Centro de Instrução

Almirante Graça Aranha

MARINHA DO BRASIL

EFOMM - Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante

VETORES

21/4/2018

Prof. Walter Tadeu
www.professorwaltertadeu.mat.br

Fonte: http://www.lcmaquino.org/curso/96

Definição de Vetor

Segmento Orientado

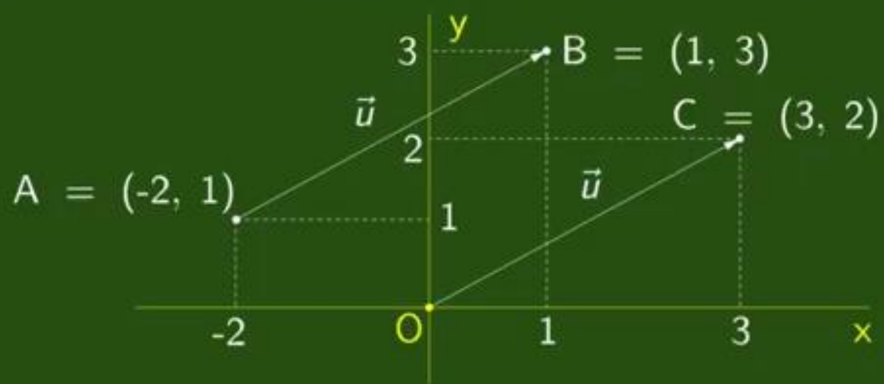
Considere o segmento de reta $\overline{AB}$. Definimos por segmento orientado, o segmento de reta $\overline{AB}$ para o qual fixamos uma orientação.

Figura: Representação geométrica de um segmento orientado.

Plano Cartesiano

Suponha agora que o vetor $\vec{u}$ tem um representante $\overrightarrow{AB}$, sendo $A = (-2, 1)$ e $B = (1, 3)$ pontos sobre o Plano Cartesiano. Podemos então localizar esse representante.

O segmento orientado $\overrightarrow{OC}$, também é um representante do vetor $\vec{u}$.



Nós diremos que as coordenadas de $\vec{u}$ são 3 e 2, sendo que usaremos a notação $\vec{u} = (3, 2)$.

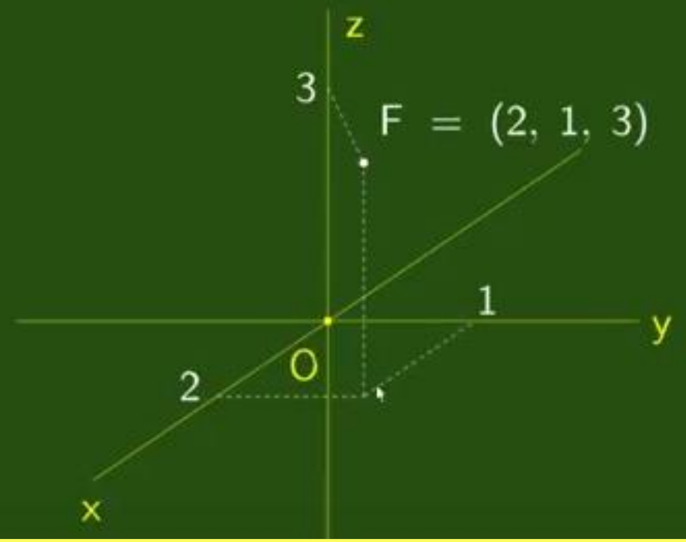
Seja $\overrightarrow{AB}$ um representante do vetor $\vec{u}$, sendo que $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ são dois pontos no Plano Cartesiano. Usamos

$$\vec{u} = B - A. \qquad \vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0),$$

para denotar que o segmento orientado $\overrightarrow{OC}$, que vai de $O = (0, 0)$ até $C = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, é um representante de $\vec{u}$. Os escalares $x_1 - x_0$ e $y_1 - y_0$ são chamados de coordenadas do vetor $\vec{u}$.

Vetores no Espaço

Escolhendo uma unidade de medida, podemos localizar no Espaço Cartesiano qualquer ponto que esteja sobre ele.



Seja $\overrightarrow{AB}$ um representante do vetor $\vec{u}$, sendo que $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$ são dois pontos no Espaço Cartesiano. Usamos

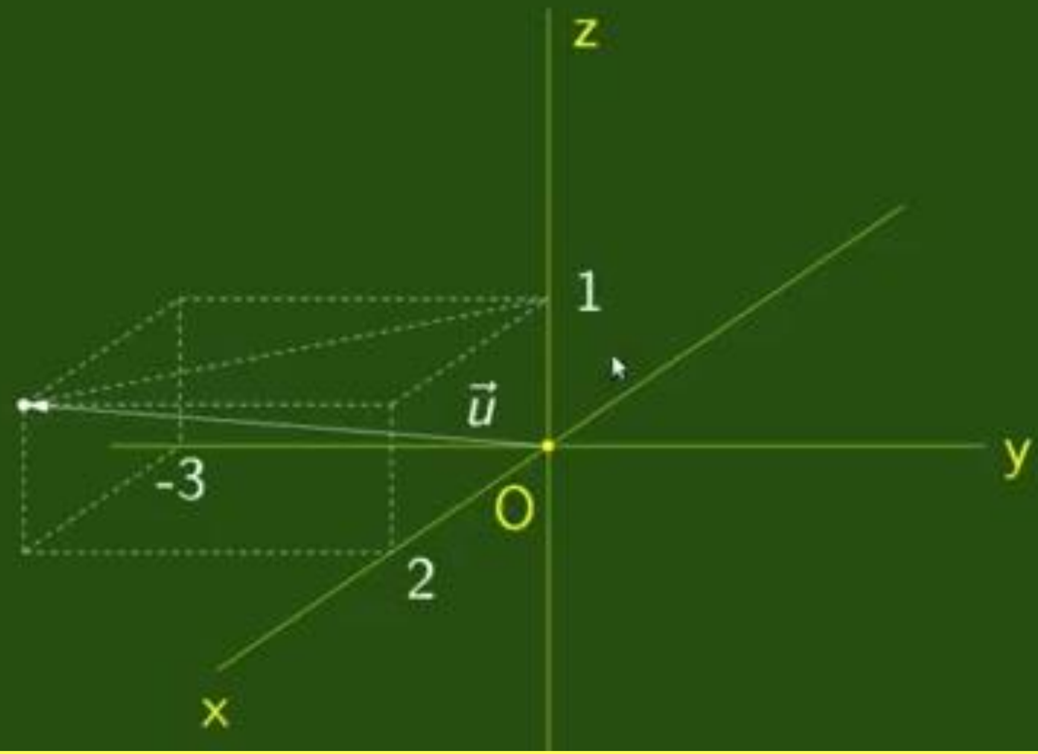
$$\vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

para denotar que o segmento orientado $\overrightarrow{OC}$, que vai de $O = (0, 0, 0)$ até $C = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, é um representante de $\vec{u}$.
Os escalares $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ e $z_1 - z_0$ são chamados de coordenadas do vetor $\vec{u}$.

Exemplo: Sejam os pontos $A = (1, -1, 2)$ e $B = (3, -4, 3)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ com representante $\overrightarrow{AB}$. Além disso, esboce esse vetor no Espaço Cartesiano.

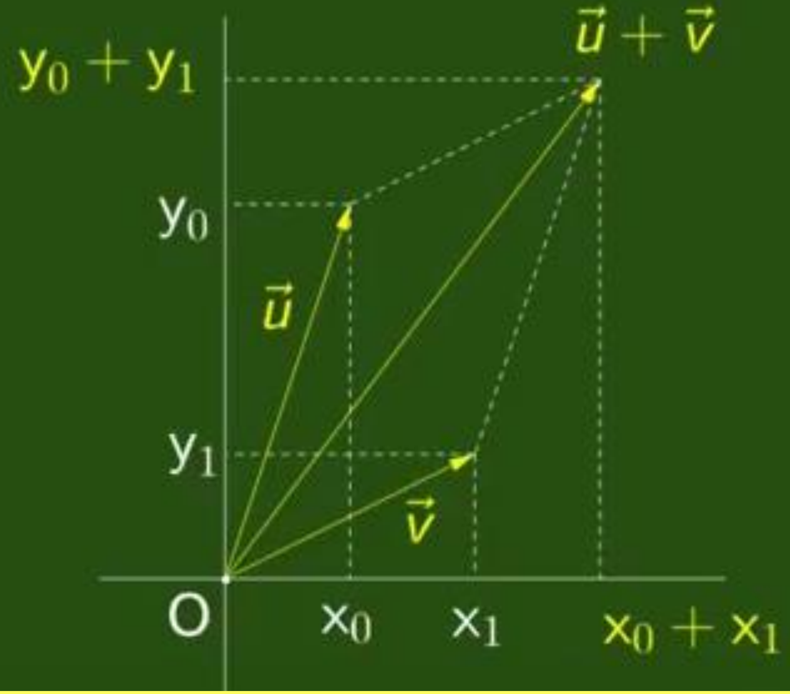
$\overrightarrow{AB}$ é representante de $\vec{u}$, sendo $A = (1, -1, 2)$ e $B = (3, -4, 3)$.

$$\vec{u} = B - A = (3 - 1, -4 - (-1), 3 - 2) = (2, -3, 1)$$



Operações com Vetores no Plano e no Espaço

Soma entre Vetores



Sejam os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1)$, sendo as coordenadas (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sobre um mesmo Plano Cartesiano. O vetor resultante da soma entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1).$$

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, sendo as coordenadas (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_1, z_1) sobre um mesmo Espaço Cartesiano. O vetor resultante da soma entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1).$$

Observação

Todas as propriedades da soma que são válidas no Plano, também serão válidas no Espaço.

