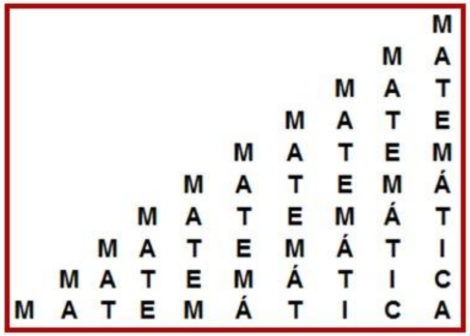
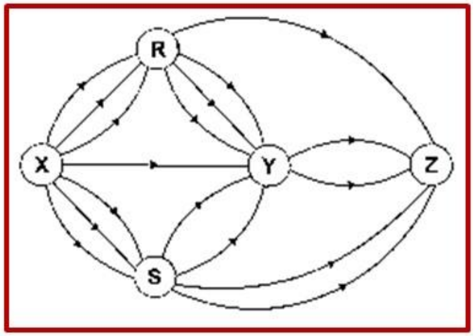
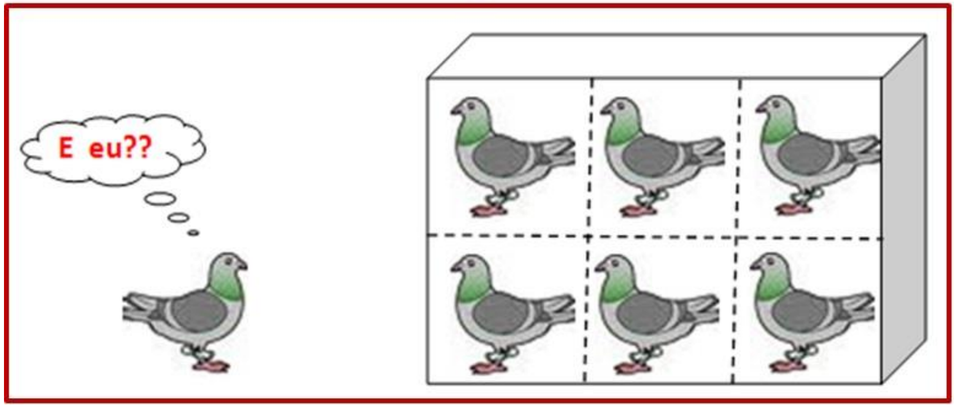
Análise Combinatória - 2/6/2018







Prof. Walter Tadeu
www.professorwaltertadeu.mat.br

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM(PFC)

OU

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Constitui a ferramenta básica para os problemas que iremos estudar

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de

x maneiras e se, uma vez tomada a

decisão D_1 , a decisão D_2 puder ser

tomada de y maneiras, então o número

de maneiras de se tomarem as

decisões D_1 e D_2 é $x.y$

Exemplo 1

Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores **verde**, **azul** e **cinza**. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não podem ser usadas cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Temos 3 modos de escolher a primeira listra e , a partir daí , apenas 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras,já que listras adjacentes não podem ter a mesma cor, logo $3.2^6=192$

1ª Questão

(UERJ) Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.
Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

a) 624 b) 676 c) 715 d) 720

Solução 1. A escolha de qualquer carta inicialmente pode ser feita de 52 formas distintas. A segunda carta terá que ser uma com valor dentre os 12 restantes (diferentes da primeira). A terceira, quarta e quinta carta possuem o mesmo valor da segunda, logo com 1 única possibilidade para cada. Pelo princípio multiplicativo, temos: (52).(12).(1).(1).(1) = 624 conjuntos.

Solução 2. Escolha da quadra: 13 possibilidades (valores). A quinta carta possui 48 (52 – 4) possibilidades. Total: (13).(48) = 624 conjuntos.

2ª Questão.

(PISM) Em uma agência bancária, a fim de evitar filas com os clientes, implantou-se um sistema de senhas numéricas crescentes, controladas por um painel eletrônico. As senhas são formadas a partir de três algarismos, sem repetição, com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Sabendo que a primeira senha num dado dia foi 123, qual posição ocupará um cliente que nesse dia, possuía a senha 521?

a) 12 b) 48 c) 52 d) 600 e) 72

Solução. Analisando as possibilidades, temos:

i) Centena menor que 5: (4 poss) x (4 poss) x (3 possib) = 48

ii) Centena igual a 5 e dezena igual a 1: (1 poss) x (1 poss) x (3 possib) = 3

Até agora temos 48 + 3 = 51 senhas. A 51ª será 514.

A próxima será 521. Logo, ocupa a 52ª posição.

Exemplo 2

O código Morse usa duas letras, ponto (•) e traço(–) , e as palavras têm de 1 a 4 letras.Quantas são as palavras do código Morse?

