Ponto de Apoio

UERJ 2018 ENEM 2018 PISM 2018

Probabilidade - 7/7/2018

Ponto de Apoio

Prof. Walter Tadeu
www.professorwaltertadeu.mat.br

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Exame de sangue (tipo sangüíneo) .
   $\Omega = \{A, B, AB, O\}$

3. Hábito de fumar.
   Ω = {Fumante, Não fumante}

4. Tempo de duração de uma lâmpada.
   $\Omega = \{t: t \geq 0\}$

Eventos: subconjuntos do espaço amostral Ω

Notação: A, B, C ...

$\emptyset$ (conjunto vazio): *evento impossível*

Ω: *evento certo*

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B: sair face maior que 3 $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\Rightarrow C = \{1\} \subset \Omega$

Operações com eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

$A \cup B$: *união dos eventos A e B.*

Representa a ocorrência de <u>pelo menos um</u> dos eventos, A ou B.

$A \cap B$: *interseção dos eventos A e B*.

Representa a ocorrência <u>simultânea</u> dos eventos A e B.

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \varnothing$$

- A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

O complementar de A é representado por A^c.

Exemplo: **Lançamento de um dado**

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$

- **sair uma face par e maior que 3**

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

- **sair uma face par e face 1**

$$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$$

- **sair uma face par ou maior que 3**

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

- **sair uma face par ou face 1**

$$A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$$

- **não sair face par**

$$A^C = \{1, 3, 5\}$$

No **caso discreto**, todo experimento aleatório tem seu ***modelo probabilístico*** especificado quando estabelecemos:

•O *espaço amostral* $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$

•A *probabilidade P(w) para cada ponto amostral* de tal forma que:

$$0 \leq P(w_i) \leq 1 \quad e$$

$$P(\Omega) = P(\{w_1, w_2, \dots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(w_i) = 1.$$

Ainda no caso discreto,

- Se A é um evento, então $P(A) = \sum_{w_j \in A} P(w_j)$

- Se $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ e

  $P(w_i) = \frac{1}{N}$ (*pontos equiprováveis*), então

$$P(A) = \frac{\text{nº. de elementos de } A}{\text{nº. de elementos de } \Omega}$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Conseqüências:

- **Se A e B forem *eventos disjuntos*, então**
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- **Para qualquer evento A de Ω,**
  $$P(A) = 1 - P(A^c).$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por P(A | B) e definida por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0\,.$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a **regra do produto de probabilidades**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B).}$$

Analogamente, se P(A) >0,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)\,.}$$

Exemplo 1. Observando a tabela, qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado <u>sabendo-se</u> que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizada		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

temos P(S | M) = 39.577 / 48.249 = 0,82.

Pela definição,

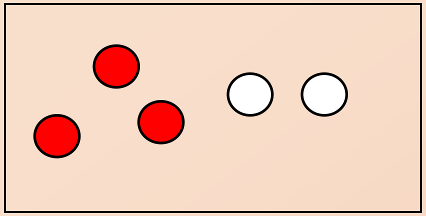
$$P(S \mid M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\dfrac{39.577}{101.850}}{\dfrac{48.249}{101.850}} = 0{,}82.$$

Exemplo 2: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.

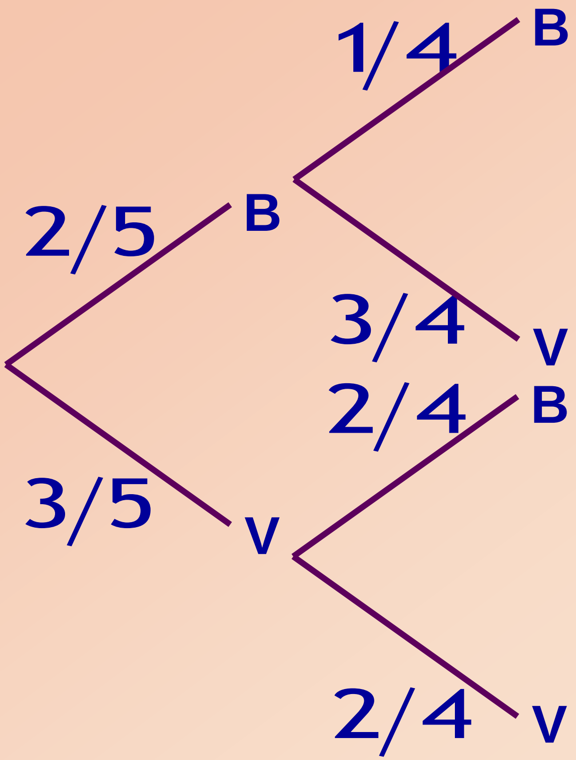
A: 2ª bola sorteada é branca

C: 1ª bola sorteada é branca

P(A) = ???



Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como ***diagrama de árvores*** ou ***árvore de probabilidades.***



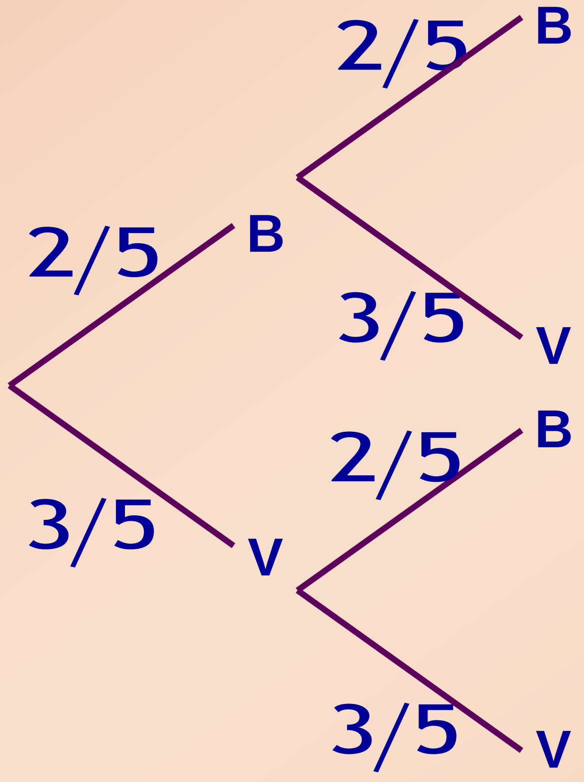
Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
V V	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
Total	1

Temos

$$P(A) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5} \quad \text{e}$$

$$P(A \mid C) = \frac{1}{4}\ .$$

Considere agora que as extrações são feitas *com reposição*, ou seja, a 1ª bola sorteada é reposta na urna antes da 2ª extração. Nesta situação, temos



Resultados	Probabilidade
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
Total	1

Neste caso,

$$P(A) = P(\text{branca na } 2^a) = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{5} \quad \text{e}$$

$$P(A \mid C) = P(\text{ branca na } 2^a \mid \text{branca na } 1^a) = \frac{2}{5} = P(A)$$

$$P(A \mid C^c) = P(\text{branca na } 2^a \mid \text{vermelha na } 1^a) = \frac{2}{5} = P(A)$$

ou seja, o resultado na 2^a extração *independe* do que ocorre na 1^a extração.

Independência de eventos: Dois eventos A e B são <u>independentes</u> se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A),} \quad P(B) > 0.$$

Temos a seguinte forma equivalente:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B).}$$

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A: Jonas é aprovado

B: Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$$

$\rightarrow$ Qual foi a suposição feita?

Distribuição Binomial

A distribuição binomial é adequada para descrever os resultados de uma variável aleatória que podem ser agrupados em apenas duas classes ou categorias.

As categorias devem ser mutuamente excludentes.

Geralmente, denomina-se as duas categorias como sucesso ou falha.

$$\boxed{P(sucesso) + P(falha) = 1}$$

Exemplo: Se P(sucesso) = 0,6 então

P(falha) = 1-0,6 = 0,4.

Seja um processo composto de uma seqüência de **n** observações independentes com probabilidade de sucesso constante igual a **p**. A distribuição do número de sucessos seguirá o modelo Binomial:

$$\boxed{P(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}}, x = 0,1,....,n$$

onde $\binom{n}{x}$ representa o número de combinações de **n** objetos tomados **x** de cada vez, calculado como:

$$\boxed{\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

Exemplo 1

Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Inicialmente, vamos definir a variável aleatória de interesse:

X: número de bolas vermelhas observadas (sucesso).

