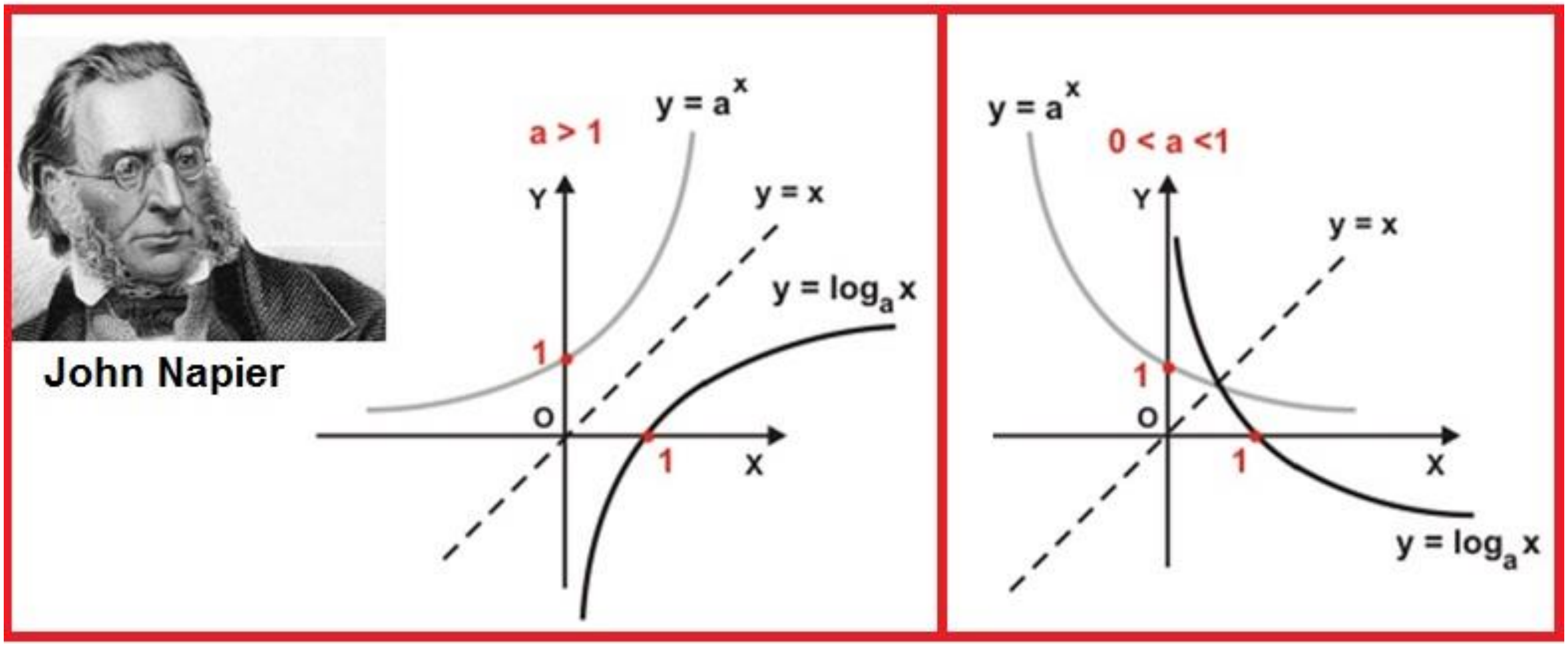
UERJ 2018

ENEM 2018

PISM 2018

Função Exponencial e Função Logarítmica - 11/8/2018



Prof. Walter Tadeu
www.professorwaltertadeu.mat.br

Potências e Logaritmos

Propriedades $n, m, k \in \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}^+$ $a, b \in \mathbb{R}^+$ $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

potências de expoente real

- $a^0 = 1$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

logaritmos $\boxed{a \neq 1}$ $\boxed{b \neq 1}$

$\boxed{a^{\log_a x} = x}$ $\boxed{\log_a a^k = k}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a x^k = k \log_a x$
- $\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_b a \times \log_a b = 1$
- $\log_a x = \log_{a^p} x^p$

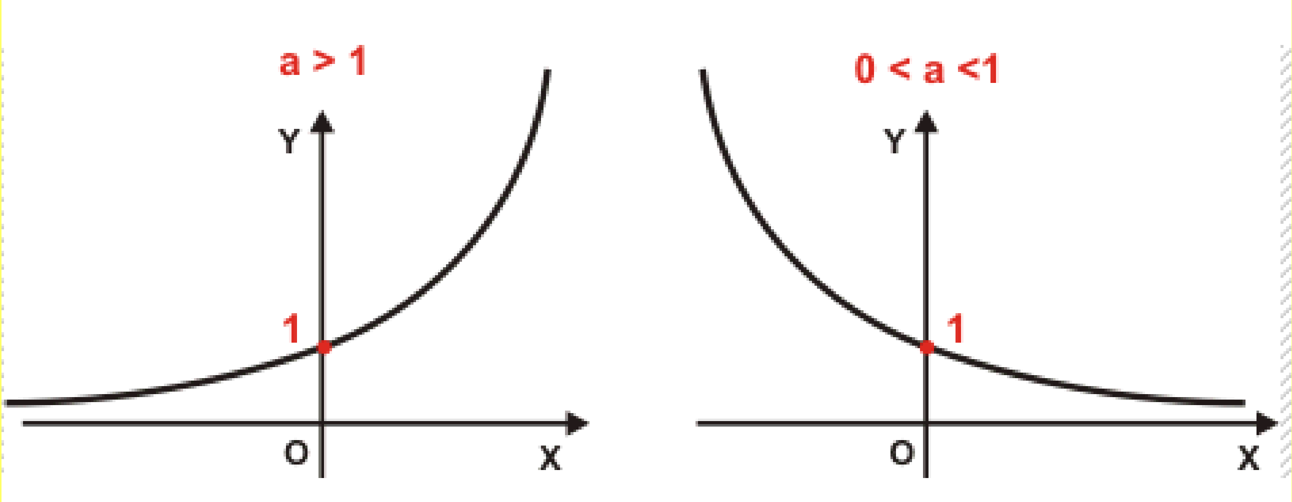
Função Exponencial

Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a, uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Em símbolos: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto a^x$$

As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição anteriormente exposta, são necessárias, pois na medida em que $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x e, logo não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$, assim como também não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$ para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Em outro caso, se $a = 1$ e x qualquer número real, então $a^x = 1$, o que indicaria função constante.



Propriedades:

(1) $a^x.a^y = a^{x+y}$

(2) $a^1 = a$

(3) se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente.

(4) se $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é decrescente.

(5) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

(6) A função exponencial é injetiva.

(7) A função exponencial é contínua.

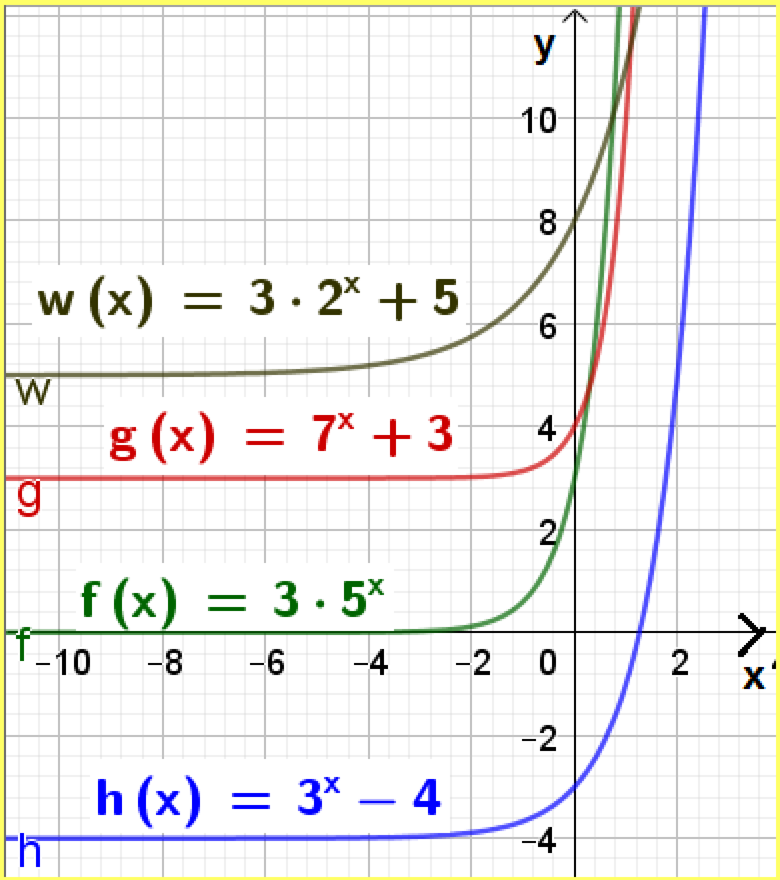
(8) A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$, é sobrejetiva.