De 1 letra : Há 2 palavras, ponto e traço

De 2 letras : 2 . 2 = 4 palavras de 2 letras

De 3 letras : 2 . 2 .2= 8 palavras de 3 letras

De 4 letras : 2.2.2.2 = 16 palavras de 4 letras

Logo 2 + 4 + 8 + 16 = 30

Arranjo com repetição

Dados n elementos diferentes, a_1, a_2,... , a_n, chama-se **arranjos com repetição** dos n elementos p a p a todas as sequências de p elementos, sendo estes diferentes ou não, que se podem formar de modo que as sequências diferem pelos elementos que as compõem ou pela ordem de colocação. O número total de sequências representa-se por n^p.

Exemplo 1: Numa loteria espostiva com cinco jogos quantas apostas era necessário fazer para ter a certeza de ganhar?

Resolução:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Exemplo 2: O sistema de numeração de matrículas dos automóveis portugueses implementado a partir de 2005 consiste numa sequência de 4 algarismos com duas letras no meio, como por exemplo 56-AD-76. Por razões de decência, foi interdito o uso dos pares CU e FD. Quantas matrículas sobram para o sistema atual? Quando este sistema chegar ao fim, está prevista a introdução da sequência AA-00-AA. Quantas matrículas tem este novo sistema?

Resolução: Comecemos por ilustrar a situação num esquema.

$$\frac{0}{10}\ \frac{0}{10}\ \frac{\mathsf{A}}{23}\ \frac{\mathsf{A}}{23}\ \frac{0}{10}\ \frac{0}{10}\ -\ \frac{0}{10}\ \frac{0}{10}\ \underbrace{\overset{\mathsf{F}}{\underline{\mathsf{C}}}\ \overset{\mathsf{D}}{\underline{\mathsf{U}}}}_{2}\ \frac{0}{10}\ \frac{0}{10}$$

$$\boxed{10^4 \times 23^2 - 10^4 \times 2 = 5270000 \text{ matrículas.}}$$

No caso das matriculas AA-00-AA temos $\boxed{23^4 \times 10^2 = 27984100}$

Exemplo 5

De quantos modos 3 pessoas podem sentar em 5 cadeiras colocadas em fila?

A primeira pessoa tem 5 opções de escolha, já a segunda pessoa, admitindo-se que não sente no colo da outra, tem 4 opções e a 3ª pessoa tem 3 opções.
Logo pelo PFC temos 5.4.3 = 60

Priorizando as restrições

Exemplo 6: **Quantos são os números pares de 3 dígitos distintos**

Temos um impasse que pode ser solucionado separando o problema.

- **Contaremos separadamente os números que terminam em 0 (1.9.8 =72) e depois os que não terminam em zero(4.8.8=256).**
- **Logo 256 + 72 = 328. Existem outros modos de fazer este problema.**

Exemplo 7

Uma turma tem aulas as segundas, quartas e sextas, de 13h às 14h e de 14h às 15h. As matérias são Matemática Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

Observe que a estratégia é essencial para esse problema. Há 3 modos de escolher os dias de Matemática. Escolhidos esses dias(segunda e quarta, por exemplo), temos 2 opções para a escolha do horário da segunda e 2 opções para o horário da quarta. Há 2 modos de escolher os horários de Física, em um dia desses a Física deve ser posta em um horário de um único modo, pois a Matemática já ocupou o outro tempo e, no outro, a Física pode ser posta de 2 modos. Finalmente , a Química só pode ser posta de um único modo, que é o encaixe do horário, portanto: 3.2.2.2.1.2.1= 48 modos.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Dados **n** objetos distintos do conjunto

$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$$

De quantos modos é possível **ordená-los?**

Temos **n** opções para o primeiro objeto que irá formar o conjunto, **(n-1)** opções para o 2°, **(n-2)** para o 3° e assim por diante. Pelo PFC temos:

EXEMPLOS

A) Quantos são os anagramas da palavra **PRÁTICO**? **7.6.5.4.3.2.1 = 7!**

B) De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

O 1° rapaz tem 10 opções o 2° 8 opções, o 3° 6 opções, o 4° 4 opções e o 5° 2 opções .

Já as moças 5 !,portanto 8.6.4.2.5!=460 800

OBS: Outra forma seria: $5!.5!.2^5$ = 120 x 120 x 32

D) De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?

Colocamos 8 pessoas em fila, que pode ser feito de 8! modos diferentes, e separamos em dois grupos; porém, em cada grupo há uma repetição de 4! posições e ainda há duas maneiras de posicionar cada gru :

$$\frac{8!}{2.4!.4!} = 35$$

OBS: Outra forma seria

$$\frac{C_8^4 \times C_4^4}{2!} = \frac{\frac{8!}{4!.4!} \times 1}{2} = \frac{8!}{2.4!.4!} = 35$$

PERMUTAÇÃO DE ELEMENTOS NEM TODOS DISTINTOS

Vamos começar com um exemplo. Quantos anagramas tem a palavra JACA?