Seja o vetor $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ representado sobre um Espaço Cartesiano. O vetor resultante do produto entre $\vec{u}$ e o escalar k é dado por

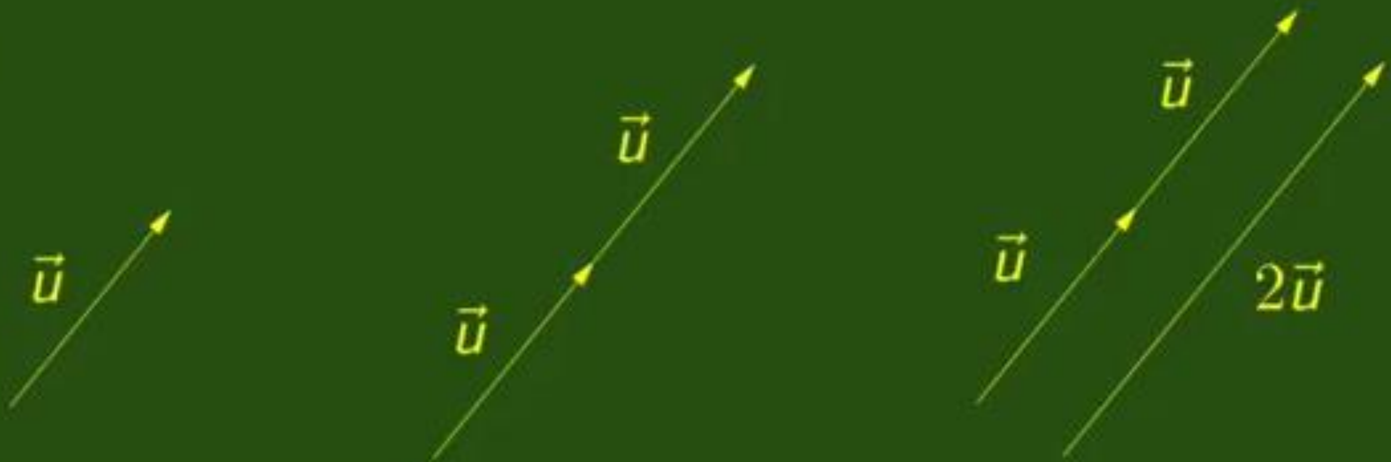
$$k\vec{u} = (kx_0, ky_0, kz_0).$$

Observação

Todas as propriedades do produto por escalar que são válidas no Plano, também serão válidas no Espaço.

Produto por Escalar

Considere o vetor $\vec{u}$ e o escalar 2. Como podemos multiplicar $\vec{u}$ por 2? É natural imaginar que $2\vec{u}$ deve ser o mesmo que $\vec{u} + \vec{u}$.



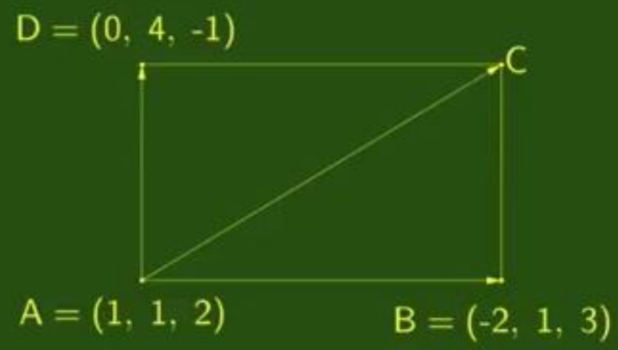
Generalizando

Para multiplicar o vetor $\vec{v}$ e o escalar k, obtendo assim $k\vec{v}$, precisamos determinar um vetor tal que:

- é $\vec{0}$, caso $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- tem a mesma direção de v (isto é, $k\vec{v} // \vec{v}$);
- tem comprimento $|k|$ vezes do comprimento de $\vec{v}$;
- tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ caso $k > 0$ e sentido contrário caso $k < 0$.

Exemplo 1: Seja o retângulo $ABCD$, no qual $A = (1, 1, 2)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $D = (0, 4, -1)$. Determine o vértice C. Em seguida, esboce esse retângulo no Espaço Cartesiano.

Na figura abaixo, temos que $A + \overrightarrow{AC} = C$.

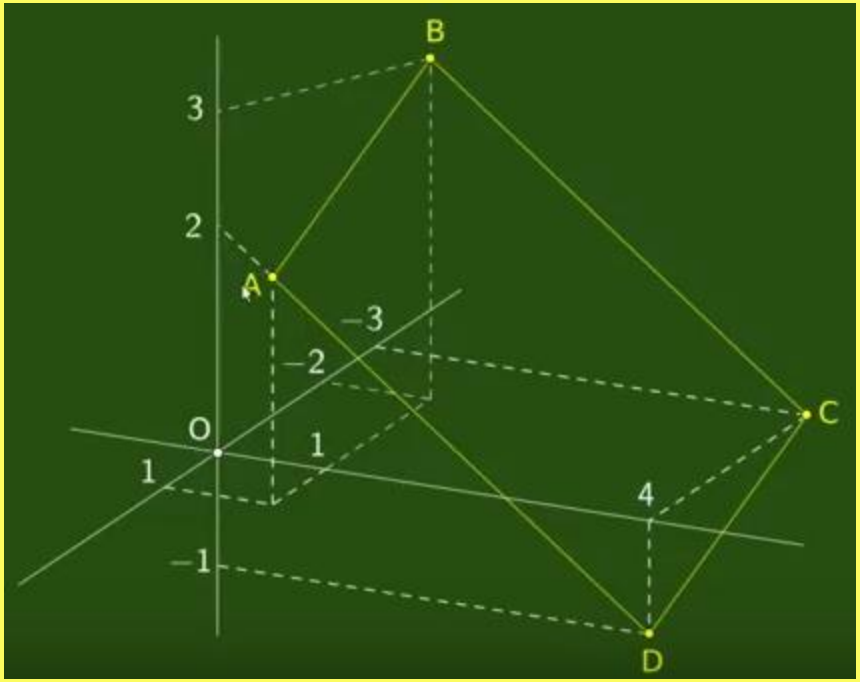


$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1, 3) - (1, 1, 2) = (-3, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 4, -1) - (1, 1, 2) = (-1, 3, -3)$$

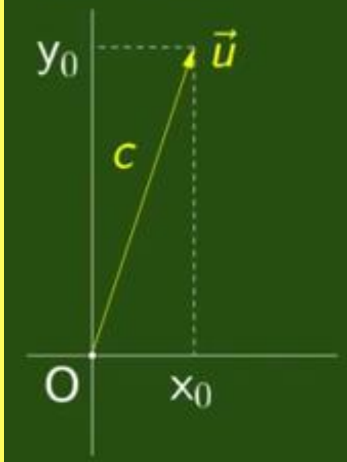
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (-3, 0, 1) + (-1, 3, -3) = (-4, 3, -2)$$

$$C = A + \overrightarrow{AC} = (1, 1, 2) + (-4, 3, -2) = (-3, 4, 0)$$



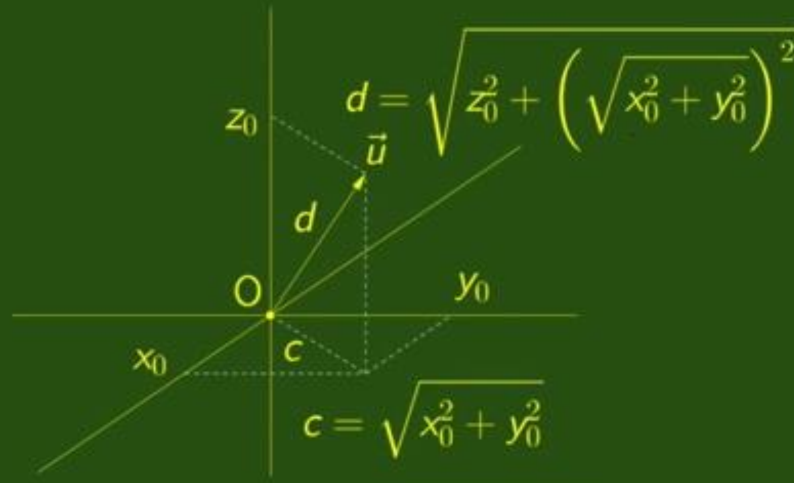
Módulo de Vetores

Noção intuitiva



$$c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

PLANO



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

ESPAÇO

Dados um escalar k e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer, as seguintes propriedades são válidas.