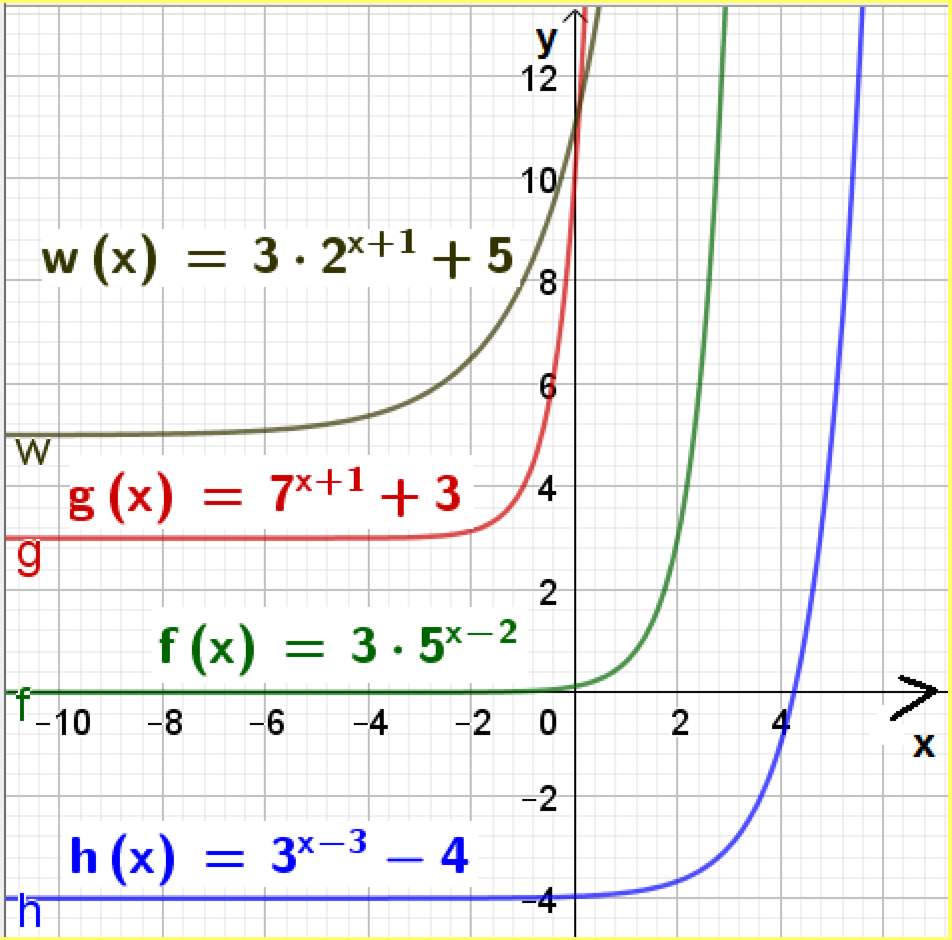
(9) A função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa.

Para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x+y) = f(x)\,.\,f(y)$.

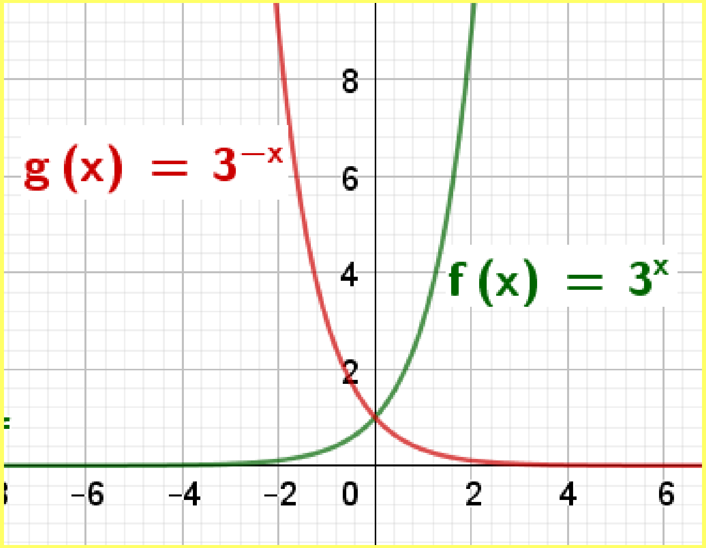
Funções do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$

Os mesmos conceitos aplicados nas funções do tipo $f(x) = a^x$, também são aplicados em funções do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$, como por exemplo em $f(x) = 3 \cdot 5^x$, $f(x) = 7^x + 3$, $f(x) = 3^x - 4$, $f(x) = 3 \cdot 2^x + 5$ e etc. Alterando os valores de a, b e c, veremos que a representação gráfica da função sofrerá algumas variações como translações horizontal e vertical.