AAJC AACJ JCAA CJAA AJCA ACJA

JAAC CAAJ JACA CAJA AJAC ACAJ

Observe que, montando temos apenas 12 anagramas, mas pela nossa Expressão $P_n = n!$ temos :

$P_n=4!=4.3.2.1=24$. Observe que a letra A aparece duas vezes e não há distinção entre esses “A”

Na verdade, o que a expressão 4! = 24 faz é contar o número de anagramas da palavra JACA como se tivéssemos 4 letras distintas; no entanto, sabemos que na troca de um A por outro A nada ocorre. Então existem 2! = 2 trocas que não resultam em nada, logo o número de anagramas da palavra JACA é:

$$\boxed{P_n = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 12}$$

EXPRESSÃO GERAL

$$\boxed{P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!.\alpha_2!.\alpha_3!.\ldots.\alpha_n!}}$$

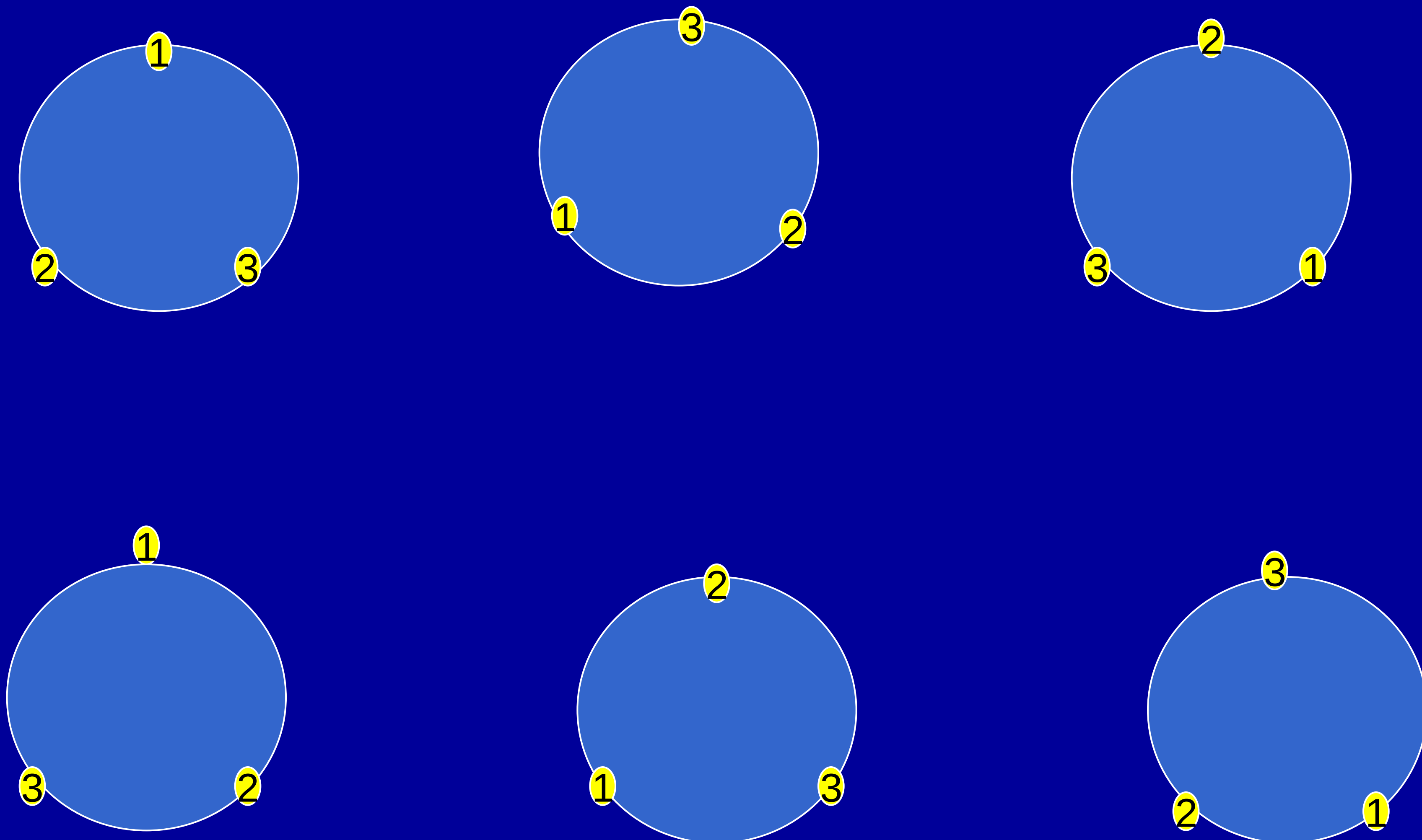
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Com } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n \\ \text{o número de vezes em que os} \\ \text{objetos aparecem repetidos}\end{array}\right.$$

Permutações circulares

Vamos novamente começar com uma pergunta.

De quantas maneiras podemos colocar n objetos distintos em n lugares igualmente espaçados numa circunferência, se considerarmos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação?