Logo, a probabilidade de sucesso será p=4/10=0,4. Utilizando a fórmula apresentada, em que n=5 (número de retiradas) e k=3 (número de bolas vermelhas que temos interesse em observar), temos:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}.0{,}4^3.(1-0{,}4)^{5-3}=\binom{5}{3}.0{,}4^3.0{,}6^2=0{,}2304 \text{ ou } 23{,}04\%.$$

Exemplo 2

Numa cidade, 10% das pessoas possuem carro de marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro de marca A?

Definindo X: número de pessoas que possuem o carro da marca A (sucesso), temos associada uma probabilidade de sucesso p=0,10. Sendo n=30 e k=5, temos:

$$P(X=5)=\binom{30}{5}.0{,}1^5.(1-0{,}1)^{30-5}=\binom{30}{5}.0{,}1^5.0{,}9^{25}\cong 0{,}1023 \text{ ou } 10{,}23\%.$$

1ª Questão

(ENEM) Considere o seguinte jogo de apostas: Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são:

a) Caio e Eduardo. b) Arthur e Eduardo. c) Bruno e Caio. d) Arthur e Bruno. e) Douglas e Eduardo.

Solução. Uma cartela tem 60 números. O apostador pode escolher quantos números ele vai marcar na cartela: Pode ser 6, 7, 8, 9 ou 10 números.

Quanto mais número ele marcar, maior é sua chance de ser sorteado, por isso o preço da cartela aumenta. Calculando o evento de cada cartela, temos:

6 números = C(6,6) = 1; 7 números = C(7,6) = 7; 8 números = C(8,6) = 28;

9 números = C(9,6) = 84 10 números escolhidos = C(10,6) = 210

Agora precisamos ver quantas cartelas cada apostador adquiriu.

Arthur: 250 cartelas de 6 números: 250 x 1 = 250

Bruno: 41 cartelas de 7 números + 4 cartelas de 6 números: (41 x 7) + (4 x 1) = 291

Caio: 12 cartelas com 8 números + 10 cartelas com 6 números: (12 x 28) + (10 x 1) = 336 + 10 = 346

Douglas: 4 cartelas com 9 números: 4 x 84 = 336

Eduardo: 2 cartelas com 10 números: 2 x 210 = 420

Observe que os que mais tem chance são: 1.º) Eduardo com 420; 2.º) Caio com 346.

2ª Questão

(ENEM) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.
Qual a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075 b) 0,150 c) 0,325 d) 0,600 e) 0,800

Solução. Ele pode se atrasar chovendo ou não. A probabilidade será a soma dessas probabilidades condicionais:

$$\begin{cases} P(atrasa / choveu) = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{20} \\ P(atrasa / \text{não } choveu) = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{40} \end{cases} \Rightarrow P(atrasa) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{7}{40} = \dfrac{13}{40} = 0{,}325.$$

3ª Questão

Num jogo sorteia-se um número entre 1 e 600 (cada número possui a mesma probabilidade de ser sorteado). A regra do jogo é: se o número sorteado for múltiplo de 6 então o jogador ganha uma bola branca e se o número sorteado for múltiplo de 10 então o jogador ganha uma bola preta. Qual a probabilidade de o jogador não ganhar bola alguma?

Solução. Não ganhará bola se sair um número que não for múltiplo nem de 6, nem de 10.

- Total de números: 600

- Múltiplos de 6: $\dfrac{600-6}{6} + 1 = 100$; **- Múltiplos de 10:** $\dfrac{600-10}{10} + 1 = 60$. **- Múltiplos de 6 e 10:** $\dfrac{600-30}{30} + 1 = 20$.

Logo, $P(sem\ bola) = 1 - \left(\dfrac{100+60-20}{600}\right) = 1 - \dfrac{140}{600} = 1 - \dfrac{14}{60} = 1 - \dfrac{7}{30} = \dfrac{23}{30}$.

4ª Questão

(UERJ) Em uma escola, 20% dos alunos de uma turma marcaram a opção correta de uma questão de múltipla escolha que possui quatro alternativas de resposta. Os demais marcaram uma das quatro opções ao acaso.

Verificando-se as respostas de dois alunos quaisquer dessa turma, qual a probabilidade de que exatamente um tenha marcado a opção correta?