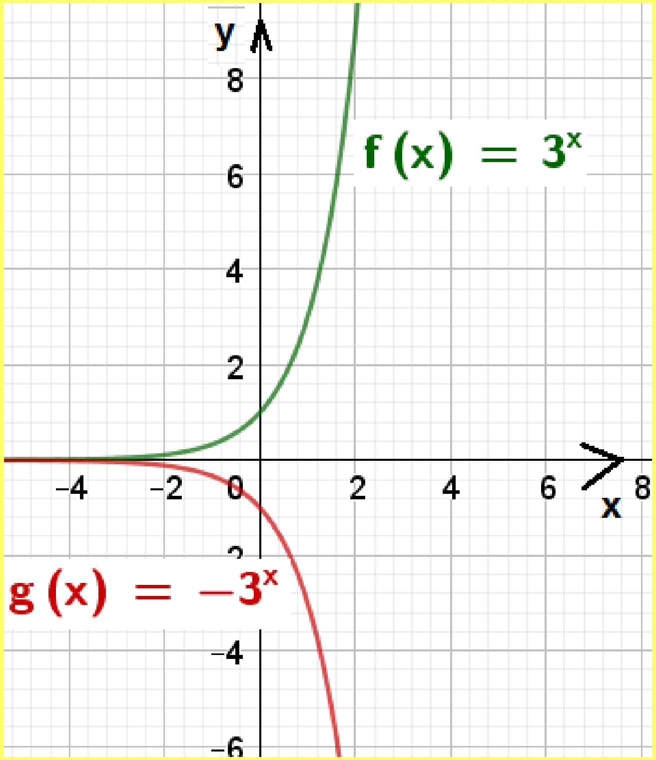




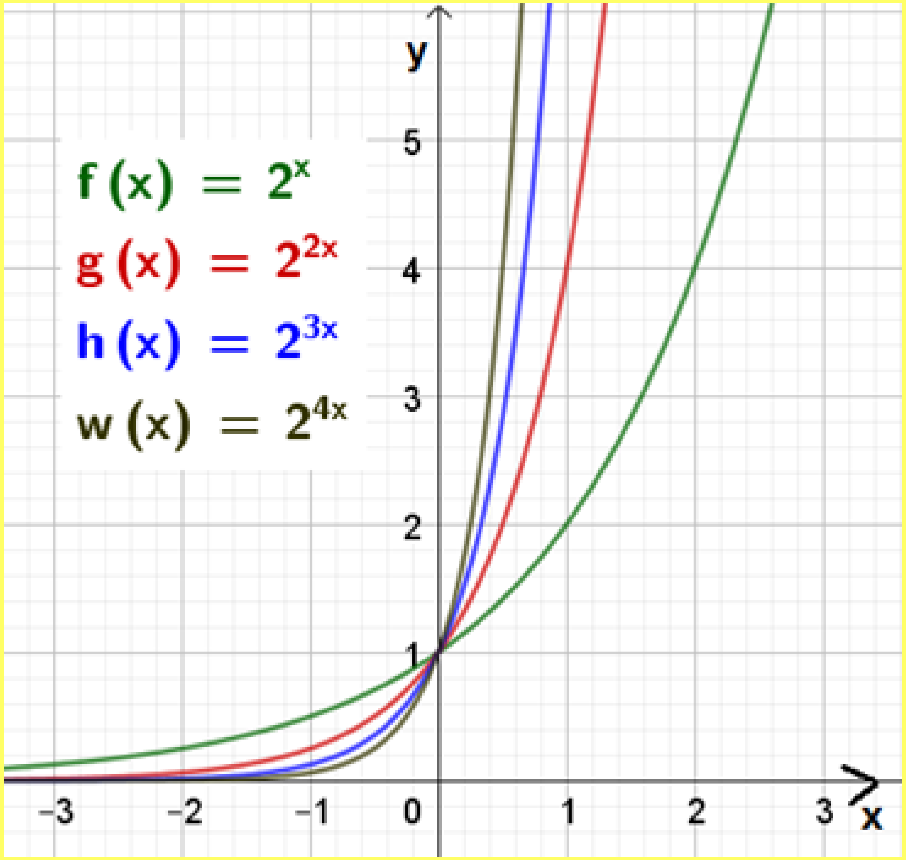
- Reflexão em relação ao eixo Oy

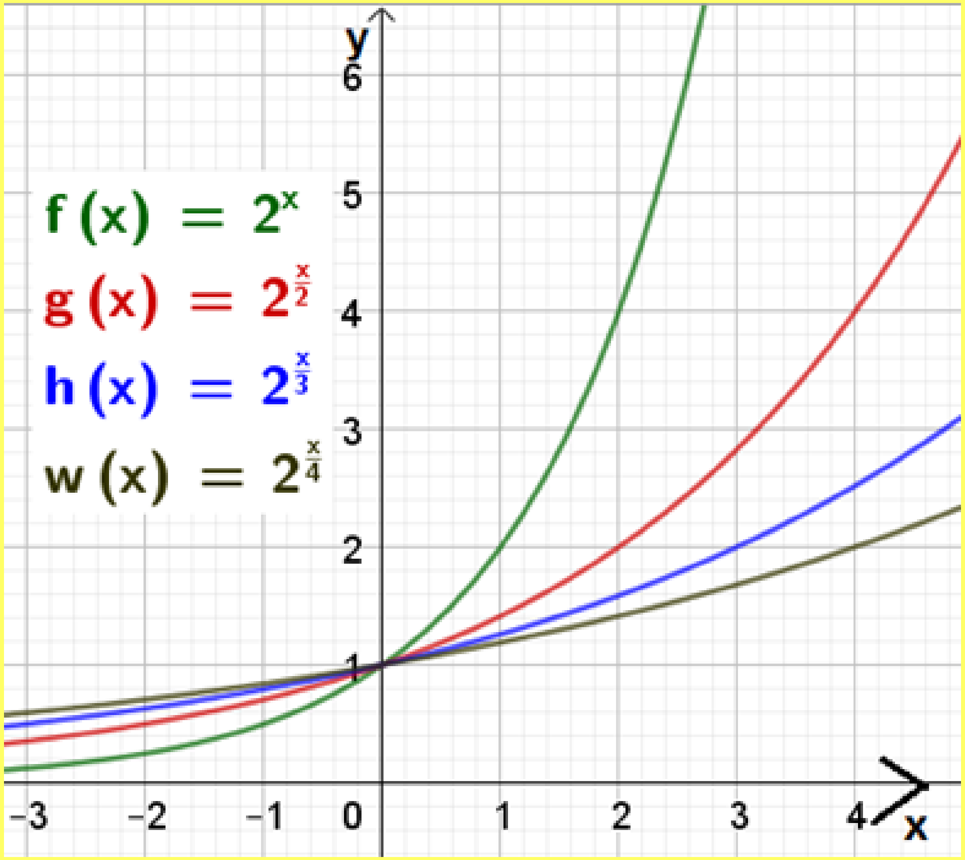


- Reflexão em relação ao eixo Ox



Deformações





O número irracional e

Vamos considerar a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Quando n aumenta indefinidamente, a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende muito lentamente para o número irracional $e = 2,7182818284...$, conhecido como número de Euler, número exponencial, número de Napier, número neperiano, que são algumas variantes de seu nome.

Imagine que um banco pague juros de 100% ao ano. Eu não falei que era uma situação hipotética? Mesmo assim, vamos fazer de conta que existe um banco com essa maravilhosa generosidade.

Após um ano, teríamos o montante de R$ 2,00 para cada R$ 1,00 aplicado.

E se, com uma generosidade inexplicável, os juros fossem creditados semestralmente, ao final de um ano teríamos R$ 2,25. Um sonho!

A expressão para esse cálculo é a seguinte:

$(1 + 1/n)^n = (1 + 1/2)^2 = 2,25$

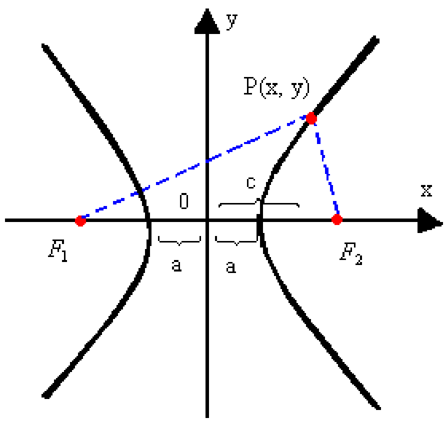
Para o crédito ser trimestral, temos n = 4 e o resultado é 2,44141.

Vejamos alguns resultados para diversos valores de n na tabela.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

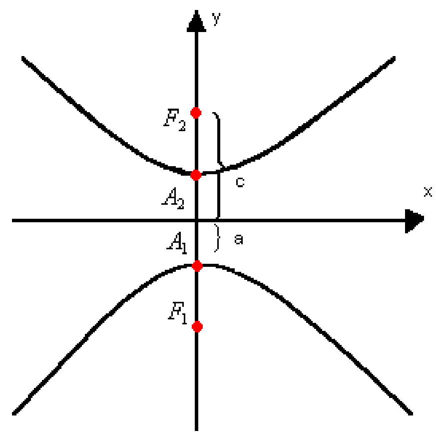
Hipérbole

hipérbole com centro na origem e focos no eixo Ox



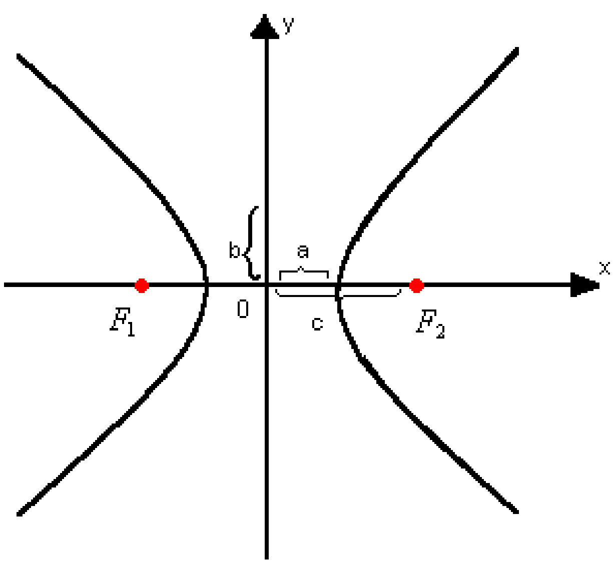
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy



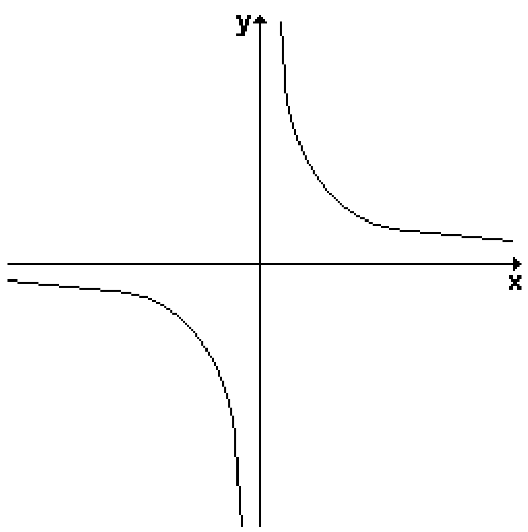
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

hipérbole equilátera



a = b

hipérbole equilátera tipo x.y = k



Hipérbole no ENEM

QUESTÃO 156

O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade v de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação $(p + a)(v + b) = K$, com a, b e K constantes.

Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

Tipo de curva
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal
Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas $(p\ ;\ v)$. Admita que $K > 0$.

Disponível em: http://rspb.royalsocietypublishing.org. Acesso em: 14 jul. 2015 (adaptado).

O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

- **A** semirreta oblíqua.
- **B** semirreta horizontal.
- **C** ramo de parábola.
- **D** arco de circunferência.
- **E** ramo de hipérbole.

Solução.

$(p+a).(v+b)=k \Rightarrow \quad v(p) = \dfrac{k}{p+a} - b$

Onde a, b e k são constantes. Temos uma associação com as grandezas inversamente proporcionais y.x=k

Logo seu gráfico será dado por um ramo de hipérbole.