Veja para o caso n = 3



Observe que as 3 primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as 3 últimas, de modo que:

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

$$(P_c) = 2$$

CASO GERAL

Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há 1 modo de colocar o 1° objeto,1 modo de colocar o 2° objeto, 2 modos de colocar o 3° objeto, 3 modos de colocar o 4° objeto e assim por diante.Há (n-1) modos de colocarmos o último objeto.

$$(P_c) = (n-1)!$$

Logo :P_c=1.1.2.3.4....(n-1)=(n-1)!

Exemplo 1: De quantas maneiras 3 executivos, cada um deles acompanhado de seu assessor, podem sentar-se em volta de uma mesa circular de reuniões?(Os assessores não precisam estar ao lado dos seus chefes): **P_c = (6-1)! = 5! = 120**

Exemplo 2: De quantas maneiras as pessoas do exemplo anterior podem dispor-se em torno da mesa circular, sendo que um dos diretores faz questão de sentar ao lado do seu assessor.

Considere o tal diretor e seu assessor como um único bloco. Temos P_c = (5-1) != 4! = 24, mas eles podem permutar de lugar entrei si, então 24.2!=48 modos.

EXEMPLO 3

De quantos modos podemos formar uma roda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Vamos retirar, inicialmente, do grupo as crianças que não podem ficar juntas. As permutações com as outras 5 crianças será de P_c =(5-1)!=4!= 24. No entanto, temos 5 opções para encaixar uma das crianças que ficou de fora e 4 opções para encaixar a outra criança que ficou de fora.Então: 4!.5.4=480. Fazer um desenho.

Combinações

- O princípio da multiplicação e os métodos de contagem para permutações são todos aplicáveis a situações aonde a ordem é importante.
- Combinações estão relacionadas a alguns problemas de contagem aonde a ordem não importa.

- **Questão:**
  - Seja A qualquer conjunto com n elementos e $0 \leq r \leq n$.
  - Quantos subconjuntos diferentes de A existem com r elementos?
  - Os subconjuntos com r elementos de um conjunto A com n elementos são chamados de **combinações** de A tomado r a r.

- **Exemplo:** Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
  - Combinações 3 a 3 distintas de A:

    $A_1 = \{1, 2, 3\},\ A_2 = \{1, 2, 4\},\ A_3 = \{1, 3, 4\},\ A_4 = \{2, 3, 4\}$
  - Note que se trata de subconjutos e não de seqüências.
  - Portanto:

    $A_1 = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}$
  - Ou seja: neste caso, a ordem é irrelevante.

Teorema: Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja $0 \leq r \leq n$.

- O número de combinações dos elementos de A tomados r a r é:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

  - (que também é o nro de subconjuntos de A com r elementos)

- **Exemplo:** Compute o número de "mãos" de 5 cartas distintas que podem ser distribuídas a partir de um baralho de 52 cartas.

- **Solução:**

$$_{52}C_5 = \frac{52!}{5!.47!} = 2598960$$

  - pois a ordem em que as cartas são dadas é irrelevante
  - compare isto com 311875200 (mesmo problema com arranjo).

Combinações com repetição

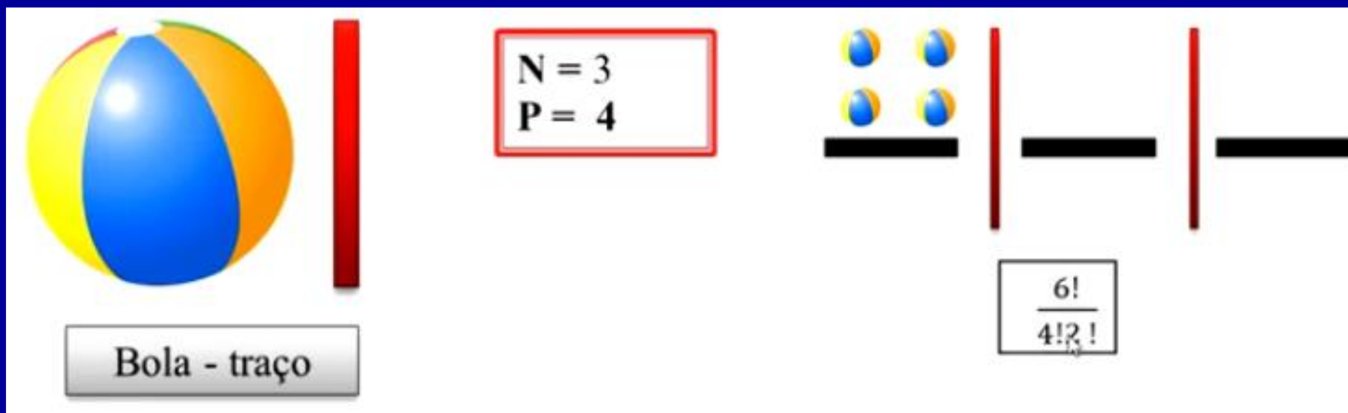
- **Teorema:** Suponha que k seleções têm que ser feitas a partir de n ítens, sem ligar para ordem e permitindo repetições
  - (assumindo que pelo menos k cópias de cada um dos n ítens estão disponíveis).