Solução. Considerando A e B esses alunos, temos o aluno escolhido pode ter acertado por que sabia (dentro dos 20%) ou ter acertado por sorte (dentro dos 80%). A probabilidade de aleatoriamente acertar é 1/4 = 25% e de errar é 3/4 = 75%. Analisando as opções, temos:

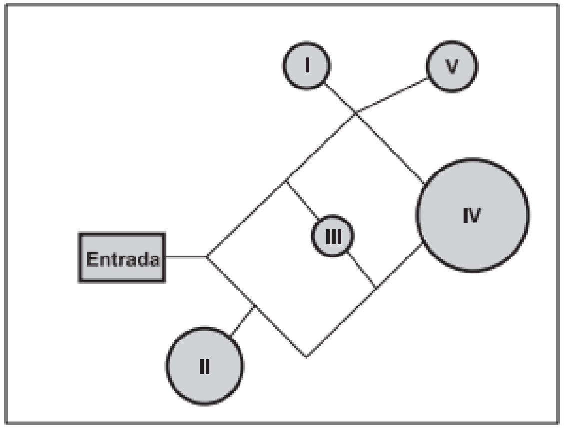
- A sabia, B erra: (0,2) x (0,8 x 0,75) = 0,12

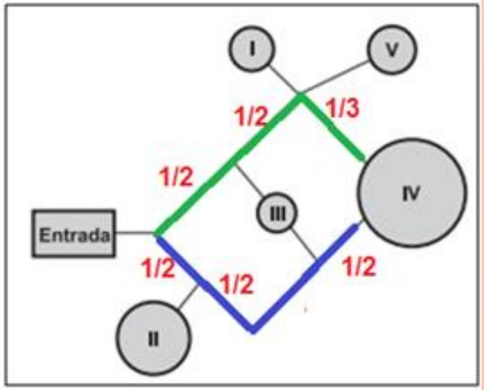
- A acerta na sorte e B erra: (0,8 x 0,25) x (0,8 x 0,75) = 0,12

Como os casos podem permutar, temos: $\boxed{P(1\ acerta) = 2 \times (0{,}12 + 0{,}12) = 0{,}48 \rightarrow 48\%}$.

5ª Questão

(ENEM) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.





Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, determine a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar.

Solução. Cada escolha de caminho na ramificação possui 1/2 de probabilidade de escolha. Há dois caminhos para escolher, pois ele não pode passar pela área III.

Logo, P(IV) = (1/2).(1/2).(1/3) + (1/2).((1/2).(1/2) = (1/12) + (1/8) = 5/24.

6ª Questão

O quadro funcional de uma empresa é composto de 35 pessoas efetivas e 15 prestadoras de serviços. Do pessoal efetivo 20 são homens e do pessoal prestador de serviço 5 são mulheres. Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa dessa empresa, qual a probabilidade dessa pessoa ser homem e prestar serviço?

Solução. O quadro é composto por (35 + 15) = 50 pessoas. Representando no quadro e identificando o evento pedido, temos:

	Efetivo	Prestador de serviço	Total
Homem	20	10	30
Mulher	15	5	20
Total	35	15	50

Logo, $\boxed{P(H \cap Prestador) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \to 20\%}$.

7ª Questão

(UERJ) Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?

Solução. O espaço amostral do lançamento de dois dados possui 6 x 6 = 36 elementos. O evento pedido é o conjunto: E = {(4,6); (6,4); (5,5)}. São 3 elementos.

Logo, $\boxed{P(Soma = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$.

8ª Questão

(PISM) Uma moeda não tendenciosa é lançada até que sejam obtidos dois resultados consecutivos iguais. Qual a probabilidade de a moeda ser lançada exatamente três vezes?

Solução. Se a moeda tem que ser lançada 3 vezes, então há 2^3 = 8 possibilidades de resultados. Os dois resultados consecutivos e iguais terão que ocorrer após o terceiro lançamento:

E = {(C, K, K) ou (K, C, C)}. Logo, $\boxed{P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}}$.

9ª Questão

(PISM) Quatro moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa em uma só moeda?

Solução. O espaço amostral do lançamento de 4 moedas possui $2^4 = 16$ elementos.
O evento "ocorrer cara em somente uma moeda" pode aparecer no número de permutações do resultado (C, K, K, K): n(E) = 4!/3! = 4. Logo, $\boxed{P(E) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$.

