overline{AC}.\overline{BC} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \left(8\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}}$.

b) $\boxed{\overline{AD} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{192 - 48} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow Raio = \overline{AO} = 6}$.

c) $\boxed{sen x = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow y = 120^\circ}$; $\boxed{Área\,(Triang\ AOB) = \frac{(6).(6).sen(120^\circ)}{2} = 18.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}}$.

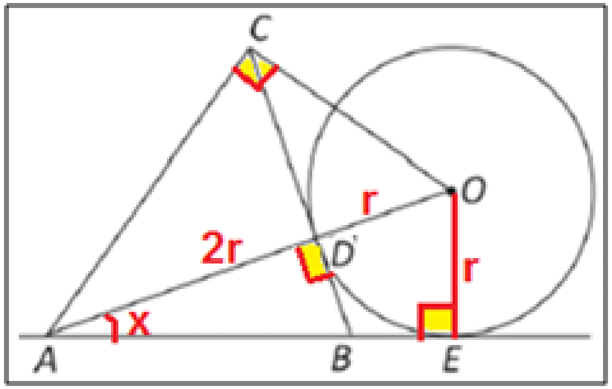
d) $$\boxed{\begin{cases} Área\,(setor\ AOB) = Área\,(setor\ 120^\circ) = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi.(6)^2}{3} = 12\pi \\ Área\,(Triang\ AOB) = 9\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow Área(hachurada) = 12\pi - 9\sqrt{3}}$$.

9ª Questão

(FUVEST) Na figura, a circunferência de centro O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta AB no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, AD = 2r e o ângulo $A\hat{C}O$ é reto. Determine em função de r.

a) a medida do lado $\overline{AB}$ no triângulo ABC;

b) a medida do segmento $\overline{CO}$.



Solução. Identificando os triângulos retângulos, temos:

a)

$$i)\ senx = \frac{\overline{OE}}{\overline{AO}} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$ii)\ \cos x = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2r}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{3r}{\sqrt{2}} = \frac{3r\sqrt{2}}{2}$$

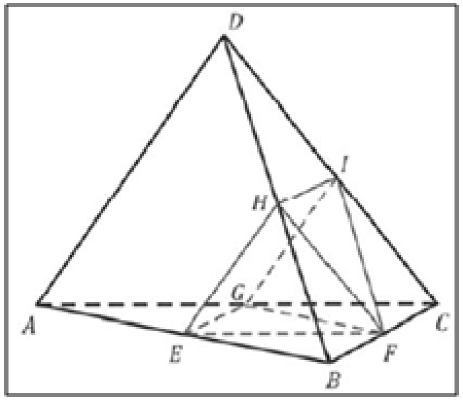
b)

$$i)\ \overline{CD} = \sqrt{(2r).(r)} = r\sqrt{2}$$

$$ii)\ \overline{CD} = \sqrt{\left(r\sqrt{2}\right)^2 + (r)^2} = \sqrt{2r^2 + r^2} = r\sqrt{3}$$

10ª Questão

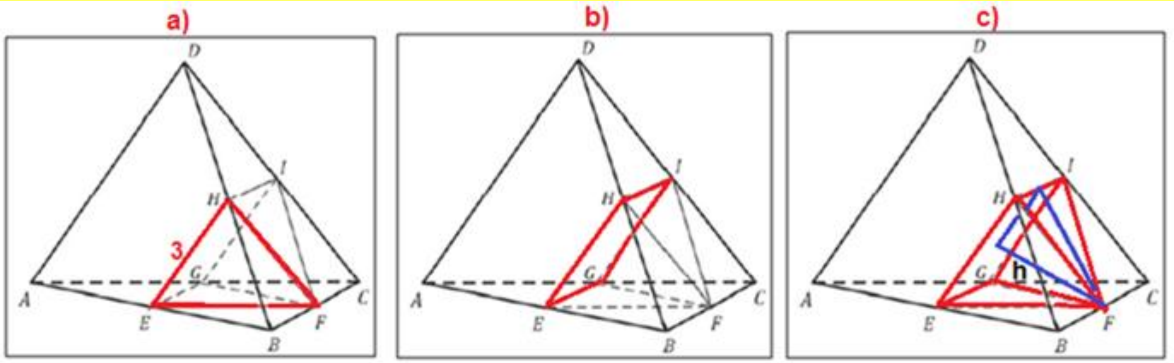
(FUVEST) Considere um tetraedro regular ABCD cujas arestas medem 6 cm. Os pontos E, F, G, H e I são os pontos médios das arestas $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{BD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



a) Determine a área do triângulo EFH.

b) Calcule a área do quadrilátero EGIH.

c) Determine o volume da pirâmide de vértices E, G, I, H e F, cuja base é o quadrilátero EGIH.