(i) $\|\vec{u}\| \geq 0$;

(ii) $\|\vec{u}\| = 0$, se e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$;

(iii) $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$;

(iv) (Desigualdade Triangular) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$;

Observação

Todas as propriedades do módulo que são válidas no Plano, também serão válidas no Espaço.

AFA - 2017

A adição de dois vetores de mesma direção e mesmo sentido resulta num vetor cujo módulo vale 8. Quando estes vetores são colocados perpendicularmente, entre si, o módulo do vetor resultante vale $4\sqrt{2}$. Portanto, os valores dos módulos destes vetores são:

a) 1 e 7. b) 2 e 6. c) 3 e 5. d) 4 e 4.

Solução. Considerando os vetores como u e v e seus módulos, temos:

$$\begin{cases} i)\ Mesma\ direção: |\vec{u}|+|\vec{v}|=8 \\ ii)\ Perpendiculares: |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{v}|=8-|\vec{u}| \\ |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=32 \end{cases} \Rightarrow |\vec{u}|^2+64-16.|\vec{u}|+|\vec{u}|^2=32 \Rightarrow$$

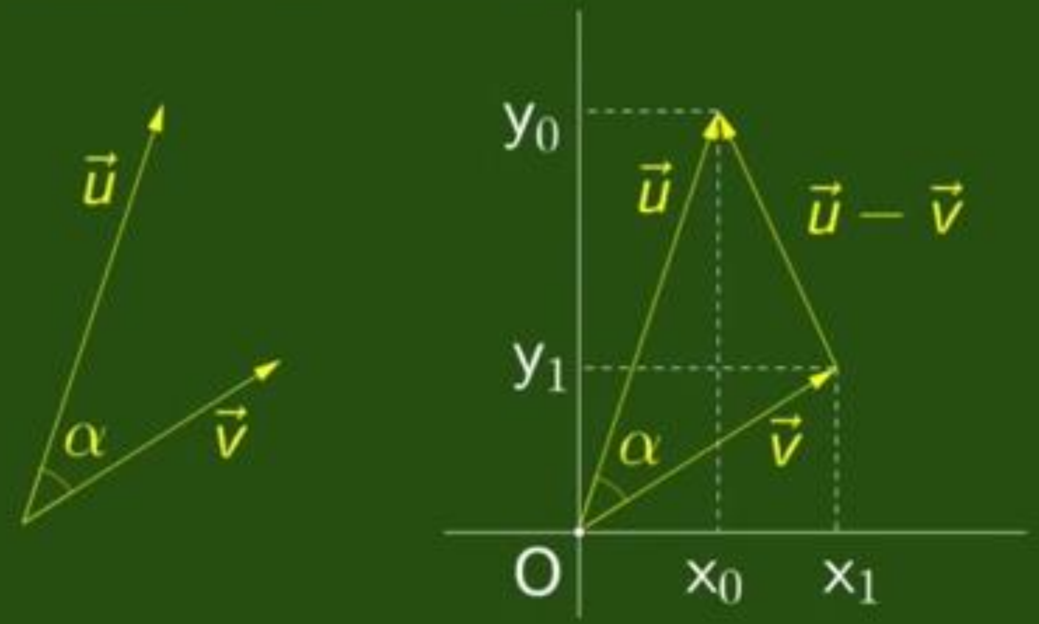
$$\Rightarrow 2.|\vec{u}|^2-16.|\vec{u}|+32=0 \Rightarrow |\vec{u}|^2-8.|\vec{u}|+16=0 \Rightarrow \left(|\vec{u}|-4\right)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|=4 \\ |\vec{v}|=8-4=4 \end{cases}$$

. (d)

Produto Interno

Noção intuitiva

Como calcular o ângulo formado entre dois vetores não nulos que estão sobre um mesmo plano?



Aplicando a Lei dos Cossenos, temos que:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$\left(\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)^2 - 2\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cos\alpha$$

$$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2 = x_0^2+y_0^2+x_1^2+y_1^2 - 2\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cos\alpha$$

$$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2 = x_0^2+y_0^2+x_1^2+y_1^2 - 2\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cos\alpha$$

$$-2(x_0x_1+y_0y_1) = -2\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x_0x_1+y_0y_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

Definição do Produto Interno no Plano

Sejam os vetores $\vec{u}=(x_0,\,y_0)$ e $\vec{v}=(x_1,\,y_1)$ sobre um mesmo Plano Cartesiano. Nós representamos o produto interno entre esses vetores através da notação $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sendo que definimos

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_0x_1 + y_0y_1$$

Observação

- Também usamos o termo produto escalar para se referir ao produto interno.
- Também representamos o produto interno através da notação $\langle\vec{u},\,\vec{v}\rangle$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então o ângulo α formado entre eles é tal que: $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

Dados um escalar k e três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer, as seguintes propriedades são válidas.

(i) (Comutativa) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(ii) (Distributiva) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

(iii) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Definição do Produto Interno no Espaço

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ sobre um mesmo Espaço Cartesiano. Nós representamos o produto interno entre esses vetores através da notação $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sendo que definimos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1$$

Observação

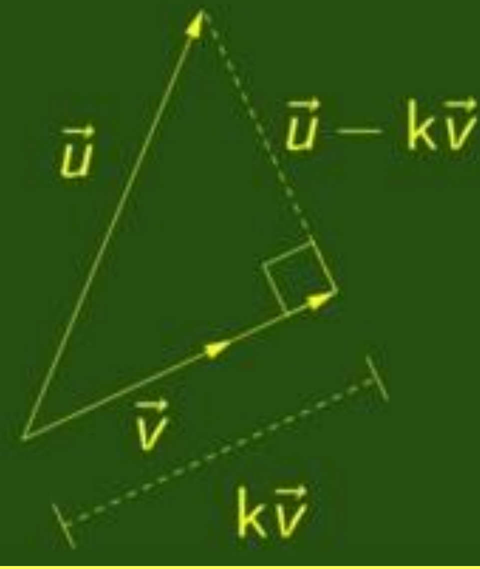
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então o ângulo α formado entre eles é tal que: $\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

OBS: Dois vetores ortogonais possuem o produto interno nulo.

Projeção Ortogonal

Noção intuitiva

Considere o vetor não nulo $\vec{u}$ e o vetor unitário $\vec{v}$. Qual é o valor do escalar k tal que $k\vec{v}$ seja ortogonal a $\vec{u} - k\vec{v}$?



Projeção Ortogonal

Noção intuitiva

Sabemos que se $k\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - k\vec{v}$, então $k\vec{v} \cdot (\vec{u} - k\vec{v}) = 0$. Desse modo, temos que:

$$(k\vec{v}) \cdot \vec{u} - (k\vec{v}) \cdot (k\vec{v}) = 0$$

$$k(\vec{v} \cdot \vec{u}) - k^2 \|\vec{v}\|^2 = 0$$

$$k(\vec{v} \cdot \vec{u}) - k^2 = 0$$

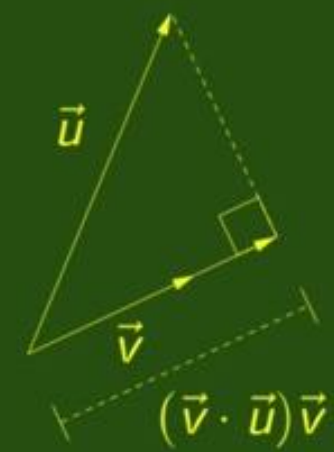
$$k(\vec{v} \cdot \vec{u} - k) = 0$$

$$k = 0 \text{ ou } \vec{v} \cdot \vec{u} - k = 0$$

Descartando a solução $k = 0$ (pois não é conveniente), temos que:

$$k = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Dizemos que o vetor $(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v}$ é a projeção ortogonal de $\vec{u}$ em $\vec{v}$.