10ª Questão

(UERJ) Em uma empresa existem 100 funcionários, distribuídos da seguinte forma:

- 64 homens
- 8 mulheres com mais de 50 anos
- 35 homens com menos de 50 anos

Um funcionário será sorteado com uma nova TV para assistir à Copa.
a) Qual a probabilidade de o sorteado ser mulher ou ter mais de 50 anos?

Solução. Representando no quadro, temos:

	Mais de 50	Menos de 50	Total
Homem	29	35	64
Mulher	8	28	36
Total	37	63	100

Temos: $\boxed{P(M \cup +50) = P(M) + P(+50) - P(M \cap +50) = \frac{36}{100} + \frac{37}{100} - \frac{8}{100} = \frac{65}{100} \to 65\%}$.

b) Qual a probabilidade de ser sorteado um homem sabendo que o prêmio foi para alguém com menos de 50 anos?

Solução. O espaço amostral fica reduzido ao número de pessoas com menos de 50 anos:

$\boxed{P(H / -50) = \frac{35}{63}}$.

11ª Questão

Qual a probabilidade de um casal com quatro filhos ter dois do sexo masculino e dois do sexo feminino?

Solução. O espaço amostral para quatro filhos possui $2^4 = 16$ elementos.
O evento de ser dois filhos de cada sexo possui $4!/2!2! = 6$ elementos.

Logo, $\boxed{P(HHMM) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}}$.

12ª Questão

(ENEM) O jogo de dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por uma certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma a seis. O número total de combinações possíveis é de 28 peças. Ao pegar uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face?

Solução. Há sete peças com o valor 3, sete com o valor 4 e uma peça com ambos os valores 3 e 4.

Logo, $\boxed{P(3 \cup 4) = P(3) + P(4) - P(3 \cap 4) = \frac{7}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}}$.

13ª Questão

(ENEM) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa.
Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

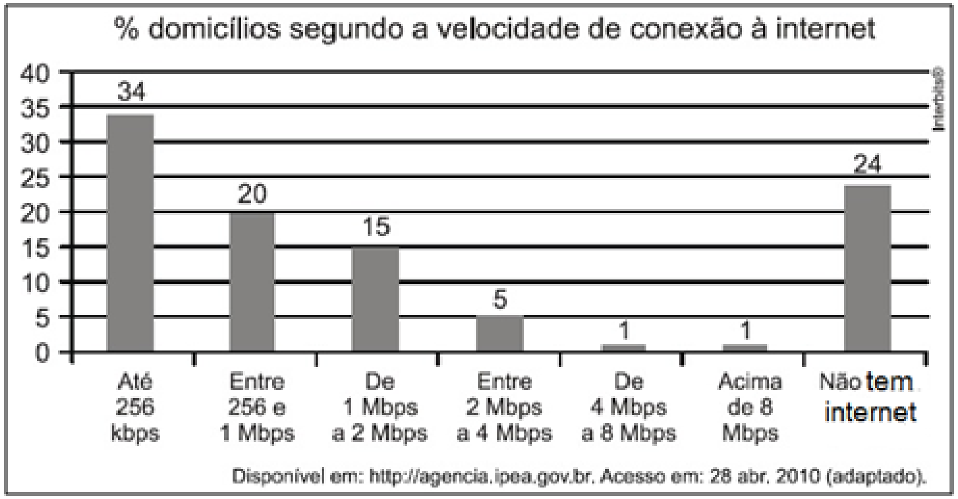
a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

Solução. O tempo total será 100 segundos.
Como a probabilidade de cada cor estar visível é proporcional ao tempo, temos:

$$\boxed{\begin{cases} P(verde) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ P(amarela) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \Rightarrow P(verde \cap verde) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ P(vermelha) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \end{cases}}.$$

14ª Questão

(ENEM) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados foram obtidos em 2009, pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a probabilidade de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

Solução. O número de entrevistados é (34 + 20 + 15 + 5 + 1 + 1 + 24) = 100, isto é, o número de elementos do espaço amostral. Logo, $\boxed{P(N \geq 1\,Mbps) = \frac{15+5+1+1}{100} = \frac{22}{100} \to 22\%}$.

15ª Questão

(ENEM) Numa prova de Matemática há quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta. Um candidato decide fazer essa prova escolhendo aleatoriamente, uma alternativa em cada questão. Qual a probabilidade desse aluno acertar exatamente uma questão?