O LOGARITMO NATURAL COMO UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

I

Formalmente, seja $H = \{(x, 1/x);\ x > 0\}$ o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$. Notemos que H é o gráfico da função $h: IR^+ \to IR, h(x) = 1/x$.

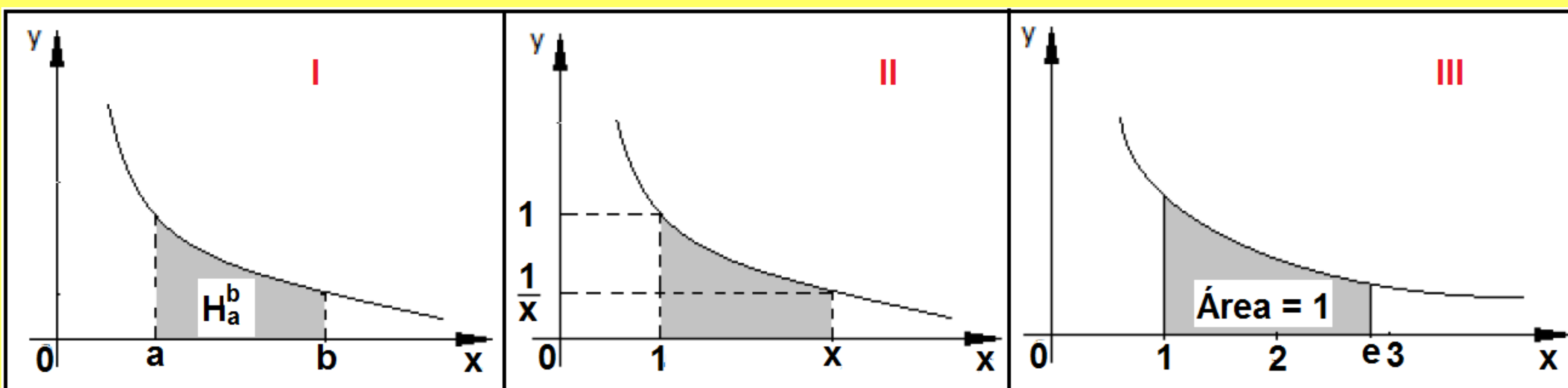
Dados $a, b \in IR^+$, a região plana H_a^b formada pelo conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$, é conhecida como uma faixa de hipérbole. Observemos que H_a^b representa o conjunto do plano limitado pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e por H.

II

Seja x um número real positivo. Define-se o logaritmo de x na base e como logaritmo natural de x, denotado por lnx e representado como a área da faixa de hipérbole H_1^x. Assim, por definição, quando $x > 0$, temos: $lnx = Área(H_1^x)$

III

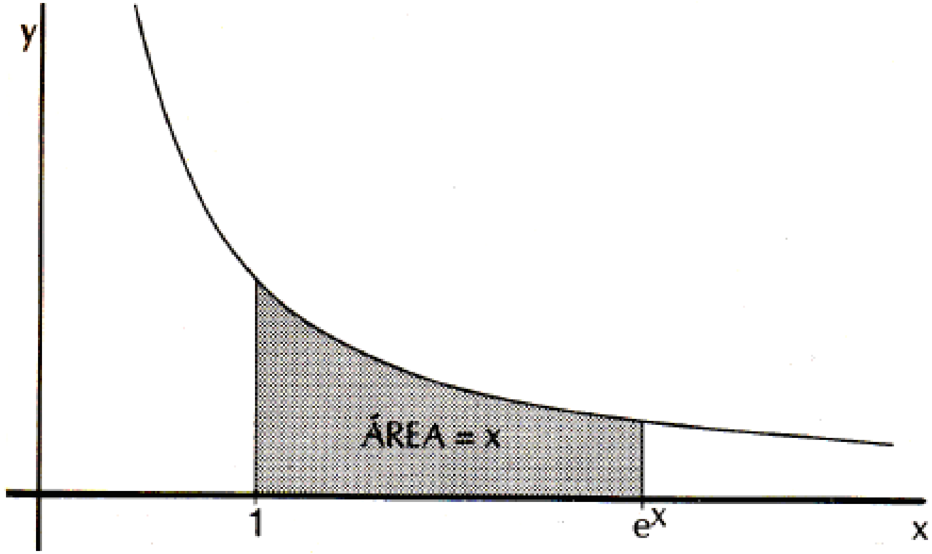
Em particular, quando $x = e$, teremos a faixa H_1^e: $\log_e e = lne = 1$,



A Função Exponencial $y = e^x$

Dado o número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

O Teorema 6 garante a unicidade e existência de e^x. Geometricamente, $y = e^x$ é a abcissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole H_1^y tenha área x.



Vê-se que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1$ quando $x > 0$ e que $e^x < 1$ quando $x < 0$.

$$\boxed{y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y}$$

A função $x \to e^x$ é definida para todos os reais, ou seja, seu domínio contém todos os números reais e é a função inversa da função logaritmo natural. isto quer dizer que valem as igualdades para todo $y > 0$ e para todo x real:

$$\boxed{\ln(e^x) = x; \quad e^{\ln y} = y}$$

Função Logarítmica

Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), chamamos função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $log_a x$, chamado logaritmo de x na base a.

Em símbolos:

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto log_a x$$

Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, temos: $a^{log_a x} = x$ para todo $x > 0$ e $log_a(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x, ou seja, $y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Assim, temos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, tem a propriedade $f(x + y) = f(x).f(y)$, ou seja, $a^{x+y} = a^x.a^y$ (logo, transforma soma em produto). A sua inversa $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = log_a x$, tem a propriedade $g(x.y) = g(x) + g(y)$, ou seja, $log_a(x.y) = log_a x + log_a y$ (logo, transforma produto em soma).

Propriedades:

(1) a função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

(2) somente números positivos possuem logaritmo real.

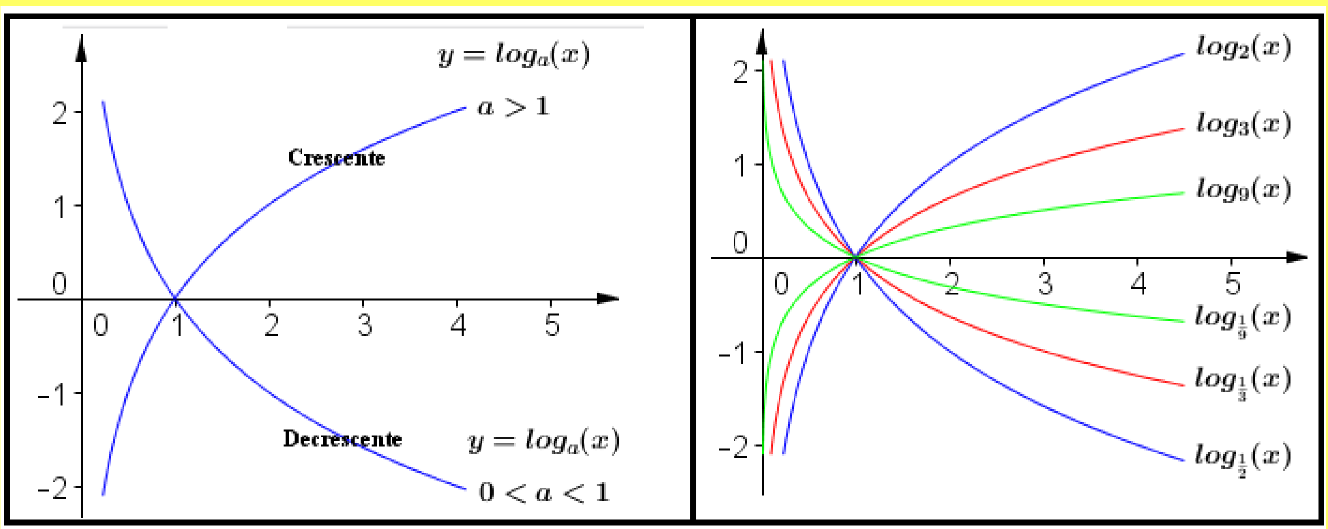
(3) se $a > 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo.

(4) se $0 < a < 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo.

(5) a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente.

(6) ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente.

(7) a função logarítmica é bijetiva.