Todo o procedimento anterior foi realizado considerando que $\vec{v}$ é unitário. Mas e se ele for um outro vetor não nulo qualquer? Como calcular a projeção ortogonal do vetor não nulo $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$? Basta tomar o vetor unitário $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right) \cdot \vec{u}\right]\left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right) &= \frac{1}{\|\vec{v}\|^2}[(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v}] \\
&= \frac{1}{\vec{v} \cdot \vec{v}}[(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v}] \\
&= \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} \\
&= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v}
\end{aligned}$$

Seja o vetor $\vec{u}$ e o vetor não nulo $\vec{v}$. Nós representamos a projeção ortogonal de $\vec{u}$ em $\vec{v}$ através da notação $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, sendo que definimos

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}.$$

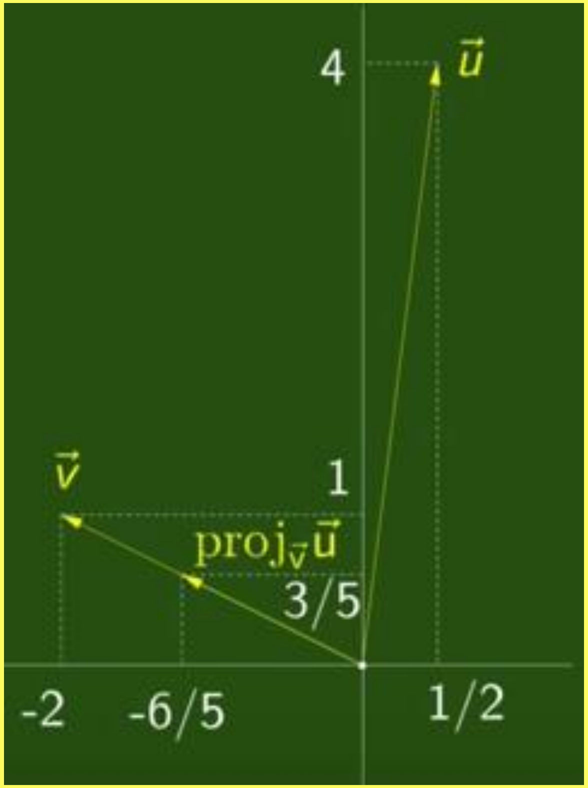
Observação

- Note que na definição de projeção o vetor $\vec{u}$ pode ser nulo.
- Essa definição de projeção é a mesma para vetores no plano ou no espaço.

Exemplo 1: Determine a projeção ortogonal do vetor $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ sobre o vetor $\vec{v} = (-2, 1)$. Em seguida, esboço no Plano Cartesiano esses vetores (isto é, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$).

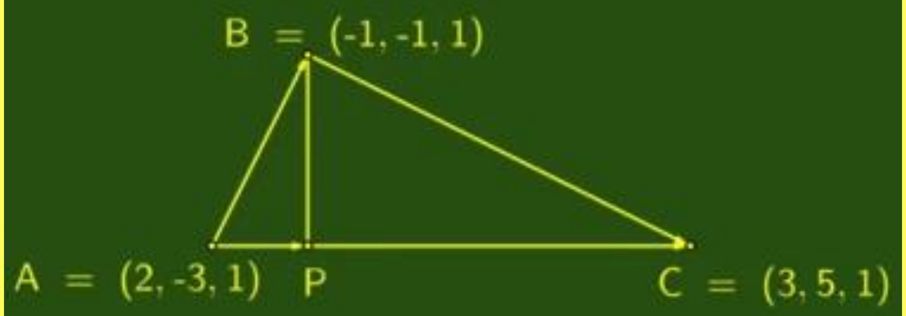
A projeção ortogonal de $\vec{u}$ em $\vec{v}$ será:

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 \cdot 1}{(-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1} (-2, 1) \\
&= \frac{3}{5} (-2, 1)
\end{aligned}$$



Exemplo 2: Os pontos $A = (2, -3, 1)$, $B = (-1, -1, 1)$ e $C = (3, 5, 1)$ formam um triângulo retângulo ABC, reto em B. Determine o ponto P que é a interseção entre a altura do triângulo referente ao lado $\overline{AC}$ e o próprio lado $\overline{AC}$. (Esse ponto P é chamado de "pé da altura".)

A figura abaixo ilustra o exercício.



Note que: $\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 1) - (2, -3, 1) = (-3, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (3, 5, 1) - (2, -3, 1) = (1, 8, 0)$$

$$\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AC} = \frac{13}{65}(1, 8, 0) = \frac{1}{5}(1, 8, 0)$$

Por outro lado,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (2, -3, 1) = \frac{1}{5}(1, 8, 0).$$

Resolvendo essa equação, é fácil obter que:

$$P = \left(\frac{11}{5}, -\frac{7}{5}, 1\right).$$

2ª Questão.

A projeção ortogonal de A sobre a reta BC, sabendo que A = (3,7), B = (1,1) e C = (9,6), terá as coordenadas de projeção:

a) x = 468/85; y = 321/89 b) x = 478/87; y = 319/87 c) x = 487/84; y = 321/87

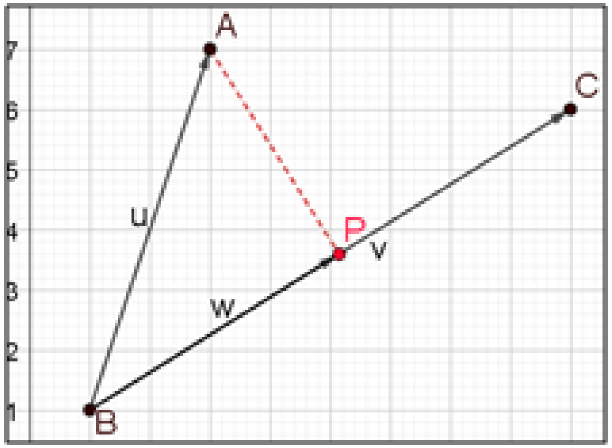
d) x = 457/89; y = 319/89 e) x = 472/85; y = 295/89

Solução. Utilizando a fórmula da projeção, temos:

$$i)\begin{cases}\vec{u}=A-B=(2,6)\\ \vec{v}=C-B=(8,5)\end{cases}\Rightarrow \vec{w}=proj_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}.\vec{v}=\frac{(2).(8)+(6).(5)}{(8).(8)+(5).(5)}.(8,5)=\frac{46}{89}.(8,5)=\left(\frac{368}{89},\frac{230}{89}\right)$$

. (d)

$$ii)\ P=B+\vec{w}=(1,1)+\left(\frac{368}{89},\frac{230}{89}\right)=\left(1+\frac{368}{89},1+\frac{230}{89}\right)=\left(\frac{457}{89},\frac{319}{89}\right)$$



2ª Questão.

A projeção ortogonal de A sobre a reta BC, sabendo que A = (3,7), B = (1,1) e C = (9,6), terá as coordenadas de projeção:

a) x = 468/85; y = 321/89 b) x = 478/87; y = 319/87 c) x = 487/84; y = 321/87

d) x = 457/89; y = 319/89 e) x = 472/85; y = 295/89

Equação da reta r :

$m_r = (6 - 1)/(9 - 1) = 5/8 \rightarrow y - 1 = 5/8 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 5x/8 + 3/8$

Equação da reta s :

$m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow 5/8 \cdot m_s = -1 \rightarrow m_s = -8/5 \rightarrow y - 7 = -8/5 \cdot (x - 3) \rightarrow$

$y = -8x/5 + 59/5$

O ponto P é obtido resolvendo-se o sistema linear abaixo: $y = 5x/8 + 3/8$

e $y = -8x/5 + 59/5 \rightarrow 5x/8 + 3/8 = -8x/5 + 59/5 \rightarrow x = 457/89$ **e** $y = 319/89$

Assim, as coordenas da projeção são: P(457/89, 319/89)

Produto Vetorial

Noção intuitiva

Vamos criar uma forma algébrica de determinar um vetor $\vec{w}$ que seja ao mesmo tempo ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Considere os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ sobre um mesmo Espaço Euclidiano. Desejamos determinar $\vec{w} = (x, y, z)$ tal que:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{w} \\ \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0 \\ x_1 x + y_1 y + z_1 z = 0 \end{cases}$$

Esse sistema de equações possui infinitas soluções. Em particular, uma possível solução será:

$$x = y_0 z_1 - y_1 z_0 \qquad y = x_1 z_0 - x_0 z_1 \qquad z = x_0 y_1 - x_1 y_0.$$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Note que o vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ pode ser escrito como:

$$\vec{w} = x\vec{i} + v\vec{i} + z\vec{k}$$
$$\vec{w} = (y_0 z_1 - y_1 z_0)\vec{i} + (x_1 z_0 - x_0 z_1)\vec{j} + (x_0 y_1 - x_1 y_0)\vec{k}$$