  Então:
  - O número de modos em que estas seleções podem ser feitas é dado por:

$$_{n+k-1}C_k$$

(UNESP-SP) - Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui três sabores de sorvete: chocolate, morango e uva. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?

a) 4 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15



$$\left.\begin{array}{cccc} CH & M & U & =4 \\ 4 & 0 & 0 & =4 \\ 2 & 2 & 0 & =4 \\ 1 & 1 & 2 & =4 \end{array}\right\} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow CR_{4+3-1}^{4} = C_6^4 = P_6^{4,2}$$

(UERJ) Uma criança possui um cofre com 45 moedas: 15 de dez centavos, 15 de cinquenta centavos e 15 de um real. Ela vai retirar do cofre um grupo de 12 moedas ao acaso. Há vários modos de ocorrer essa retirada. Admita que as retiradas são diferenciadas apenas pela quantidade de moedas de cada valor. Determine quantas retiradas distintas, desse grupo de 12 moedas, a criança poderá realizar.

Solução. Organizando as retiradas possíveis dando resultado 12, temos uma soma de inteiros não negativos: D + C + U = 12. Isto significa 12 elementos separados por 2 sinais de +. O total será a permutação com repetição de 12 elementos e 2 sinais de mais (+).

$$Total: \frac{(12+2)!}{12!.2!} = \frac{14!}{12!.2!} = \frac{14.13.12!}{12!2!} =$$
$$= (7).(13) = 91$$

Há um total de 91 formas distintas.

			D + C + U = 12 moedas
12	0	0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 + +
0	12	0	+ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 +
0	0	12	+ + 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
11	1	0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 + 1 +
...	...	...	...
4	5	3	1 1 1 1 + 1 1 1 1 1 + 1 1 1

Voltando à lista

3ª Questão.

(UERJ) A tabela apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano. Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a **n** e no país Y igual a **p**. A razão correspondente $\frac{n}{p}$ a:

País	Descrição do critério	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem.	M3MK09
Y	Um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem.	YBW0299

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

Solução. No país X temos que considerar todas as possibilidades de letras e números, mas como se misturam, há repetições nas permutações, por exemplo: MM3K99 e MMK399 onde se os M's ou 9's trocarem de lugar seriam contados duas vezes.

Logo, $\boxed{n=(26).(26).(26).(10).(10).(10)\frac{(6!)}{3!3!}}$.

No país Y as letras ficam sempre no mesmo bloco e os números também mantendo a posição LN. Logo, $\boxed{p=(26).(26).(26).(10).(10).(10).(10)}$**. Calculando a razão pedida, temos:**

$$\boxed{\frac{n}{p}=\frac{(26).(26).(26).(10).(10).(10).\frac{(6!)}{3!3!}}{(26).(26).(26).(10).(10).(10).(10)}=\frac{\frac{(6!)}{3!3!}}{(10)}=\frac{\frac{6.5.4.3!}{3!3!}}{(10)}=\frac{5.4}{10}=\frac{20}{10}=2}.$$

<u>4ª Questão</u>.

(UERJ) Todas as ***<u>n</u>*** capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga cada duas capitais. Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas de acordo com o mesmo critério. Determine o número ***<u>n</u>*** de capitais, que existiam inicialmente nesse país.

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

Solução. O número inicial de estradas é a combinação de <u>n</u> capitais duas a duas: C(n,2). Com a criação de duas capitais passamos a (n + 2) capitais. Esse acréscimo originou mais 21 estradas. O total de estradas é C(n+2,2). Logo, C(n+2,2) – C(n,2) = 21. Desenvolvendo, temos:

$$\begin{cases} C_{n+2}^{2} = \dfrac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} = \dfrac{(n+2)!}{2!n!} = \dfrac{(n+2).(n+1).n!}{2!n!} = \dfrac{(n+2).(n+1)}{2} \\ C_{n}^{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n.(n-1).(n-2)!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n.(n-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(n+2).(n+1)}{2} - \dfrac{n.(n-1)}{2} = 21.$$

$$\Rightarrow n^2 + n + 2n + 2 - n^2 + n = 42 \Rightarrow 4n = 40 \Rightarrow n = 10 \text{ capitais}$$

5ª Questão.

(ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela Internet.
Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.
Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.
O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

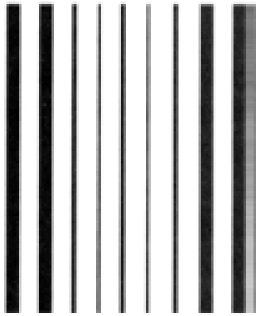
(A) $\dfrac{62^6}{10^6}$ B) $\dfrac{62!}{10!}$ (C) $\dfrac{62!\,4!}{10!\,56!}$ (D) $62! - 10!$ (E) $62^6 - 10^6$

Solução. Analisando a situação, temos: $\begin{cases} Antes: 10.10.10.10.10.10 = 10^6 \\ Depois: 62.62.62.62.62.62. = 62^6 \end{cases} \Rightarrow CM = \dfrac{62^6}{10^6}$.