Solução. Identificando as figuras, temos:

a) Como os lados são formados por pontos médios, então EF = HF = EH = 3.

$$\boxed{Área = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(3)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^2}.$$

b) O quadrilátero é um quadrado, pois as diagonais HG e IE possuem a mesma medida e os lados são congruentes: EG = GI = IH = HE = 3. Temos: $\boxed{Área = L^2 = (3)^2 = 9\ cm^2}$.

c) A altura da pirâmide liga o vértice F ao centro do quadrado EGHI. Calculando o volume, temos:

$$\boxed{h = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}};\ \boxed{Volume = \frac{A_{base}h}{3} = \frac{1}{3}\left(9.\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{2}\ cm^3}.$$

11ª Questão

(ENEM) Na reforma estilização de um instrumento de percussão, em formato cilíndrico (bumbo), será colada uma faixa decorativa retangular, como a indicada na Figura 1, suficiente para cobrir integralmente, e sem sobra, toda a superfície lateral do instrumento.

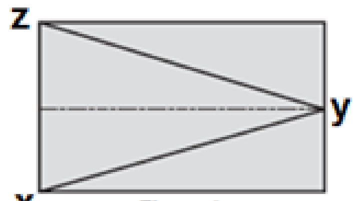
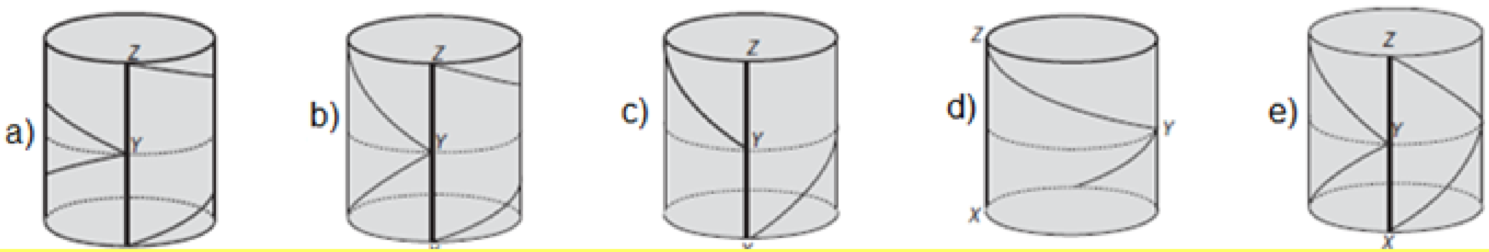
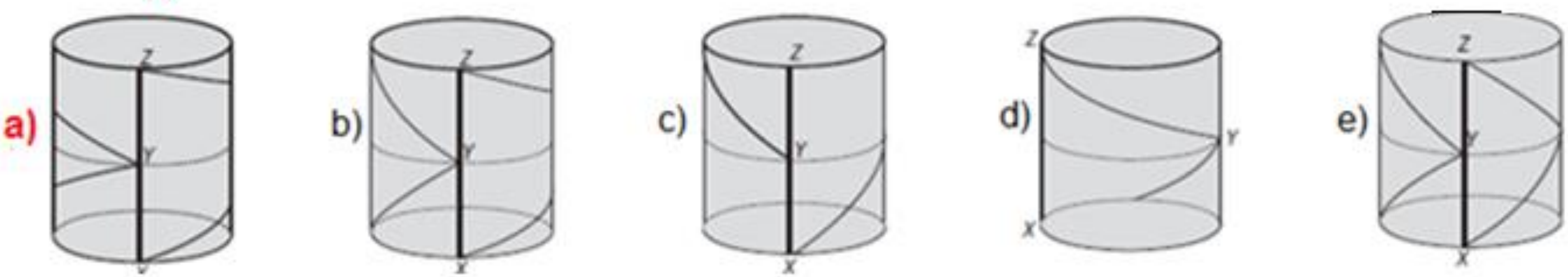


Figura 1

Como ficará o instrumento após a colagem?