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

Exemplo.: Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 3, 1)$, determine um vetor $\vec{w}$ que seja ao mesmo tempo ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

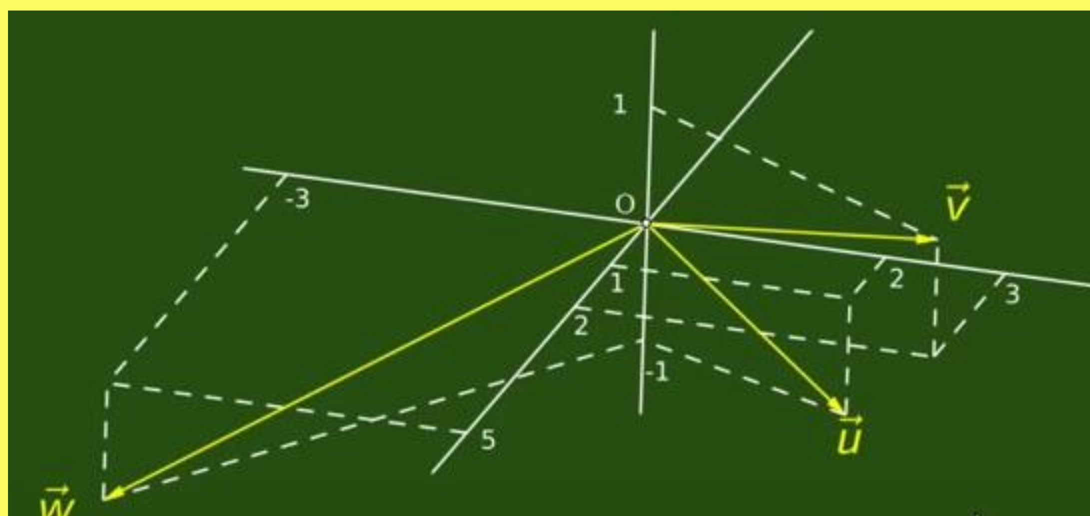
Sabemos que um possível vetor $\vec{w}$ é dado por:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{w} = [2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)]\vec{i} + [2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1]\vec{j} + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)\vec{k}$$

$$\vec{w} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

Portanto, o vetor $\vec{w} = (5, -3, -1)$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao mesmo tempo.



Sejam os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ sobre um mesmo Espaço Cartesiano. Nós representamos o produto vetorial entre esses vetores através da notação $\vec{u} \times \vec{v}$, sendo que definimos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

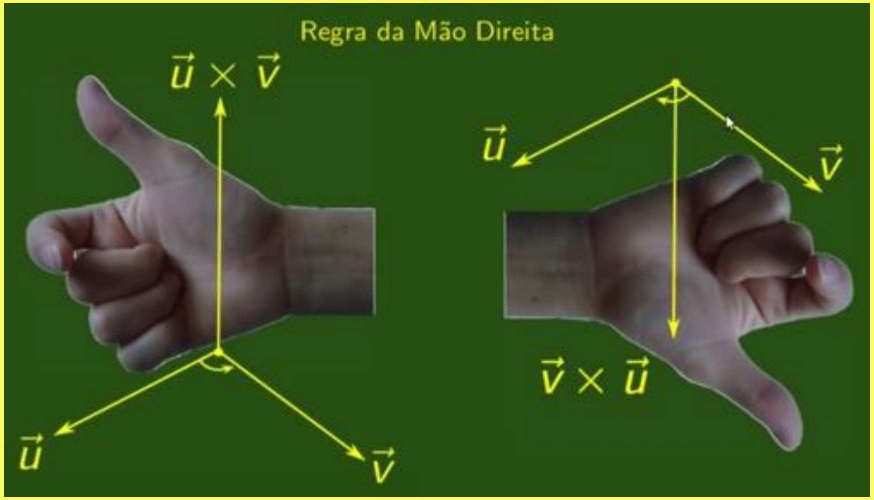
Dados um escalar k e três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer, as seguintes propriedades são válidas.

(i) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;

(ii) (Distributiva a Esquerda) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;

(iii) (Distributiva a Direita) $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$;

(iv) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$.



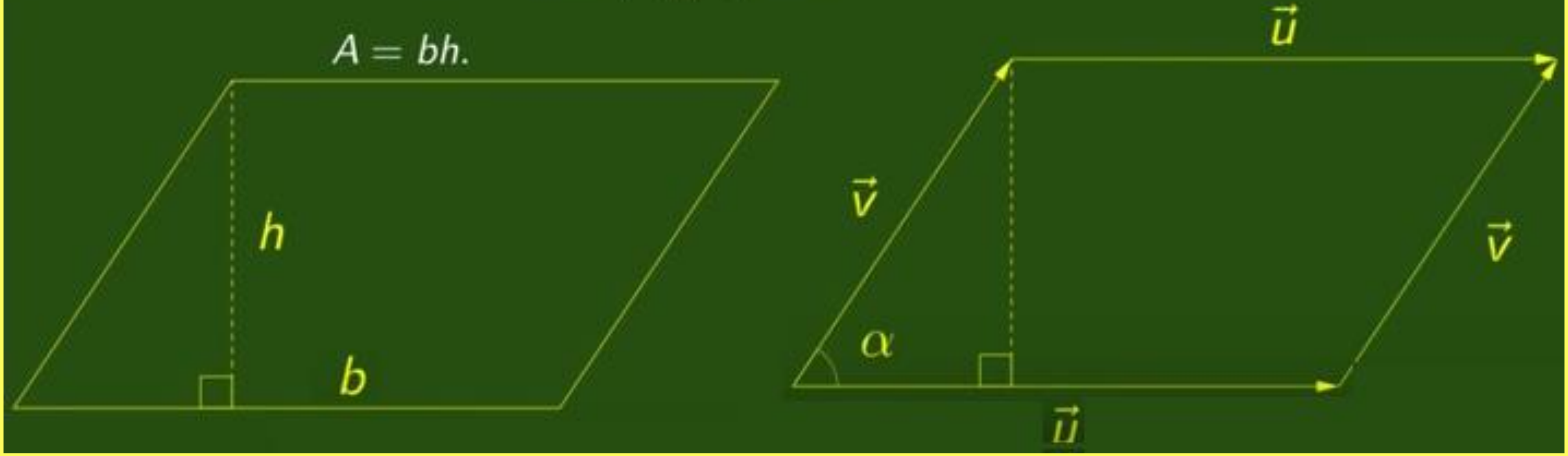
Área do Paralelogramo

Noção intuitiva

Vamos considerar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representam os lados do paralelogramo. Note que a sua base será $\|\vec{u}\|$ e a sua altura será $\|\vec{v}\| \operatorname{sen} \alpha$. Portanto, a área desse paralelogramo será

$$A = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \alpha.$$

$$A = bh.$$



Temos que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

$$1-\operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2$$

$$1-\left(\frac{A}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2 = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2$$

$$A^2 = (\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

$$A = \sqrt{(\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2\,.$$

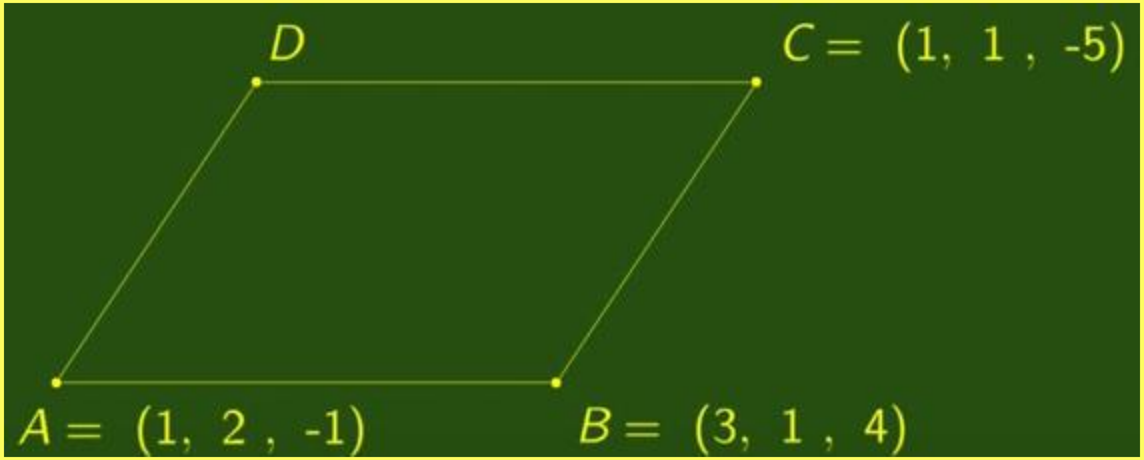
Sendo assim, podemos dizer que

$$A = \sqrt{(\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

$$A = \sqrt{\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2}$$

$$A = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

Exemplo 1: O paralelogramo $ABCD$ é tal que $A=(1,\,2,\,-1)$, $B=(3,\,1,\,4)$ e $C=(1,\,1,\,-5)$. Determine a área desse paralelogramo.