<u>6ª Questão</u>.

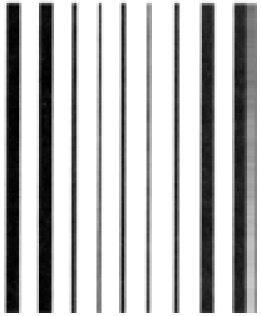
(ENEM) As embalagens dos produtos vendidos por uma empresa apresentam uma sequência formada por barras verticais: quatro de de largura 1,5 mm; três de largura 0,5 mm e duas de largura 0,25 mm como na figura abaixo. Cada sequência indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados por essas nove barras?

a) 1260 b) 1150 c) 930 d) 815 e) 536



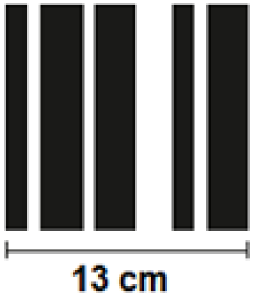
Solução. Considerando os tipos de larguras como X, L e Z, o número total de preçs será o número de permutações com repetição da sequência (XXXXLLLZZ).

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!.3!.2!} = \frac{9.8.7.6.5.4!}{4!.3!.2!} = 9.4.7.5 = 1260$$

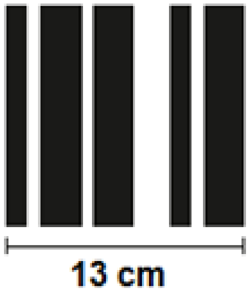


7ª Questão.

(FGV) Um sistema de código de barras tem extensão de 13 cm, e é composto por barras alternadas de cor branca ou preta, começando e terminando sempre por uma barra preta. Cada barra (branca ou preta) mede 1 ou 2 cm. A figura indica uma possibilidade de código nesse sistema. A leitura de código no sistema sempre é feita da esquerda para a direita. Calcule o total de códigos diferentes que podem ser formados nesse sistema.



Solução. O número de barras deve ser ímpar, pois começa e termina com a barra preta. Considerando x o número de barras de 1 cm (simples) e y, o número de barras de 2 cm (duplas), temos que x + 2y = 13 e (x + y) é ímpar. Logo as opções são:



i) x = 1 e y = 2=> 1 + 2.6: permutação de SDDDDDD: $\boxed{\frac{7!}{.6!} = 7}$.

ii) x = 5 e y = 4 => 5 + 2.4: permutação de SSSSSDDDD: $\boxed{\frac{9!}{.5!4!} = \frac{9.8.7.6.5!}{.5!4!} = 126}$.

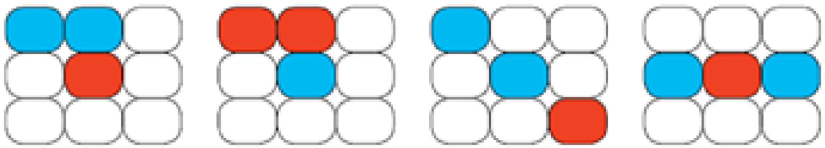
iii) x = 9 e y = 2 => 9 + 2.2: permutação de SSSSSSSSSDD: $\boxed{\frac{11!}{.9!2!} = \frac{11.10.9!}{.9!2!} = 55}$.

iv) x = 13 e y = 0 => 13 + 2.0: permutação de SSSSSSSSSSSSS: $\boxed{\frac{13!}{.13!} = 1}$.

Logo, são 7 + 126 + 55 + 1 = 189 possibilidades.

8ª Questão.

(UERJ) Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas. Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel:



O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a **x** minutos e **y** segundos, sendo y < 60. Os valores respectivos de **x** e **y** são:

a) 4 e 12 b) 8 e 24 c) 25 e 12 d) 50 e 24

Solução. Como há nove seções, considere as sequências AAVBBBBBB e AVVBBBBBB onde A = azul, V = vermelha e B = branca. O cálculo consiste em encontrar todas as permutações com repetição de cada sequência. Temos para um dos casos: $\boxed{T = \frac{9!}{2!6!} = \frac{9.8.7.6!}{2!6!} = 9.4.7 = 252}$.

Como são duas possibilidades, temos 252 x 2 = 504 formas de mudar a cor. Logo, serão feitas em 504 segundos ou 504 ÷ 60 = 8 minutos e 24 segundos.

9ª Questão.

(ENEM) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura. O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9. (E) 10.

Solução. Analisando as opções, temos:

i) Fundo azul: 2 cores para a casa e 2 cores para a palmeira: 2 x 2 = 4;

ii) Fundo cinza: 3 cores para a casa e 1 cor para a palmeira: 3 x 1 = 3;

Logo, há 4 + 3 = 7 possibilidades de variação.

10ª Questão.

(ENEM) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001
Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

a) 14. b) 12. c) 8. d) 6. e) 4.