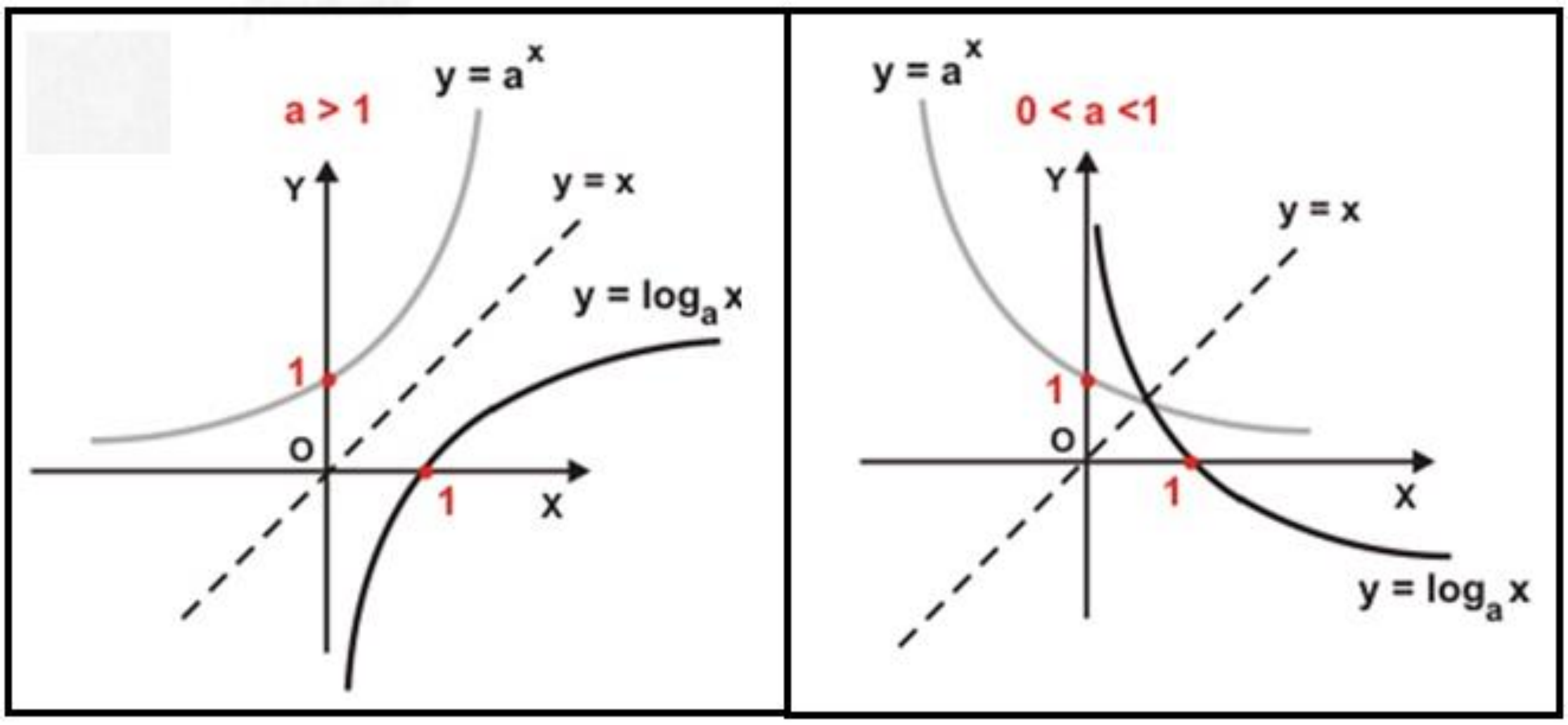
Com relação ao gráfico cartesiano da função logarítmica $f(x) = log_a x$, podemos dizer que:

1°) está todo à direita do eixo y $(x > 0)$;

2°) corta o eixo x no ponto de abscissa 1 $(log_a 1 = 0 \ \ para \ \ todo \ \ 0 < a \neq 1)$;

3°) se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente;

4°) é simétrico em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função $g(x) = a^x$.



Relação entre Exponenciais, Logaritmos e Progressões

Historicamente, os logaritmos – aqui já apresentados e descritos como o inverso de uma expressão exponencial – têm sua descoberta associada às descobertas das progressões aritméticas e geométricas, a qual se atribui ao matemático alemão Michael Stifel (1486 - 1567), muito embora se deva considerar que foi o escocês John Napier (1550 - 1617), matemático, físico e astrônomo, quem contribuiu para o avanço da matemática ao descobrir o uso dos logaritmos e suas propriedades.

Stifel, em 1544, escreveu o livro intitulado Arithmetica Integra (Aritmética Renovada) no qual observou que os termos de uma progressão geométrica de razão q, dada por $(q^0, q^1, q^2, \dots)$ correspondiam aos termos de uma progressão aritmética de razão 1 $(0, 1, 2, \dots)$, formada pelos expoentes, de tal maneira que a multiplicação de dois termos da progressão geométrica resultava em um termo cujo expoente representava a soma dos dois números correspondentes na progressão aritmética.

$\boxed{5 + 9 = 14}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

$\boxed{32 \times 512 = 16\ 384}$

Teorema 1

Se a sequência a_n é uma progressão aritmética, então a sequência $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica, onde <u>e</u> denota o número de Euler.

Demonstração. Sendo <u>r</u> a razão da progressão aritmética, basta notar que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}}.e^{-a_n} = e^{a_{n+1}-a_n} = e^r.$$

Como o quociente entre um termo qualquer da sequência (b_n) e o seu antecessor é a constante e^r, segue por definição que (b_n) é uma progressão geométrica.

Teorema 2

Se a sequência a_n é uma progressão geométrica, então a sequência $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

Demonstração. Sendo <u>q</u> a razão da progressão geométrica, basta notar que:

$$b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q.$$

Como a diferença entre um termo qualquer da sequência (b_n) e o seu antecessor é a constante $\log(q)$, segue por definição que (b_n) é uma progressão aritmética.

Caracterização da relação entre Funções Exponenciais e Progressões

Comparando as definições

i) Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se **função exponencial** da base a a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) Uma **progressão geométrica** (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada razão da PG. Conforme termo geral: $a_n = a_0.q^n$, com $n \in \mathbb{N}$ (com o primeiro termo sendo a_0).

As funções exponenciais do tipo $f(x) = b.a^x$ assemelham-se a uma progressão geométrica. Note que em $f(x) = b.a^x$ e $a_n = a_0.q^n$ temos que: $f(x) = a_n$; $b = a_0$; $a = q$; $x = n$.

Entretanto, deve-se atentar para o domínio das relações com que trabalhamos.

-Na função exponencial, o termo geral vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

-Na progressão geométrica, o termo geral vale para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que estamos considerando uma PG cujo primeiro termo é a_0.

Aplicações dos Logaritmos

pH

O termo pH foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. A letra "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e a letra "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).

pH é a sigla para potencial hidrogeniônico. pH é o negativo do $\log$ de base 10 da concentração molar de íons hidrogênio (H+)

$$\boxed{pH = -\log[H+]}$$

(UERJ) A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta pH = 2,3. Considerando log 2 = 0,3 calcule a concentração de íons hidrogênio nessa amostra, em mol.L^{-1}.

Solução. Aplicando a definição, temos:

$$\begin{cases} pH = 2,3 \Rightarrow \log\left(\dfrac{1}{H^+}\right) = 2,3 \Rightarrow \dfrac{1}{H^+} = 10^{2,3} \Rightarrow \dfrac{1}{H^+} = 10^{2+0,3} \\ \log 2 = 0,3 \Rightarrow 2 = 10^{0,3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{H^+} = 10^2 . 10^{0,3} = (100).(2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{H^+} = 200 \Rightarrow H^+ = \frac{1}{200} \Rightarrow H^+ = 0,005$$

Meia Vida

A meia-vida é a quantidade de tempo característica de um decaimento exponencial. Se a quantidade que decai possui um valor no início do processo, na meia-vida a quantidade terá metade deste valor.

A equação que gera a desintegração radioativa de uma substância é dada por

$$\boxed{M = M_0 \cdot e^{-\lambda t}}$$

M é a massa da substância

M_0 é a massa da substância no início

λ é uma constante chamada constante de desintegração

t o tempo em anos.

Uma determinada substância se desintegra a uma taxa de 2% ao ano. A massa da substância estará reduzida à metade em quantos anos?

Dado: $ln2 = 0,69$ onde $\ln x$ é o logaritmo na base natural. Queremos calcular t para o qual $M = \dfrac{M_0}{2}$

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-0,02t} \Rightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -0,02t \cdot \ln e = (-1) \cdot \ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,02t = -0,69 \Rightarrow \boxed{t = 34,5}$$

Os Terremotos e a Escala Richter

A partir da quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. Trata-se de uma escala logarítmica de base 10.

A magnitude (graus) de Richter é uma medida quantitativa do 'tamanho' de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e também com a energia liberada. De acordo com o grau de magnitude registrado, um terremoto pode acarretar as seguintes consequências:

Magnitude (graus)	**Possíveis efeitos**
menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, mas são registrados por equipamentos apropriados.
3,0 a 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Pode derrubar objetos da mobília e trincar paredes.
6,0 a 8,9	Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.
9,0 ou maior	Tremores muito fortes, causa a destruição quase que total.