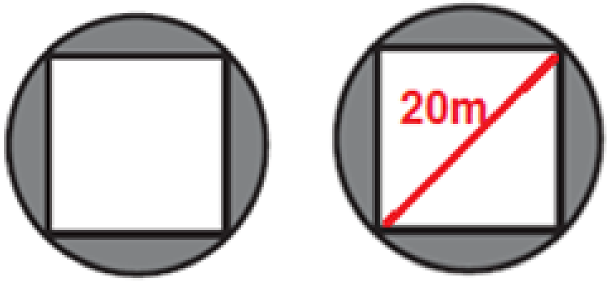


Solução. Após a colagem y estará alinhado com o eixo zx e as linhas que partem de y estarão como na letra (a).



12ª Questão

(ENEM) Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m². A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π.



O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é:

a) 100 b) 140 c) 200 d) 800 e) 1 000

Solução. Calculando a área correspondente ao jardim, temos:

$$i)\ \text{Área}(\text{circunferência}) = \pi.(10)^2 = 100\pi = 100(3) = 300\ m^2$$

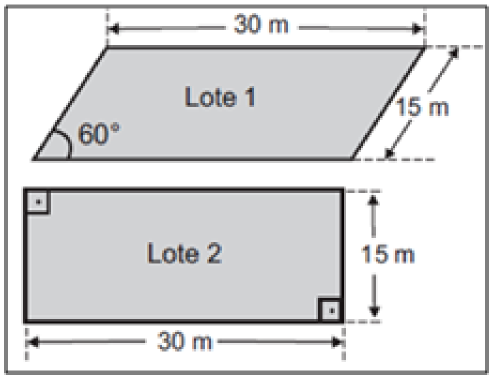
$$ii) \begin{cases} d = 20 \\ d = L\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow L\sqrt{2} = 20 \Rightarrow L = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \Rightarrow \text{Área}(\text{quadrado}) = \left(10\sqrt{2}\right)^2 = 200\ m^2$$

$$iii)\ \text{Área}(\text{plantada}) = 300 - 200 = 100\ m^2$$

$$iv) \begin{cases} 1\ m^2 \to 15\ kg \Rightarrow 100\ m^2 \to 1\,500\ kg \\ 1\ saco = 15\ kg \end{cases} \Rightarrow n^\circ\ (sacos) = \frac{1\,500\ kg}{15\ kg} = 100$$

13ª Questão

(ENEM) Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa, que esta família tem em mente, irão necessitar de uma área de pelo menos 400 m². Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são R$100 000,00 e R$150 000,00, respectivamente. Use $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 1,7 como aproximações, respectivamente, para $sen\,60°$, $\cos 60°$ e $\sqrt{3}$.



Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações.

Pai. Devemos comprar o Lote 1, pois como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

Mãe. Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto, pois tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

Filho 1. Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

Filho 2. Devemos comprar o Lote 1, pois como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato.

Corretor. Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno oi o(a):

a) pai b) mãe c) filho 1 d) filho 2 e) corretor

Solução. Identificando as medidas citadas pelos envolvidos em cada argumentação, temos:

Lote 1:

$$i)\ diagonal(maior): d^2 = 900 + 225 - 2.(30).(15).\cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 1125 - 900\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d = \sqrt{1125 + 450} = \sqrt{1575} = 15\sqrt{7}\ m$$

$$ii)\ Área = (30).(15).sen 60° = 450\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 450\left(\frac{1,7}{2}\right) = 382,5\ m^2 \rightarrow Custo/m^2 : 100\ 000 / 382,5 \cong R\$261,00$$

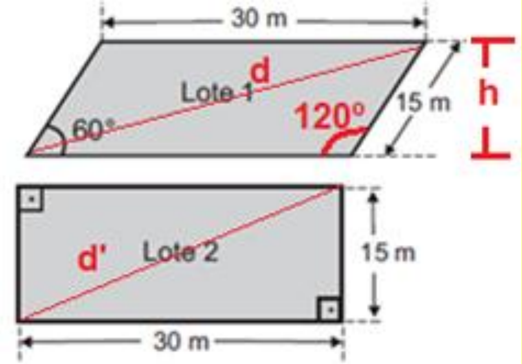
$$iii)\ Perímetro = 2.(30 + 15) = 45\ m$$

Lote 2:

$$i)\ diagonal: d'^2 = 900 + 225 \Rightarrow d = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}\ m$$

$$ii)\ Área = (30).(15). = 450\ m^2 \rightarrow Custo/m^2 : 150\ 000/450 \cong R\$333,00$$

$$iii)\ Perímetro = 2.(30 + 15) = 45\ m$$



Pai: Errou. A área do Lote 1 é menor;

Mãe: Errou. Áreas são diferentes;