Temos então que:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2, -1) - (3, 1, 4) = (-2, 1, -5)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 1, -5) - (3, 1, 4) = (-2, 0, -9)$$

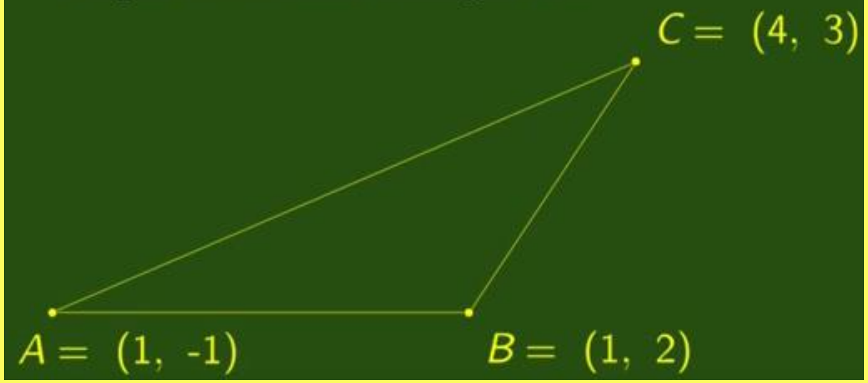
$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k} = (-9, -8, 2)$$

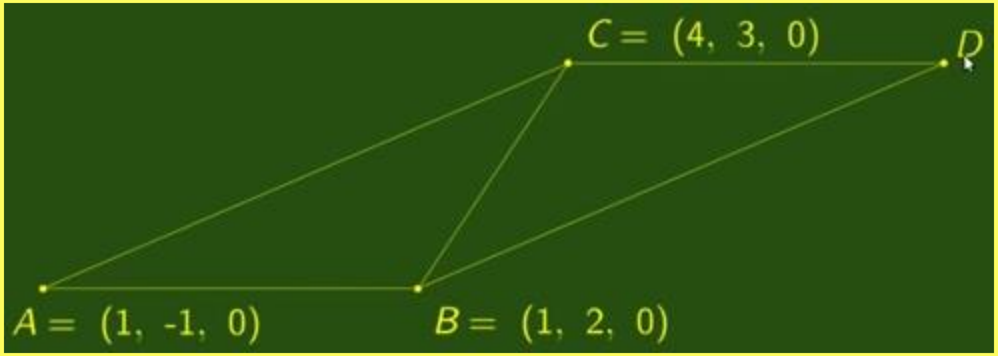
$$\left\| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{(-9)^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{149}$$

Portanto, a área de $ABCD$ é igual a $\sqrt{149}$ u.a. (unidade de área).

Exemplo 2: Calcule a área do triângulo ABC, tal que $A = (1, -1)$, $B = (1, 2)$ e $C = (4, 3)$

A figura abaixo ilustra o triângulo ABC.





Temos então que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 0) - (1, -1, 0) = (0, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 3, 0) - (1, -1, 0) = (3, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 9\vec{k} = (0, 0, -9)$$

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-9)^2} = 9$$

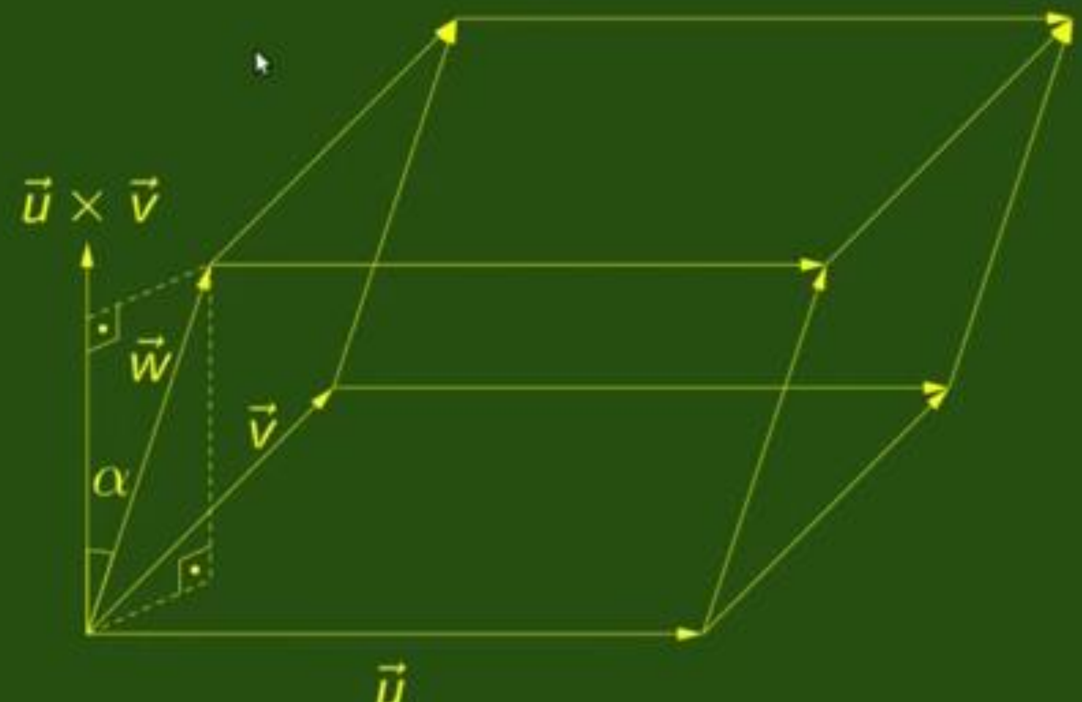
Portanto, a área de ABC é igual a $\frac{9}{2}$ u.a. (unidade de área).

Volume do Paralelepípedo

Noção intuitiva

Vamos considerar que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam as arestas do paralelepípedo. Note que a sua altura será $|\|\vec{w}\| \cos\alpha|$ e a área de sua base será $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$. Portanto, o seu volume será dado por

$$V = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \, |\|\vec{w}\| \cos\alpha| \,.$$



Sendo α o ângulo formado entre $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$, sabemos que

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}.$$

Desse modo, temos que

$$V = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \, |\|\vec{w}\| \cos\alpha|$$

$$V = |\|\vec{u} \times \vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\alpha|$$

$$V = \left| \|\vec{u} \times \vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \, \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\| \, \|\vec{w}\|} \right|$$

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Considerando que $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$, temos que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (y_0 z_1 - y_1 z_0)x_2 + (x_1 z_0 - x_0 z_1)y_2 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)z_2$$

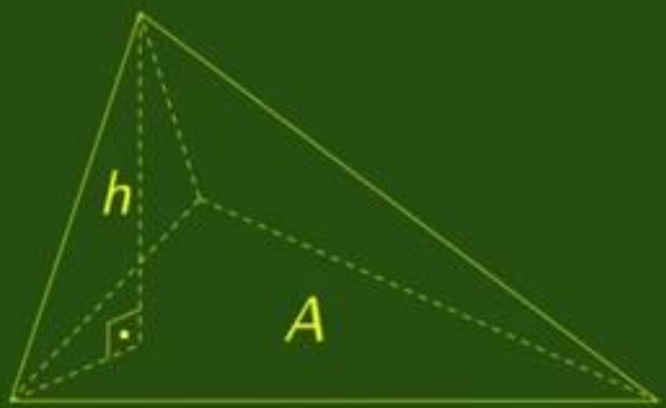
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

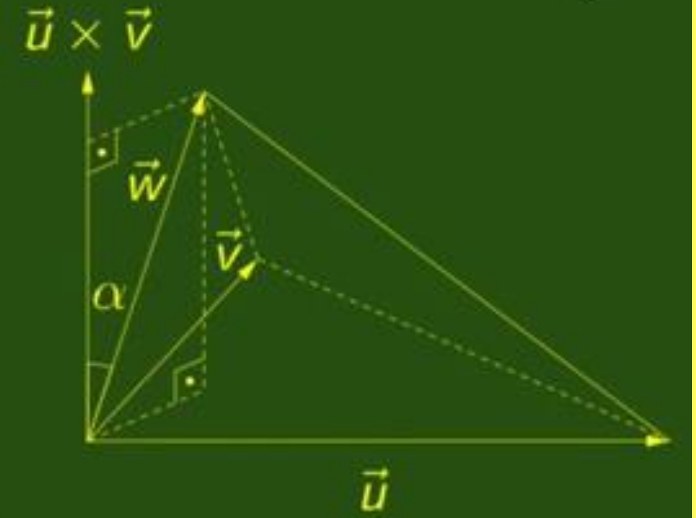
⇨ **Produto misto**

VOLUME DO TETRAEDRO

Sabemos que o volume V de um tetraedro de altura h e área da base A é dado por

$$V = \frac{1}{3}Ah.$$





$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|\right)|\|\vec{w}\| \cos\alpha|$$

$$V = \frac{1}{6}|\|\vec{u} \times \vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos\alpha|$$

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Exemplo 1: As arestas de um paralelepípedo são representadas pelos vetores $\vec{u} = (1, 0, -2)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-4, 5, -1)$. Calcule o volume desse paralelepípedo.