A energia liberada em um abalo sísmico é um fiel indicador do poder destrutivo de um terremoto. A relação entre a magnitude M (graus) de Richter e a energia liberada E é dada por $M = \frac{2}{3}.log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, ou ainda por $E = E_0.10^{\frac{3M}{2}}$. Sendo uma escala logarítmica de base 10, à medida que a magnitude aumenta, a amplitude fica 10 vezes maior. Como exemplo, um terremoto com magnitude 6 tem uma amplitude 10 vezes maior que um terremoto de magnitude 5.

(ENEM)

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E1 e E2?

a) $E_1 = E_2 + 2$ **b)** $E_1 = 10^2 \cdot E_2$ **c)** $E_1 = 10^3 \cdot E_2$ **d)** $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$ **e)** $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

Solução. Relacionando as energias, temos:

$$i)\begin{cases} Japão: \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E_1}{E_0}\right) = 9 \Rightarrow \log\left(\dfrac{E_1}{E_0}\right) = 9.\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{E_1}{E_0} = 10^{\frac{27}{2}} \Rightarrow E_1 = E_0.10^{\frac{27}{2}} \\ China: \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E_2}{E_0}\right) = 7 \Rightarrow \log\left(\dfrac{E_2}{E_0}\right) = 7.\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{E_2}{E_0} = 10^{\frac{21}{2}} \Rightarrow E_2 = E_0.10^{\frac{21}{2}} \end{cases}$$

$$ii)\ \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0.10^{\frac{27}{2}}}{E_0.10^{\frac{21}{2}}} = 10^{\frac{27}{2}}.E_0.10^{-\frac{21}{2}} = 10^{\frac{6}{2}} \Rightarrow E_1 = 10^3.E_2$$

Matemática Financeira

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos.

Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

Resolução: No caso de tempo e juros compostos,o uso de logaritmo é fundamental.

Fórmula para o cálculo: $M = C \cdot (1+i)^t$. De acordo com a situação problema, temos:

M (montante) = 3500 C (capital) = 500 i (taxa) = 3,5% = 0,035 t = ?

$$M = C \cdot (1+i)^t \Rightarrow 3500 = 500 \cdot (1+0,035)^t \Rightarrow \frac{3500}{500} = 1,035^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,035^t = 7 \Rightarrow \log 1,035^t = \log 7 \Rightarrow t \cdot 0,0149 = 0,8451 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{0,8451}{0,0149} \Rightarrow t = 56,7$$

O montante de R$ 3 500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

Obs: Há outras aplicações das exponenciais e dos logaritmos no cotidiano que não foram mostradas.

1ª Questão

(ENEM) As populações de duas cidades, M e N, são dadas em milhares de habitantes pelas funções:

$$M(t) = \log_8 (1+t)^6 \qquad N(t) = \log_2 (4t+4)$$

A variável **t** representa o tempo em anos. Após certo instante **t** a população de uma dessas cidades é sempre maior do que a da outra. O valor mínimo desse instante **t** é:

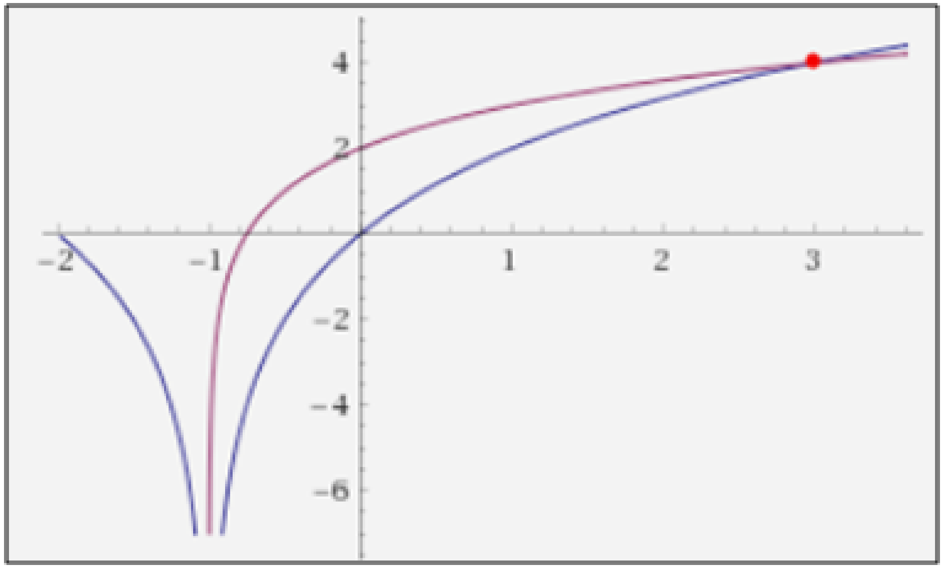
a) −1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4

Solução. Encontrando o instante da igualdade, temos:

$$i)\ M(t) = N(t) \Rightarrow \log_8 (1+t)^6 = \log_2 (4t+4) \Rightarrow \log_{2^3} (1+t)^6 = \log_2 (4t+4) \Rightarrow \frac{1}{3}.\log_2 (1+t)^6 = \log_2 (4t+4) \Rightarrow$$

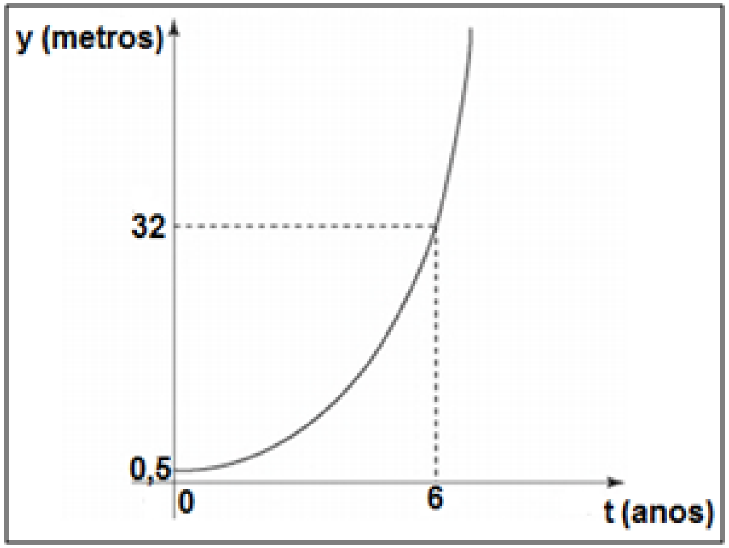
$$\Rightarrow \log_2 \left[(1+t)^6\right]^{\frac{1}{3}} = \log_2 (4t+4) \Rightarrow \log_2 (1+t)^2 = \log_2 (4t+4) \Rightarrow (1+t)^2 = (4t+4)$$

$$ii)\ 1+2t+t^2 = 4t+4 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3).(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \rightarrow Mínimo \\ t = -1 < 0 \notin IN \end{cases}$$



2ª Questão

(ENEM) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em anos, é igual a:

a) 3. b) 4. c) 6. d) $\log_2 7$. e) $\log_2 15$.

Solução. De acordo com o gráfico, temos que f(0) = 0,5 m e f(6) = 32 m. O tempo procurado indica que a altura na época do corte será de 8m. Temos:

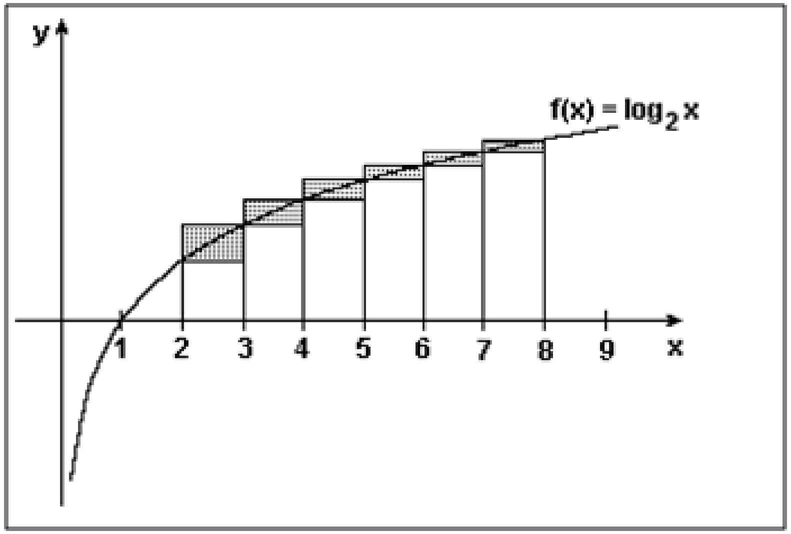
$$i)\ y(t) = a^{t-1} \Rightarrow 0{,}5 = a^{0-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{5}{10} \Rightarrow a = 2$$