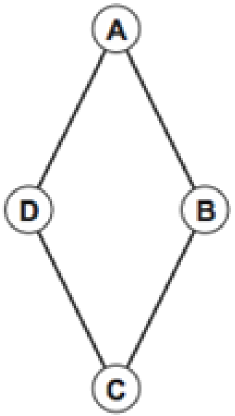
Solução. Analisando as opções, temos: PPBPP, PBBBP, PBPBP, BBPBB, BPPPB, BPBPB.
A operação pode ser representada por (2 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1) – (todas pretas) – (todas brancas) = 6.

11ª Questão.

(ENEM) Um artesão de joias tem a sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36



Joia com pedras (Foto: Enem)

Solução. Como a figura é um losango, as ordenações ABCD e ADCB correspondem á mesma escolha. Analisando as opções, temos:

i) A e C mesmas cores: 3 possibilidades.

B e D cores iguais: 2 possibilidades. Logo, há 3 x 1 x 2 x 1 = 6 casos.

ii) A e C mesmas cores: 3 possibilidades.

B e D cores diferentes: 2 possibilidades, mas como BD e DB não caracteriza outra figura, temos: 3 x 1 x (2 x 1) ÷ 2 = 3 casos.

ii) A e C cores diferentes: (3 x 2) ÷ 2 = 3 possibilidades, pois trocar A com C mantém a mesma figura.

B e D tem que ter as mesmas cores: temos: 3 x 1 = 3 casos.

Logo, o total será 6 + 3 + 3 = 12.

12ª Questão.

(ENEM) Claudia ganhou um porta-tempero giratório, com capacidade para doze temperos, divididos em dois níveis com a mesma quantidade de temperos, dispostos em roda.
Ela comprou, então, doze temperos diferentes para colocar em seu porta-tempero, um em cada pote. O número de maneiras distintas de Cláudia arrumar esses temperos é igual a:

a) 12!   b) $\frac{12!}{(6!)^2}$ c) $\frac{12!.(5!)^2}{(6!)^2}$ d) $\frac{12!.5!}{6!}$ e) 5!.6!

Solução. Como a situação é circular, temos:

i) Forma de escolher as posições dos temperos em cada nível: $\boxed{C_{12}^{6} = \frac{12!}{6!.6!} = \frac{12!}{(6!)^2}}$.

OBS: Uma vez determinado os temperos de um nível os 6 restantes estão no outro nível.

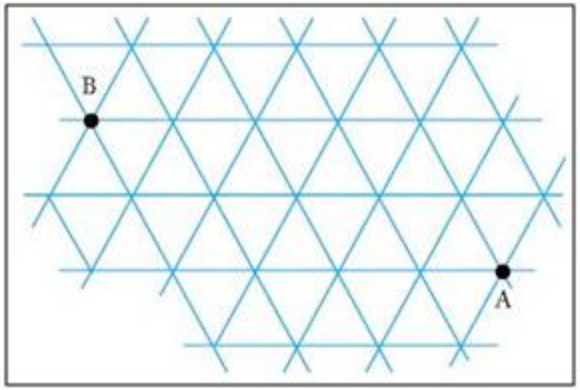
ii) Efetuar a permutação circular dos temperos nos dois níveis: $\boxed{\begin{array}{l} 1^\circ nível: (PC_6) = 5! \\ 2^\circ nível: (PC_6) = 5! \end{array}}$.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos: $\boxed{(PC_6)^2.C_{12}^{6} = \frac{12!}{6!.6!} = \frac{12!}{(6!)^2}.(5!)^2}$.

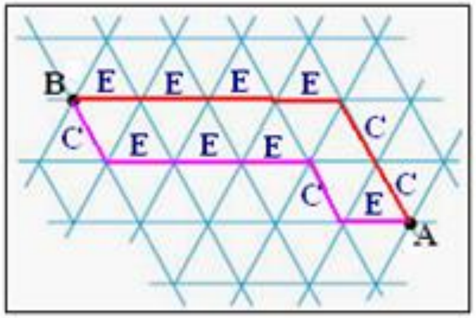
13ª Questão.

(UERJ) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação ao lado. Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos percorrendo **X** caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a ***d***. Sabendo que ***d*** corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, **X** equivale a:

a) 20 b) 15 c) 12 d) 10

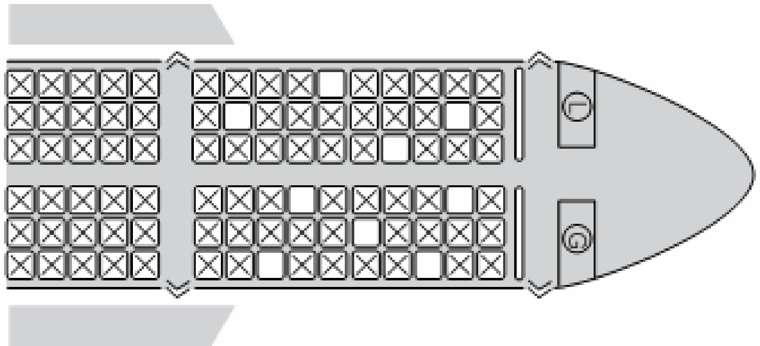


Solução. Considere "C" para cima e "E" para esquerda. Qualquer um dos x caminhos menores caminhos possíveis é uma permutação (com elementos repetidos) da sequência do tipo: (C,C,E,E,E,E) ou (E, C, E, E, E, C). Logo, o total de caminhos é: $\boxed{P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\times 2!} = \frac{6\times 5\times 4!}{4!\times 2\times 1} = 15}$.