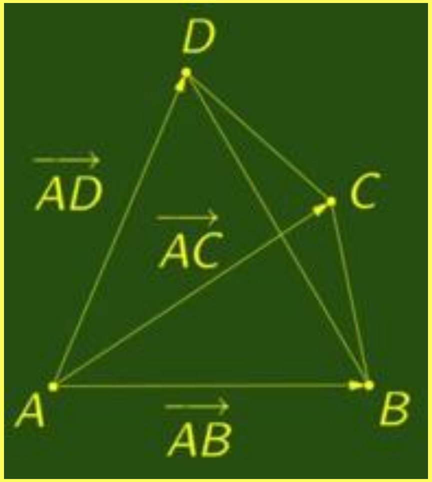
Temos que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -44$$

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |-44| = 44$$

Portanto, o volume do paralelepípedo será igual a 44 u.v. (unidade de volume).

Exemplo 2: Considere que os vértices de um tetraedro são $A = (1, 1, -2)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (3, 1, 2)$. Calcule o volume desse tetraedro.



Temos que: $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 1) - (1, 1, -2) = (1, -1, 3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 3, 4) - (1, 1, -2) = (3, 2, 6)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (3, 1, 2) - (1, 1, -2) = (2, 0, 4)$

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|-4| = \frac{2}{3} \text{ u.v..}$$

EFOMM - 2017

3ª Questão.

Um paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}=(a,a,a)$, $\vec{v}=(2a,2a,3a)$ e $\vec{w}=(2a,a,a)$, com $a \in R_+$ tem volume igual a 8. Determine o valor de **a**.

a) 1 b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) $\frac{5}{2}$

Solução. Utilizando a fórmula com determinante, temos:

$$i)\ V=\begin{vmatrix} a & a & a \\ 2a & 2a & 3a \\ 2a & a & a \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} a & a & a \\ 2a & 2a & 3a \\ 2a & a & a \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & a \\ 2a & 2a \\ 2a & a \end{matrix}\right|=(2a^3+6a^3+2a^3)-(4a^3+3a^3+2a^3)=a^3$$ **. (b)**

$$ii)\ V=8 \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow a=2$$

4ª Questão.

Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$ calcule x para que o volume determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja de 24 u. v.

Solução. Utilizando a fórmula, temos:

$$i)\ V = \begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & 5 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right| = (2x+5+0)-(0+x-15) = x+20$$

$$ii)\ V = 24 \Rightarrow x+20 = 24 \Rightarrow x = 24-20 \Rightarrow x = 4$$

5ª Questão.

Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo A(2, 0, 0), B(2,4,0), C(0,3,0) e P(2, -2, 9). Qual a altura relativa ao vértice P?

Solução. Utilizando a fórmula, temos:

$$i)\begin{cases}\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,0)\\ \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,3,0)\\ \overrightarrow{AP} = P - A = (0,-2,9)\end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}.\left\|\begin{matrix}0 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 9\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}.\left\|\begin{matrix}0 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 9\end{matrix}\left|\begin{matrix}0 & 4\\ -2 & 3\\ 0 & -2\end{matrix}\right.\right\| = \frac{1}{6}.|(0)-(-72)| = 12\ u.v$$

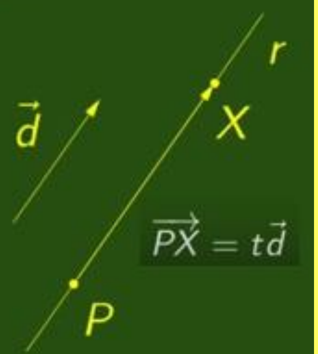
$$ii)\ V = \frac{Área_{base}.h}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 0\end{matrix}\right\|.h = 12 \Rightarrow |(0,0,8)|.h = 72 \Rightarrow 8h = 72 \Rightarrow h = \frac{72}{8} = 9\ u.c$$

Equações da Reta

Equação Vetorial da Reta

Seja P um ponto da reta r e $\vec{d}$ um vetor com a mesma direção de r. A equação vetorial da reta r é definida como

$$X = P + t\vec{d}.$$



Observação

- O vetor $\vec{d}$ é chamado de vetor diretor da reta.
- Uma reta possui infintos vetores diretores.
- O escalar t é chamado de parâmetro.
- A equação vetorial tem o mesmo formato, não importando se a reta está no plano ou no espaço.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da reta r e $\vec{d} = (a, b)$ um vetor com a mesma direção de r, sendo que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

As equações paramétricas da reta r são definidas como

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

A equação na forma simétrica da reta r é definida como

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Seja $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto da reta r e $\vec{d} = (a, b, c)$ um vetor com a mesma direção de r.

$$\text{paramétricas} \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad \text{simétrica} \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Equação vetorial x Equação cartesiana

Como vimos anteriormente, a equação na forma simétrica da reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e que tem a mesma direção do vetor $\vec{d} = (p, q)$ (com $p \neq 0$ e $q \neq 0$), possui o formato

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Desenvolvendo essa equação, temos que:

$$q(x - x_0) = p(y - y_0)$$

$$qx - qx_0 = py - py_0$$

$$qx - py - qx_0 + py_0 = 0$$

Chamando $a = q$, $b = -p$ e $c = -qx_0 + py_0$, podemos dizer que:

$$ax + by + c = 0.$$

OBS: 1) O vetor u = (a, b) é perpendicular à reta , pois <u,d> = (q).(p) + (-p).(q) = 0.

2) Não há uma equação cartesiana definida para uma reta no espaço.

6ª Questão.

Determine a equação da reta que passa pelo ponto (1,2) e que seja paralela à direção do vetor $\vec{v} = (-1, 1)$

Solução. Escrevendo a equação vetorial e determinando a Equação cartesiana da reta, temos:

$$i)\ r : (x, y) = (1,2) + t.(-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \Rightarrow t = 1 - x \\ y = 2 + t \Rightarrow t = y - 2 \end{cases}.$$

$$ii)\ 1 - x = y - 2 \Rightarrow x + y - 3 = 0 \rightarrow Eq.\ cartesiana$$

7ª Questão.

Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto (1,– 1) e que é perpendicular à reta 2x + y = 1.

Solução. O vetor perpendicular à reta 2x + y = 1 é (2, 1). Logo esse vetor é diretor da reta pedida. Temos: $\boxed{r : P = (1, -1) + t.(2, 1)}$.

8ª Questão.

Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja paralela à reta dada:

a) (2, –5) e x – y = 1; b) (1, –2) e 2x + y = 3.

Solução. A reta paralela pedida possui como vetor diretor, o vetor perpendicular à reta dada. Temos:

a) $$\begin{cases} \text{Reta dada} : x - y = 1 \rightarrow u_{\perp} = (1, -1) \\ u = (-1, -1) \end{cases} \Rightarrow \text{Reta pedida} : r : P = (2, -5) + t.(-1, -1).$$

b) $$\begin{cases} \text{Reta dada} : 2x + y = 1 \rightarrow u_{\perp} = (2, 1) \\ u = (1, -2) \end{cases} \Rightarrow \text{Reta pedida} : r : P = (1, -2) + t.(1, -2).$$

Equações do Plano

Seja P um ponto de π e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores com direções distintas, mas que são paralelos a π.

$$\overrightarrow{PX} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Seja P um ponto de π e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores com direções distintas, mas que são paralelos a π.