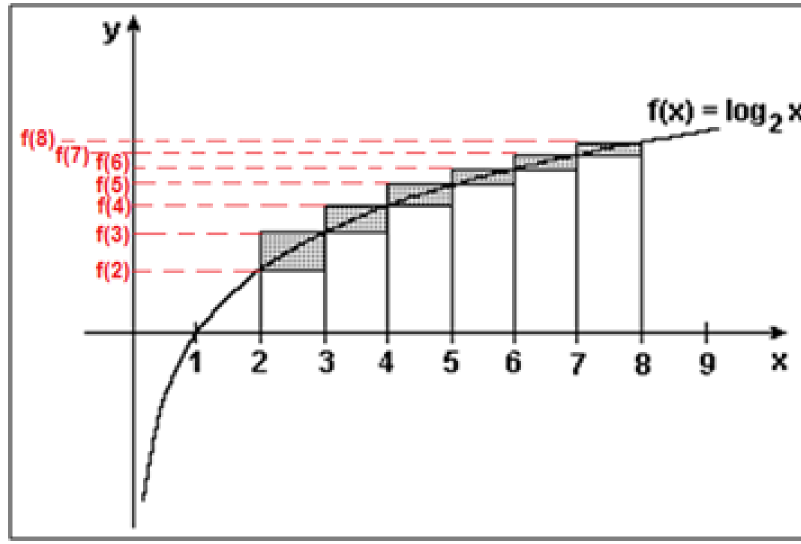
$$ii)\ 8 = 2^{t-1} \Rightarrow 2^3 = 2^{t-1} \Rightarrow t-1 = 3 \Rightarrow t = 4\ anos$$

.

3ª Questão

(ENEM) Na figura a seguir estão representados seis retângulos com lados paralelos aos eixos coordenados e vértices opostos sobre o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$.





A soma das áreas dos seis retângulos é igual a:

a) 2 unidades de área
b) 3 unidades de área
c) 4 unidades de área
d) 5 unidades de área
e) 6 unidades de área

Solução. Repare que todos os retângulos possuem base medindo 1 unidade e alturas iguais às diferenças entre os valores das imagens consecutivas, temos:

$$\acute{A}rea = (1).\{[f(3) - f(2)] + [f(4) - (3)] + [f(5) - (4)] + [f(6) - (5)] + [f(7) - (6)] + [f(8) - (7)]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \acute{A}rea = (1).\{[f(8) - f(2)]\} = \log_2 8 - \log_2 2 = \log_2 2^3 - \log_2 2 = 3.\log_2 2 - \log_2 2 = 3.(1) - 1 = 2$$

4ª Questão

(ENEM) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 minutos. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.
O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de:

a) 22 b) 50 c) 100 d) 200 e) 400

Solução. Identificando a situação como uma progressão geométrica e associando à função exponencial, temos:

$$i)\begin{cases} f(0)=3000 \\ f(1)=3000-(0{,}01).(3000)=3000.(0{,}99)^1 \\ f(2)=3000.(0{,}99)-(0{,}01).[3000.(0{,}99)]=3000.(0{,}99)^2 \\ \ldots \end{cases} \rightarrow f(t)=3000.(0{,}99)^t$$

$$ii)\ 3000.(0{,}99)^t=30 \Rightarrow (0{,}99)^t=0{,}01 \Rightarrow t=\frac{\log\left(\frac{1}{100}\right)}{\log\left(\frac{99}{100}\right)} \Rightarrow t=\frac{\log 1-\log 100}{\log 3^2+\log 11-\log 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{0-2}{2.(0{,}477)+1{,}041-2} \Rightarrow t=\frac{-2}{0{,}954-0{,}959} \Rightarrow t=\frac{-2}{-0{,}005} \Rightarrow t=400$$

Como os tempos são de 30 minutos, há 400 meias horas. Logo, são necessárias 200 horas.

5ª Questão

(ENEM) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ *400,00* mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do numero de prestações (n) segundo a fórmula:

$$\boxed{P = \frac{5\,000.1{,}013^n.0{,}013}{1{,}013^n - 1}}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log1,013; 2,602 como aproximação para log400; 2,525 como aproximação para log 335. De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é:

a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

Solução. Desenvolvendo a expressão e aplicando logaritmos, temos:

$$i)\ 400 \geq \frac{5000.1{,}013^n.0{,}013}{1{,}013^n - 1} \Rightarrow (400).1{,}013^n - 400 \geq 65.1{,}013^n \Rightarrow 335.1{,}013^n \geq 400 \Rightarrow 1{,}013^n \geq \frac{400}{335}$$

$$ii)\ \log 1{,}013^n \geq \log\frac{400}{335} \Rightarrow n.\log 1{,}03 \geq \log 400 - \log 335 \Rightarrow n \geq \frac{2{,}602 - 2{,}525}{0{,}005} \Rightarrow n \geq \frac{0{,}77}{0{,}005} \Rightarrow n \geq 15{,}4$$

Como n é um número natural, temos que o menor número de parcelas é 16.

6ª Questão

(ENEM) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população: $p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$, em que **t** é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será:

a) reduzida a um terço. b) reduzida à metade. c) reduzida a dois terços.
d) duplicada. e) triplicada.

Solução. Como 20 minutos correspondem à 1/3 de hora, temos:

$$\boxed{p\left(\frac{1}{3}h\right) = 40.2^{3.\left(\frac{1}{3}\right)} = 40.(2) = 80\ mil = dobro\ (inicial)}.$$

7ª Questão

(ENEM) Uma turma de uma escola central de Porto Alegre recebeu a seguinte questão em sua primeira prova no Ensino Médio: Um dos valores de **x** que soluciona a equação $\log_2(-x^2 + 32) = 4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Solução. Estabelecendo a condição de existência da solução e resolvendo, temos:

$$i) -x^2 + 32 > 0 \Rightarrow x^2 - 32 < 0 \Rightarrow -4\sqrt{2} < x < 4\sqrt{2}$$

$$ii) \log_2\left(-x^2 + 32\right) = 4 \Rightarrow -x^2 + 32 = 2^4 \Rightarrow -x^2 + 32 - 16 = 0 \Rightarrow -x^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Como o número de centros é positivo, esse valor é 4.

8ª Questão

(ENEM) Vamos considerar que certo veículo sofra uma desvalorização de 2% ao mês durante os dois primeiros anos, após a retirada da concessionária. Neste período, o valor **V** desse carro poderá, em função do tempo **t** (em meses), ser calculado por meio da seguinte relação matemática, considerando que V_o é o valor do carro zero:

a) $V(t) = V_o.0,98^t$ b) $V(t) = V_o.0,02^t$ c) $V(t) = V_o.1,98^t$ d) $V(t) = V_o.1,02^t$ e) $V(t) = V_o.2^t$

Solução. Identificando a situação como função exponencial, temos:

$$\begin{cases} V(0) = V_0 \\ V(1) = V_0 - (0,02)V_0 = V_0.(0,98)^1 \\ V(2) = V_0.(0,98) - (0,02)\left[V_0.(0,98)\right] = V_0.(0,98)^2 \\ \ldots \end{cases} \rightarrow V(t) = V_0.(0,98)^t.$$

9ª Questão

(ENEM) O número de bactérias numa certa cultura duplica a cada hora. Se, num determinado instante, a cultura tem mil bactérias, daí a quanto tempo, aproximadamente, a cultura terá um milhão de bactérias?