Solução. A probabilidade de acerto em uma questão com quatro alternativas é 1/4 e de errar é 3/4. O número de casos em que acerta somente uma questão é o número de permutações de (C E E E), onde C é acerto e E, erro. Logo, 4!/3! = 4 formas de só acertar uma.

Logo, $\boxed{P(C=1) = \frac{4!}{3!}.\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}\right) = 4.\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}\right) = 1.\left(\frac{1}{1}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64}}$.

16ª Questão

(ENEM) Um aluno prestou vestibular em apenas duas universidades. Suponha que, em uma delas, a probabilidade de que ele seja aprovado é 30%, enquanto que na outra a probabilidade de aprovação é de 40%. Nessas condições, qual a probabilidade que esse aluno seja aprovado em pelo menos uma dessas universidades?

Solução 1. De acordo com as informações, a probabilidade de ser reprovado na primeira é de 70% e de ser reprovado na segunda é de 60%.

Ser aprovado em pelo menos uma, implica nos casos:

- Aprovado somente na primeira: $\boxed{P(A \cap R) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18}$.

- Aprovado somente na segunda: $\boxed{P(R \cap A) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28}$.

- Aprovado em ambas: $\boxed{P(A \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12}$.

Logo, $\boxed{P(A) = 0{,}18 + 0{,}28 + 0{,}12 = 0{,}58 \rightarrow 58\%}$.

Solução 2. Usando o complementar: $\boxed{P(A) = 1 - P(R \cap R = 1 - (0{,}7) \times (0{,}6) = 1 - 0{,}42) = 0{,}58 \rightarrow 58\%}$.

17ª Questão

(ENEM) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e passou para 37. Como essa revista não era científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0 qual a probabilidade de ela calçar 38,0?

Solução. Pela probabilidade condicional, temos: $\boxed{P(C_{38} / C > 36) = \frac{10}{3+10+1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}}$.

18ª Questão

(ENEM) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50. **Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.**

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente:

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor c) 4 vezes menor d) 9 vezes menor e) 14 vezes menor

Solução. Se uma pessoa aposta 6 dezenas em um cartão, há C(6,5) = 6 quinas possíveis de serem premiadas. Se aposta 84 cartões, então terá 84 x 6 = 504 quinas para concorrer. No caso de marcar 9 dezenas em um único cartão terá $\boxed{C(9,5)=\frac{9!}{5!4!}=\frac{9.8.7.6.5!}{5!4!}=9.2.2=126}$ **quinas concorrendo. O valor 126 é 4 vezes menor que 504, pois 504 = 126 x 4.**

19ª Questão

Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo. Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é:

a) 1/5 b) 4/5 c) 19/21 d) 19/25 e) 21/25

Solução. Organizando as informações em uma tabela, temos:

	Positivo	Negativo	Total
Saudáveis	20	380	400
Doentes	60	40	100
Total	80	420	500

Aplicando a probabilidade condicional, vem:

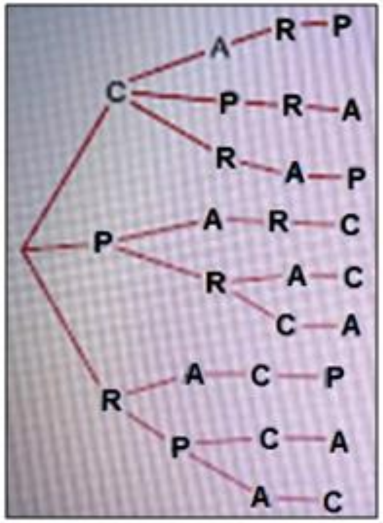
$$\boxed{P(\text{saudável}|\text{negativo})=\frac{380}{420}=\frac{38}{42}=\frac{19}{21}}.$$

20ª Questão

(FUVEST) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é

a) 1/4 b) 7/24 c) 1/3 d) 3/8 e) 5/12

Solução. Supondo que a sequência ACPR represente a opção na qual todos os amigos retiram o próprio nome e sabendo que o total de permutações para os quatro amigos é 24 ($P_4 = 4! = 24$), pode-se contar o número de permutações caóticas da sequência com a ajuda de um diagrama de árvore:



Logo, de um total de 24 permutações, em 9 delas nenhum participante retire seu próprio nome. A probabilidade será de: 9/24 = 3/8.