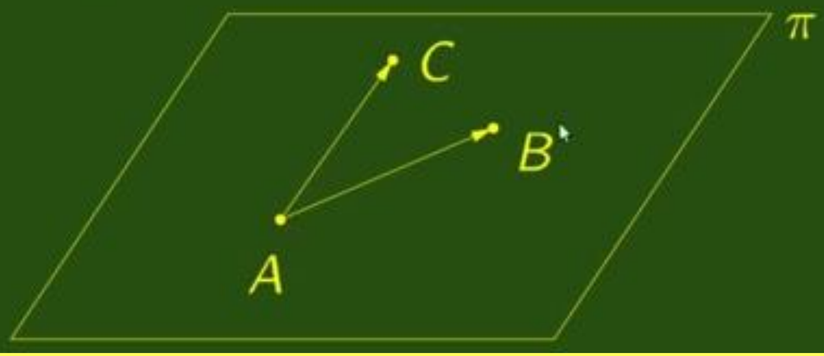
$$\overrightarrow{PX} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Temos então que: $\overrightarrow{PX} = a\vec{u} + b\vec{v} \implies X - P = a\vec{u} + b\vec{v} \implies X = P + a\vec{u} + b\vec{v}$

- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de vetores diretores do plano.
- Os escalares a e b são chamados de parâmetros.

Exemplo 1: Seja o plano π que contém os pontos não colineares $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, 0, 3)$ e $C = (2, 1, 2)$. Determine uma equação vetorial de π.

Note que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ serão vetores diretores do plano π.



Sabemos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0, 3) - (1, 2, 3) = (-2, -2, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1, 2) - (1, 2, 3) = (1, -1, -1).$$

Desse modo, uma equação vetorial de π será dada por

$$X = A + a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \implies X = (1, 2, 3) + a(-2, -2, 0) + b(1, -1, -1).$$

Como vimos anteriormente, a equação vetorial do plano tem o formato

$$X = P + a\vec{u} + b\vec{v}$$

Considerando que $X = (x, y, z)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (g, h, i)$ e $\vec{v} = (j, l, m)$, temos que

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + a(g, h, i) + b(j, l, m)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ag + bj \\ y = y_0 + ah + bl \\ z = z_0 + ai + bm \end{cases} .$$

Seja $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π e $\vec{u} = (g, h, i)$ e $\vec{v} = (j, l, m)$ dois vetores com direções distintas, mas que são paralelos a π. As equações paramétricas do plano π são definidas como

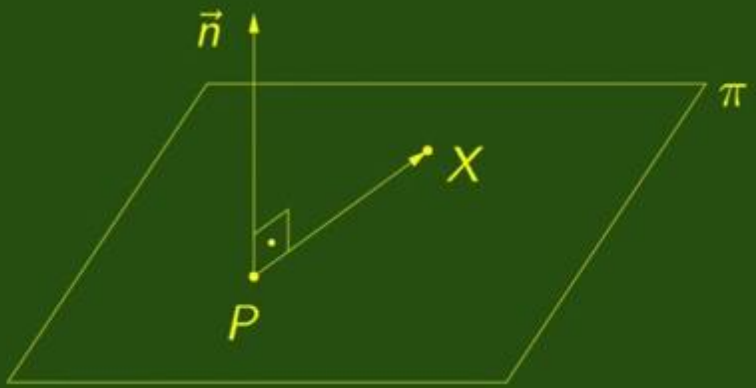
$$\begin{cases} x = x_0 + ag + bj \\ y = y_0 + ah + bl \\ z = z_0 + ai + bm \end{cases} .$$

Equações do Plano

Noção intuitiva

Para que um ponto X pertença a π, note que devemos ter

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0.$$



Considerando que $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (a, b, c)$ e $X = (x, y, z)$, temos que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Desenvolvendo a equação anterior, temos que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

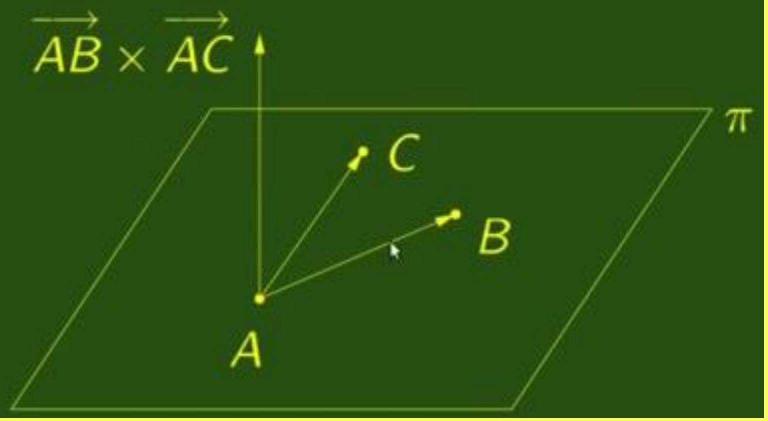
$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Definindo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, podemos escrever a equação no formato

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Exemplo : Seja o plano π que contém os pontos não colineares $A = (3, 4, -1)$, $B = (1, 3, -2)$ e $C = (2, 2, -1)$. Determine a equação geral de π.

Note que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ será um vetor normal do plano π.



Sabemos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3, -2) - (3, 4, -1) = (-2, -1, -1).$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 2, -1) - (3, 4, -1) = (-1, -2, 0).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3).$$

Desse modo, usando o ponto $A = (3, 4, -1)$ temos que a equação geral de π será dada por

$$(-2)\cdot(x-3) + 1\cdot(y-4) + 3\cdot[z-(-1)] = 0 \implies -2x + y + 3z + 5 = 0$$

EFOMM 2013

9ª Questão.

Seja ***ax* + *by* + *cz* + *d* = 0** a equação do plano que passa pelos pontos (4, - 2, 2) e (1, 1, 5) e é perpendicular ao plano 3x – 2y + 5z – 1 = 0.

A razão d/b é

a) - 5/4. b) 4/7. c) 8. d) - 1/2. e) 2/5.

Solução. O vetor normal ao plano 3x – 2y + 5z – 1 = 0 é n = (3, – 2, 5). Esse vetor é perpendicular ao vetor normal (a, b, c) do plano dado. Além disso, os pontos dados satisfazem à equação desse plano. Representando as informações em um sistema, temos:

$$i)\begin{cases}4a-2b+2c+d=0\\ a+b+5c+d=0\\ 3a-2b+5c=0\end{cases}\begin{matrix}\\ \to L_1-4.L_2\\ 3L_1-4.L_3\end{matrix}\begin{cases}4a-2b+2c+d=0\\ -6b-18c-3d=0\\ 2b-14c+3d=0\end{cases}\begin{matrix}\\ \to\\ L_2+3L_3\end{matrix}\begin{cases}4a-2b+2c+d=0\\ -6b-18c-3d=0\\ -60c+6d=0\Rightarrow d=10c\end{cases}$$

. (a)

$$ii)\ -6b-18c-3d=0\Rightarrow -6b-18\left(\frac{d}{10}\right)-3d=0\Rightarrow -60b-18d-30d=0\Rightarrow -48d=60b\Rightarrow \frac{d}{b}=-\frac{60}{48}=-\frac{5}{4}$$

10ª Questão.

Determine a equação do plano que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à direção do vetor $\vec{n}$ dado:

$$(1,1,1) \text{ e } \vec{n} = (2,1,3)$$

Solução. As coordenadas do vetor normal serão os coeficientes da equação. Temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ \pi:\begin{cases} 2x+y+3z+d=0 \\ (1,1,1)\in\pi \end{cases} \Rightarrow 2.(1)+(1)+3.(1)+d=0 \Rightarrow d=-6 \\ ii)\ Equação: 2x+y+3z-6=0 \end{array}}.$$

11ª Questão.

Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular ao plano dado:

$$(0,1,-1) \text{ e } x+2y-z=3$$

Solução. Os coeficientes da equação do plano serão as coordenadas do vetor diretor da reta. Temos:

$$\boxed{r: P=(0,1,-1)+t.(1,2,-1)}.$$

12ª Questão.

Obtenha a equação geral do plano π que passa pelo ponto A = (1,1,0), B = (1,–1, –1) e é paralelo ao vetor $\vec{v}=(2,1,0)$.

Solução. O vetor normal será o produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$. coeficientes da equação do plano serão as coordenadas do vetor diretor da reta. Temos:

$$\boxed{\begin{cases} i)\begin{cases} \overrightarrow{AB}=B-A=(0,-2,-1) \\ \vec{v}=(2,1,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(1,-2,4) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to \pi: x-2y+4z+1=0 \\ ii)\begin{cases} \pi: x-2y+4z+d=0 \\ A\in\pi \end{cases} \Rightarrow (1)-2.(1)+4.(0)+d=0 \Rightarrow d=1 \end{cases}}.$$