Aproximação importante: $\mathbf{2^{10} = 1024 \cong 1000}$. Utilizando logaritmos, considere: $\mathbf{\log_{10} 2 \cong 0,3}$.

a) 2 horas b) 3 horas c) 5 horas d) 10 horas e) 100 horas

Solução. Identificando a situação como uma função exponencial, temos:

$$\begin{cases} f(t) = 1000(2)^t \\ f(t) = 1000000 = 10^6 \end{cases} \Rightarrow 10^3.(2)^t = 10^6 \Rightarrow 2^t = 10^3 \Rightarrow 2^t = 2^{10} \Rightarrow t = 10.$$

10ª Questão

(ENEM) Também podemos afirmar que uma função logarítmica transforma, por exemplo, sequências que estão em progressão geométrica em sequências, na mesma ordem, em progressão aritmética. Considere a função logarítmica definida por **f(x) = log₁₀ x** e a progressão geométrica (200; 400; 800; 1600;...). Aplicando a função **f** a essa sequência, obtemos uma progressão aritmética de razão igual a:

a) 2 b) 10 c) $\log_2 10$ d) $\log_2 100$ e) $\log_{10} 2$

Solução. Identificando a variação dos valores, temos:

$$i)\ (\log_{10} 200, \log_{10} 400, \log_{10} 800, \ldots) = (\log_{10} 2 + \log 100, \log_{10} 2^2 + \log 100, \log_{10} 2^3 + \log 100, \ldots) =$$
$$= (\log_{10} 2 + \log 100, 2\log_{10} 2 + \log 100, 3\log_{10} 2 + \log 100, \ldots)$$
$$ii)\ razão : 2\log_{10} 2 + \log 100 - (\log_{10} 2 + \log 100) = \log_{10} 2$$

11ª Questão

(PISM) A diferença entre o maior e menor valor de **x**, na equação exponencial $25^{\left(\frac{x^2}{2}+4x-15\right)} = \frac{1}{125^{(-3x+6)}}$, é igual a:

a) 1 b) 7 c) 1/2 d) 7/2 e) – 3/2

Solução. Resolvendo a equação, temos:

$$i)\ 25^{\left(\frac{x^2}{2}+4x-15\right)} = \frac{1}{125^{(-3x+6)}} \Rightarrow (5^2)^{\left(\frac{x^2}{2}+4x-15\right)} = (5^{-3})^{(-3x+6)} \Rightarrow 5^{x^2+8x-30} = 5^{-9x-18} \Rightarrow x^2+8x-30 = 9x-18$$
$$ii)\ x^2 - x + 12 = 0 \Rightarrow (x+3).(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow Diferença : 4-(-3) = 7$$

12ª Questão

(PISM) Sejam **a**, **b**, **c** e **d** números reais positivos, tais que $\log_b a = 5$, $\log_b c = 2$ e $\log_b d = 3$. O valor da expressão $\log_c \frac{a^2.b^5}{d^3}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

Solução. Utilizando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$i)\ \log_c \frac{a^2.b^5}{d^3} = \log_c\left(a^2.b^5\right) - \log_c d^3 = 2.\log_c a + 5.\log_c b - 3.\log_c d$$

$$ii)\ Mudança\ (base): 2.\log_c a + 5.\log_c b - 3.\log_c d = 2.\left(\frac{\log_b a}{\log_b c}\right) + 5.\left(\frac{\log_b b}{\log_b c}\right) - 3.\left(\frac{\log_b d}{\log_b c}\right) =$$

$$= 2.\left(\frac{5}{2}\right) + 5.\left(\frac{1}{2}\right) - 3.\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{10+5-9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

13ª Questão

(FUVEST) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

a) $\frac{2}{p}$ b) $2p$ c) $2+p^2$ d) $2+2p$ e) $\frac{2+2p}{p}$

Solução. Utilizando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$i)\ 5^p = 2 \Rightarrow p = \log_5 2$$

$$ii)\ \log_2 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 2} = \frac{2\log_5 (2.5)}{\log_5 2} = \frac{2\log_5 2 + 2.\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{2.p + 2.(1)}{p} = \frac{2+2p}{p}$$

14ª Questão

(FUVEST) Biólogos afirmam que sob condições ideais, o número de bactérias numa cultura cresce exponencialmente. Suponha que existam inicialmente 2 000 bactérias em certa cultura e que existirão 6 000 após 20 minutos. Quantas bactérias existirão após 1 hora?

a) 30 600 b) 40 000 c) 48 800 d) 54 000 e) 60 000

Solução. Identificando a situação como função exponencial, temos: $f(t) = 2000.a^t$ **.**

$$i)\begin{cases} f(20) = 2\,000.a^{20} \\ f(20) = 6000 \end{cases} \Rightarrow 2000.a^{20} = 6000 \Rightarrow a^{20} = 3$$

$$ii)\ f(1h) = f(60) = 2\,000.a^{60k} = 2000.\left(a^{20}\right)^3 = 2000.[3]^3 = 2000.[27] = 54000$$

15ª Questão

(FUVEST) O rádio se deteriora exponencialmente. Sua meia-vida é de 1 690 anos. Quanto tempo levará, aproximadamente, para uma amostra de 50 g de rádio se reduzir a 5 g? (Utilize $\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} = 3{,}322$).

a) 4 345 anos b) 5 614 anos c) 6 320 anos d) 6 600 anos e) 6 632 anos

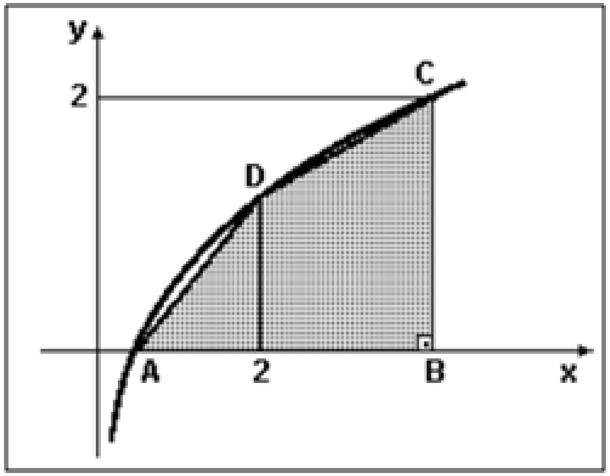
Solução. Utilizando o modelo exponencial, temos: $f(t) = M_0.e^{k.t}$ **, onde M_0 é a massa inicial, temos:**

$$i)\ \frac{M_0}{2} = M_0 e^{1690k} \Rightarrow e^{1690k} = 0{,}5 \Rightarrow \ln e^{1690k} = \ln 0{,}5 \Rightarrow 1690.k = \ln 0{,}5 \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{1690}$$

$$ii)\ 5 = 50.e^{\frac{\ln 0{,}5}{1690}t} \Rightarrow e^{\frac{\ln 0{,}5}{1690}t} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{\ln 0{,}5}{1690}.t = \ln 0{,}1 \Rightarrow t = 1690.\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}1} = 1690.(3{,}322) = 5614{,}18$$

16ª Questão

(PISM) Na figura a seguir, encontram-se representados o gráfico da função $f:]0,\infty[\rightarrow IR$, definida por $f(x)=\log_2 x$, e o polígono ABCD. Os pontos A, C e D estão sobre o gráfico de **f**. Os pontos A e B estão sobre o eixo das abscissas. O ponto C tem ordenada 2, o ponto D tem abscissa 2 e $\overline{BC}$ é perpendicular ao eixo das abscissas. Sabendo que os eixos estão graduados em centímetros, a área do polígono ABCD é:

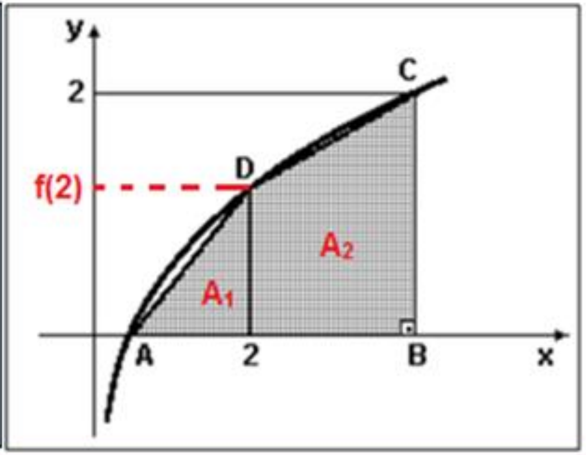


a) 2,5 cm² b) 3 cm² c) 3,5 cm² d) 4 cm² e) 4,5 cm²

Solução. A área do polígono será igual à soma das áreas A_1 e A_2. Encontrando os valores necessários, temos:

$$i)\begin{cases} A=(a,0)\Rightarrow \log_2 a=1\Rightarrow a=1\Rightarrow A=(1,0) \\ C=(b,2)\Rightarrow \log_2 b=2\Rightarrow b=2^2\Rightarrow C=(4,2)\Rightarrow B=(4,2) \\ f(2)=\log_2 2=1\Rightarrow D=(2,1) \end{cases}$$

$$ii)\begin{cases} A_1(triângulo)=\dfrac{(1).(1)}{2}=0,5 \\ A_2(trapézio)=\dfrac{(1+2).(2)}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow Área\,(polígono)=3+0,5=3,5\ cm^2$$



Fontes:

http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/marcelo_kropf.pdf. Acesso em: 22/Fev/2016.

Lima, E. L. (1998). *A Matemática do Ensino Médio* (3a Edição ed., Vol. 1). (S. B. Matemática, Ed.) Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil: Sociedade Brasileira de Matemática.

Lima, E. L. (1973). *Logaritmos.* Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Livro Tecnico S.A.