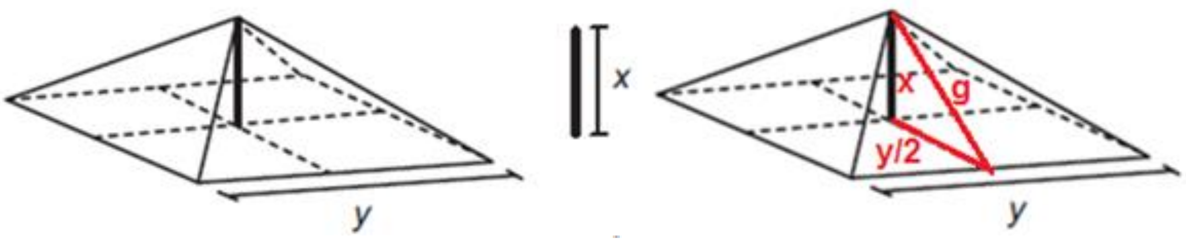
Filho 1: Acertou. A área do Lote 2 é maior que 400 m²;

Filho 2: Errou. Areas são diferentes;

Corretor: Errou. O custo por m² do Lote 2 é maior.

14ª Questão

(ENEM) A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície de cobertura de tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x, é dada pela expressão:

a) $2y\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$ b) $2y\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}$ c) $4y\sqrt{x^2+y^2}$ d) $4\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$ e) $4\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}$

Solução. Calculando o apótema da pirâmide (g), temos:

$$i)\ g=\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$$

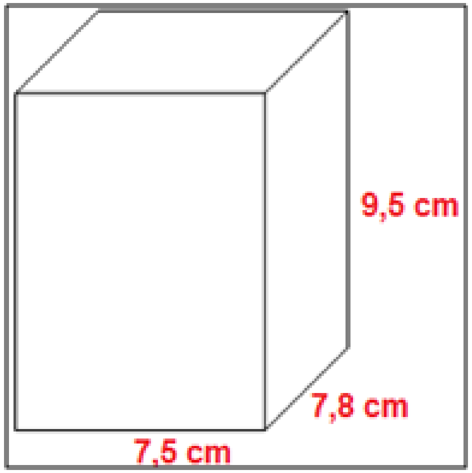
$$ii)\ \acute{A}rea\ (lateral): 4.\left[\frac{(y).\left(\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}\right)}{2}\right]=2y.\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$$

15ª Questão

(ENEM) Em uma confeitaria, um cliente comprou um *cupcake* (pequena bolo no formato de um tronco de cone regular mais uma cobertura, geralmente composta por um creme), semelhante ao apresentado na figura:

Como o bolinho não seria consumido no estabelecimento, o vendedor verificou que as caixas disponíveis para embalar o doce eram todas em formato de blocos retangulares, cujas medidas estão apresentadas no quadro:

Embalagem	Dimensões (comprimento × largura × altura)
I	8,5 cm × 12,2 cm × 9,0 cm
II	10 cm × 11 cm × 15 cm
III	7,2 cm × 8,2 cm × 16 cm
IV	7,5 cm × 7,8 cm × 9,5 cm
V	15 cm × 8 cm × 9 cm



A embalagem mais apropriada para armazenar o doce, de forma a não deformá-lo e com menor desperdício de espaço na caixa, é:

a) I b) II c) III d) IV e) V

Solução. O comprimento e a largura são suficientes se forem maiores que 7 cm. A altura precisa ser de 9 cm ou mais. Com essas condições a embalagem com menor volume (menos desperdício) é a IV.

16ª Questão

(ENEM) O banheiro de uma escola pública, com paredes e piso em formato retangular, medindo 5 metros de largura, 4 metros de comprimento e 3 metros de altura, precisa de revestimento no piso e nas paredes internas, excluindo a área da porta, que mede 1 metro de largura por 2 metros de altura. Após uma tomada de preços com 5 fornecedores, foram verificadas as seguintes combinações de azulejos para as paredes e de lajotas para o piso, com os preços dados em reais por metro quadrado, conforme a tabela.