14ª Questão.

(Enem 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$ c) $7!$ d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$ e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Solução 1. Pelo principio multiplicativo, a 1ª pessoa pode escolher 9 lugares, a 2ª escolhe 8 lugares, e assim até a 7ª pessoa escolher o restante.

Assim temos: 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 = $\boxed{= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times (2 \times 1)}{(2 \times 1)} = \frac{9!}{2!}}$.

Solução 2. São 9 lugares. Se forem utilizados 7 lugares, ficarão 2 vazios. Assim o número de formas de ocupação será a permutação com repetição (ABCDEFGOO): $\boxed{P_9^2 = \frac{9!}{2!}}$.

15ª Questão.

(ENEM) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

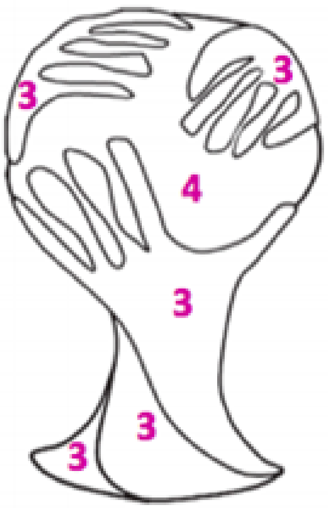
De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 e) 972

Solução. Para resolver a questão precisamos supor que o examinador quer que sejam utilizadas as cores (quaisquer das cores) da bandeira nacional, não exatamente todas as 4 cores.

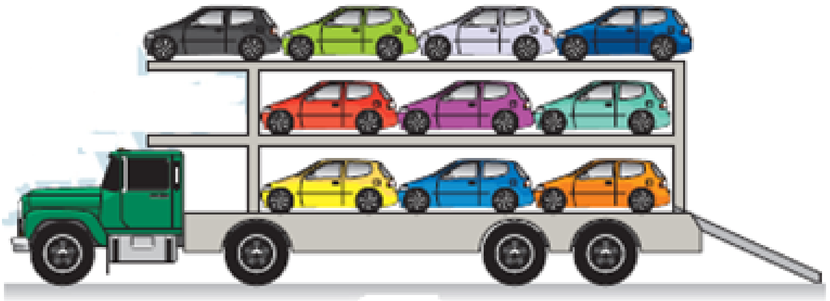
Pelo principio multiplicativo temos 4 x 3^5 = 972.

OBS: Para garantir que todas as 4 cores fossem utilizadas, o resultado seria 600. O cálculo seria: $\boxed{4\times3^5-\left[\left(C_4^3\times3\times2^5\right)-C_4^2\times2\times1^5\right]=972-384+12=600}$.



16ª Questão.

(ENEM) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha e formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, e feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) C(6,4) b) C(9,3) c) C(10,4) d) 6^4 e) 4^6

Solução. São 10 carrinhos e pelo menos um dos carrinhos deve ser pintado com uma das quatro cores. Então, se já forem pintados 4 carrinhos, sobram seis carrinhos que para serem pintados. O número de formas de serem pintados é a combinação completa: $\boxed{a+b+l+v=6 \rightarrow \frac{9!}{3!.6!}=C(9;3)}$.

17ª Questão.

(UERJ) Uma turma de pós-graduação tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h 30min às 15h e das 15h 30min às 17h. As matérias são Topologia, Equações Diferenciais e Combinatória, cada uma com duas aulas por semana, em dias diferentes. O número de modos diferentes de fazer o horário dessa turma é:

a) 268 b) 48 c) 36 d) 12 e) 6

Solução. São 3 dias com dois tempos cada, totalizando 6 tempos no total.

Temos 6 horários para escolher 2 tempos da 1ª disciplina: $\boxed{C_6^2 = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2!.4!} = 15}$**. Como dois tempos não podem ser no mesmo dia, retiramos os 3 casos que podem ocorrer. Logo, há 12 possibilidades para a 1ª disciplina.**

Para a 2ª disciplina temos 4 horários: $\boxed{C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2!} = 6}$**.**

Novamente temos que retirar dois casos:

i) Os dois tempos estão no mesmo dia em que tem 2 horários vagos;

ii) Os dois tempos estão no mesmo dia da 1ª disciplina. Isso não pode ocorrer, pois a terceira disciplina teria dois tempos no mesmo dia.

A terceira disciplina será preenchida de uma única forma.

Então a quantidade pedida na questão será: 12.4.1 = 48 maneiras