Fornecedor	Azulejo (R$/m²)	Lajota (R$/m²)
A	31,00	31,00
B	33,00	30,00
C	29,00	39,00
D	30,00	33,00
E	40,00	29,00

Desejando-se efetuar a menor despesa total, deverá ser escolhido o fornecedor:

a) A b) B c) C d) D e) E

Solução. Calculando as áreas a serem revestidas, temos:

$$i)\ parede : 2.(20+15+12)-(1).(2) = 94-2 = 92\ m^2$$

$$ii)\ piso : (5).(4) = 20\ m^2$$

A menor despesa pode ser calculada utilizando a multiplicação de matrizes representadas:

	Azulejo (R$/m²)	Lajota (R$/m²)
A	31	31
B	33	30
C	29	39
D	30	33
E	40	29

Piso (m²)	20
Parede (m²)	92

	Gasto (R$)
A	3472
B	3420
C	4168
D	3636
E	3468

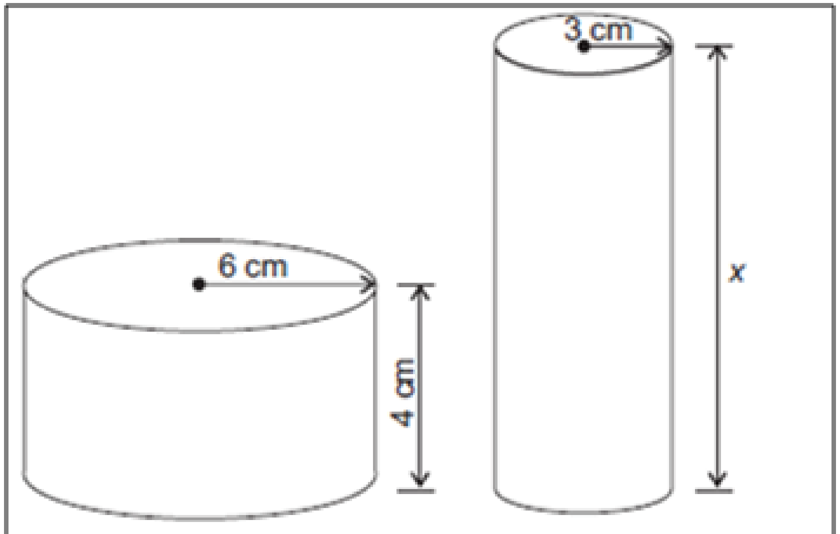
<u>17ª Questão</u>

(ENEM) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas, uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V_1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V_2.

A medida da altura desconhecida vale:

a) 8 cm b) 10 cm c) 16 cm

d) 20 cm e) 40 cm



Disponível em: www.cbra.org.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Solução. Calculando e comparando os volumes, temos:

$$\begin{cases} i)\ V_1 = \pi.(6)^2.(4) = 144\pi \\ ii)\ V_2 = \pi.(3)^2.(x) = 9x\pi \end{cases} \Rightarrow 144\pi = 1{,}6.(9x\pi) \Rightarrow x = \frac{144}{14{,}4} = 10.$$

18ª Questão

(ENEM) Um artesão fabrica vários tipos de potes cilíndricos. Mostrou a um cliente um pote de raio de base **a** e altura **b**. Esse cliente, por sua vez, quer comprar um pote com o dobro do volume do pote apresentado. O artesão diz que possui potes com as seguintes dimensões:

Pote I: raio **a** e altura **2b** Pote II: raio **2a** e altura **b** Pote III: raio **2a** e altura **2b**

Pote IV: raio **4a** e altura **b** Pote V: raio **4a** e altura **2b**

O pote que satisfaz a condição imposta pelo ciente é o:

a) I b) II c) III d) IV e) V

Solução. Estabelecendo a relação, temos:

$$i)\ V = \pi.a^2.b$$

$$ii)\ V' = 2.V = 2.(\pi.a^2.b) = \pi(a)^2.(2b) \rightarrow \begin{cases} raio = a \\ altura = 2b \end{cases}$$

19ª Questão

(ENEM) Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixa cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta conforma Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

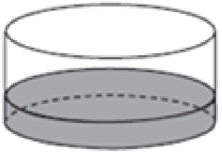


Figura 1

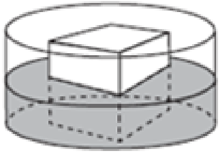
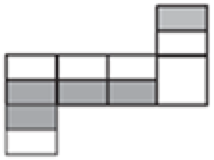
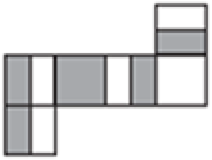
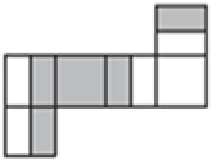


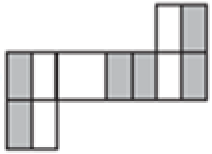
Figura 2

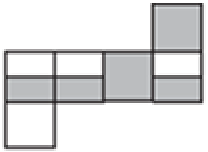
Qual é a planificação desse cubo após submerso?

a) 

b) 

c) 

d) 

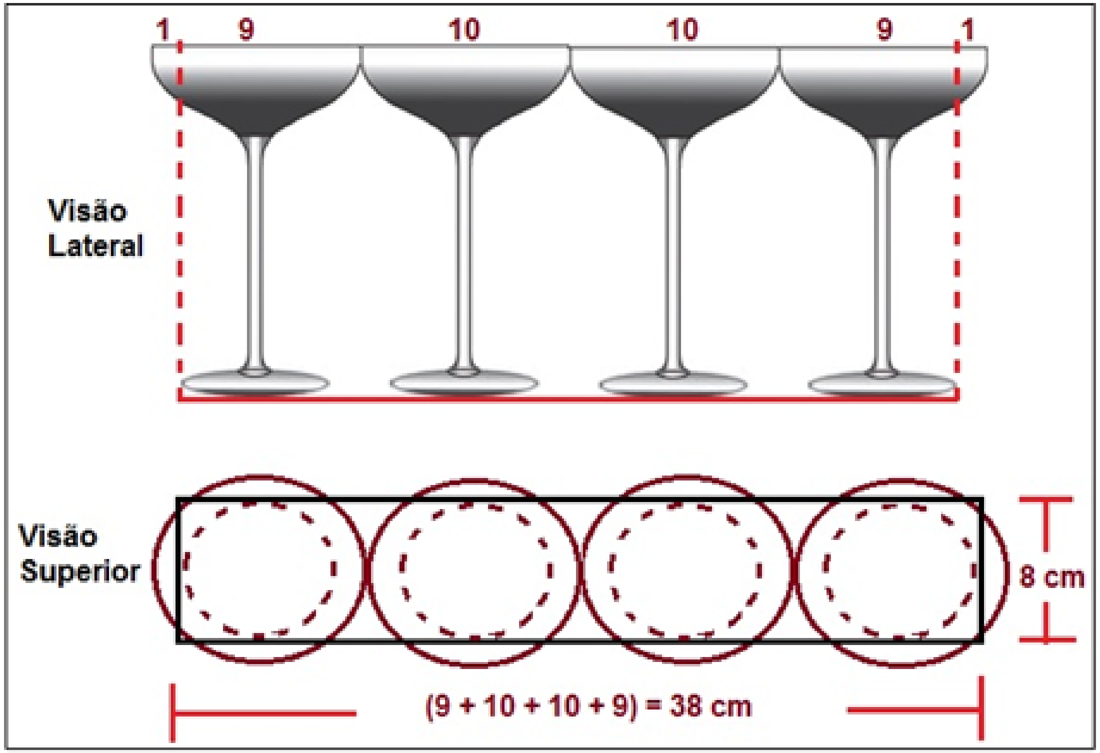
e) 

Solução. Após a submersão, o cubo ficou com duas faces opostas com cor única. Além disso, as metades adjacentes a estas faces opostas possuem suas cores.

As figuras (b) e (c) possuem as faces opostas com cores diferentes, mas somente a (c) apresenta a condição de adjacências com mesma cor.

20ª Questão

(ENEM) Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a:

a) 192 b) 300 c) 304 d) 320 e) 400

Solução. A bandeja precisa apoiar as bases das taças, mas observando que as bordas superiores, maiores precisam de mais espaço. Nas extremidades da bandeja, as bordas superiores não necessitam estar totalmente no interior da bandeja. Assim, admitindo essas condições, a bande já deverá ter no mínimo as dimensões de 38 cm x 8 cm. Logo, área mínima de 304cm².

21ª Questão

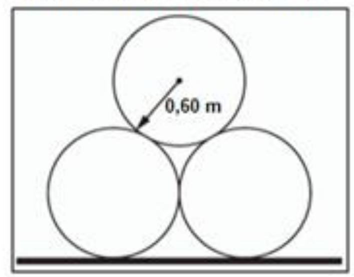
(ENEM) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte da Pedra, na capital. Esse veículo vinha e São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em 21 de maio 2012, Adaptado.

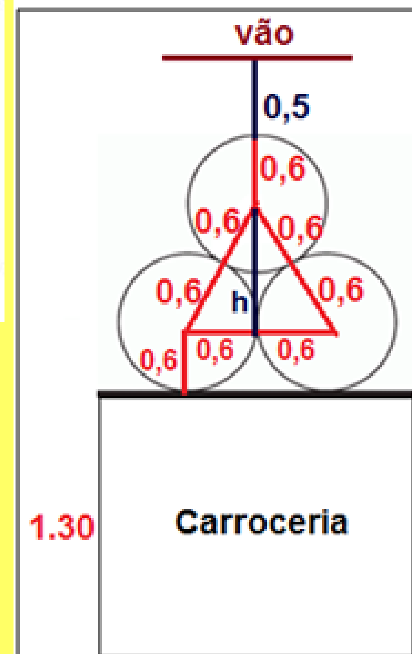
Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos. A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto, Considere 1,7 como aproximação para a raiz de 3.



Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) 2,82 b) 3,52 c) 3,70 d) 4,02 e) 4,20

Solução. De acordo com a condição temos a representação da figura. A medida h é a altura do triângulo equilátero indicado. A altura mínima do túnel será a soma de todas as medidas verticais indicadas. Temos:



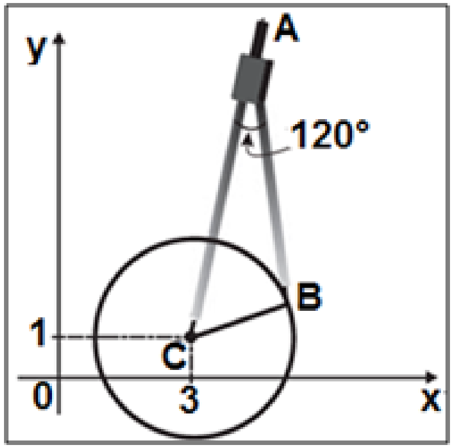
$$i)\ h=\frac{L\sqrt{3}}{2}=\frac{(1,2).(1,7)}{2}=(0,6).(1,7)=1,02$$

$$ii)\ Altura\,(caminhão + carga + espaço)=1,3+0,6+1,02+0,6+0,5=4,02\ m$$

22ª Questão

(ENEM) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.

Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.



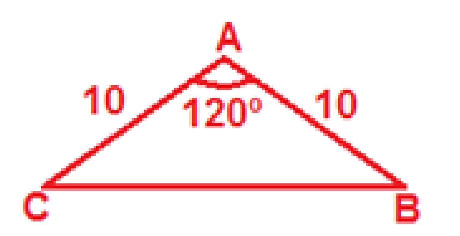
Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

a) I b) II c) III d) IV e) V

Solução. O raio CB pode ser calculado utilizando a lei dos cossenos no triângulo indicado.

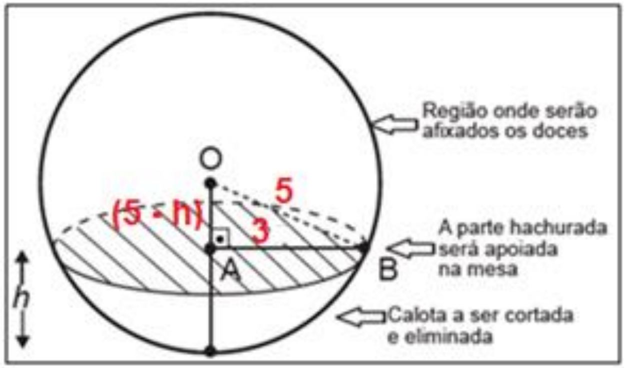
$$\overline{CB}^2 = 100 + 100 - 2.(10).(10).\cos 120° \Rightarrow \overline{CB}^2 = 200 + 200\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{300} \Rightarrow \overline{CB} = 10.(1,7) = 17\ cm.$$



Este valor está entre 15 e 21.

23ª Questão

(ENEM) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio **r** da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura **h**, em centímetros, igual a:

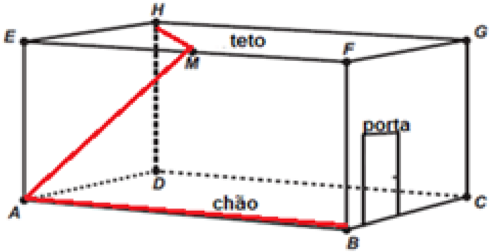
a) $5-\frac{\sqrt{91}}{2}$ b) $10-\sqrt{91}$ c) 1 d) 4 e) 5

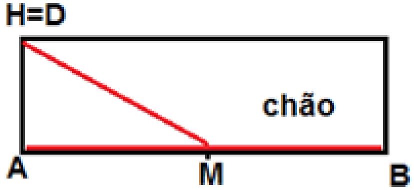
Solução. Aplicando a relação de Pitágoras, temos:

$$25=(5-h)^2+3^2 \Rightarrow (5-h)^2=25-9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (5-h)^2=16 \Rightarrow |5-h|=4 \Rightarrow 5-h=4 \Rightarrow h=5-4=1\ cm$$

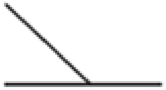
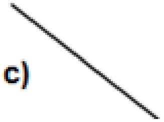
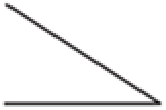
24ª Questão

(ENEM) Uma lagartixa está no interior de um quarto de começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.





A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos. A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a) b)  c)  d)  e) 

Solução. Os pontos A, B e M pertencem mesmo plano. A projeção está representada na letra (b).

25ª Questão

(ENEM) Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas de cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler **V – A + F = 2**, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces, respectivamente.
Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual a relação entre o número de vértices e o número de faces?

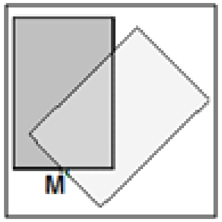
a) 2V – 4F = 4 b) 2V – 2F = 4 c) 2V – F = 4 d) 2V + F = 4 e) 2V + 5F = 4

Solução. Como todas as faces são triangulares, temos:

$$\begin{cases} i)\ A = \dfrac{3.F}{2} \\ ii)\ V - A + F = 2 \end{cases} \Rightarrow V - \frac{3.F}{2} + F = 2 \Rightarrow 2V - 3F + 2F = 4 \Rightarrow 2V - F = 4.$$

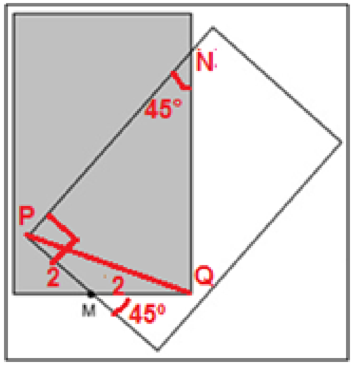
26ª Questão

(UFV) Duas placas metálicas, medindo 4 cm de largura e 6 cm de comprimento, estão sobrepostas e fixadas no ponto médio M. Com um giro de 45º em uma das placas, obtém-se uma região poligonal comum às duas placas, conforme ilustra a figura. A área dessa região poligonal, em cm², é:



a) $1 + 4\sqrt{2}$ b) $2 + 4\sqrt{2}$ c) $3 + 4\sqrt{2}$ d) $4 + 4\sqrt{2}$ e) $5 + 4\sqrt{2}$

Solução. O ângulo PMQ mede 135°. No triângulo PMQ, temos a área:



$$Área(PMQ) = \frac{(2).(2).sen135°}{2} = \frac{4\left(\sqrt{2}/2\right)}{2} = \sqrt{2}.$$

Lei dos cossenos em MPQ:

$$\begin{cases} \overline{PQ}^2 = 2^2 + 2^2 - 2.(2).(2).\cos 135° \\ \overline{PQ}^2 = 8 - 8.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 + 4\sqrt{2} \end{cases}.$$

Lei dos cossenos em NPQ:

$$\begin{cases} \overline{PQ}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{NQ}^2 - 2.\overline{NP}.\overline{NQ}.\cos 45° \to \left(\overline{NP} = \overline{NQ}\right) \\ 8 + 4\sqrt{2} = 2.\overline{NP}^2 - 2.\overline{NP}^2.\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 8 + 4\sqrt{2} = 2.\overline{NP}^2 - \sqrt{2}.\overline{NP}^2 \\ \overline{NP}^2\left(2 - \sqrt{2}\right) = 8 + 4\sqrt{2} \\ \overline{NP}^2 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\left(8 + 4\sqrt{2}\right)\left(2 + \sqrt{2}\right)}{4 - 2} = \frac{16 + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8}{2} = \frac{24 + 16\sqrt{2}}{2} = 12 + 8\sqrt{2} \end{cases}.$$

Calculando a área do triângulo isósceles NPQ, temos:

$$Área(NPQ) = \frac{\left(\overline{NP}\right)\left(\overline{NP}\right)sen45°}{2} = \frac{\left(12 + 8\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{6\sqrt{2} + 8}{2} = 3\sqrt{2} + 4.$$

Logo, a área da região PMQN é: $\boxed{\left(3\sqrt{2} + 4\right) + \sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2}}$.