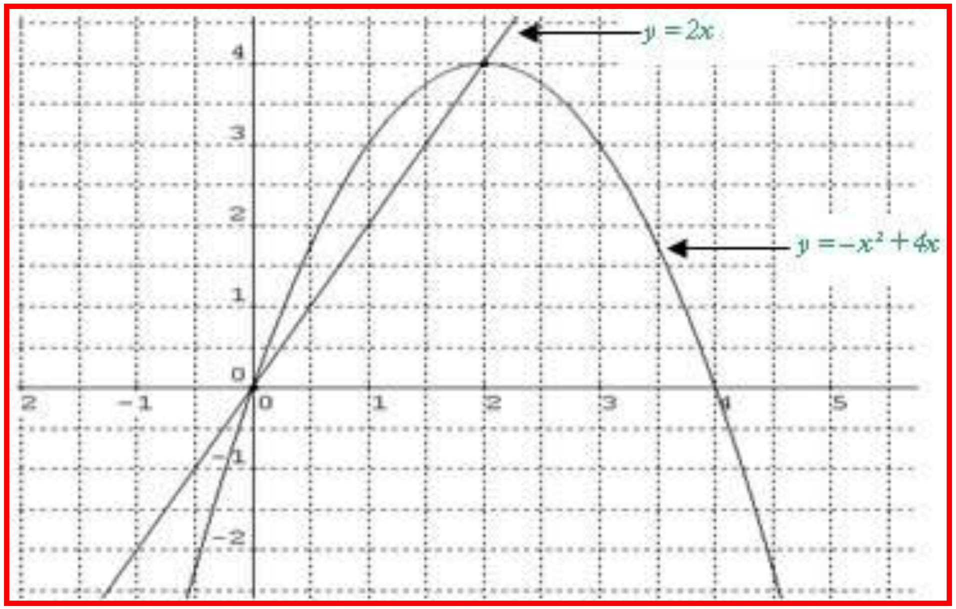
Funções: Afim e Quadrática

21/4/2018



Prof. Walter Tadeu

www.professorwaltertadeu.mat.br

Funções Polinomiais de 1° grau

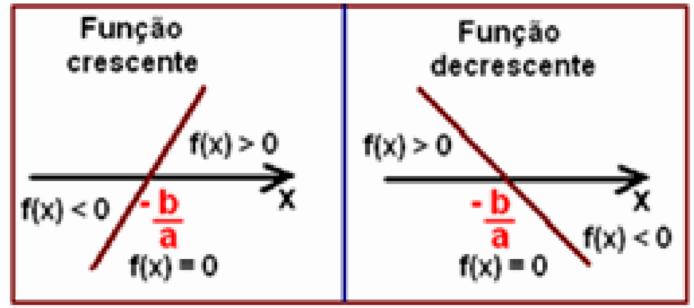
- **Zero da função**: é o valor de **x** para qual a função se anula: **f(x) = 0 → x =** $-\dfrac{b}{a}$;

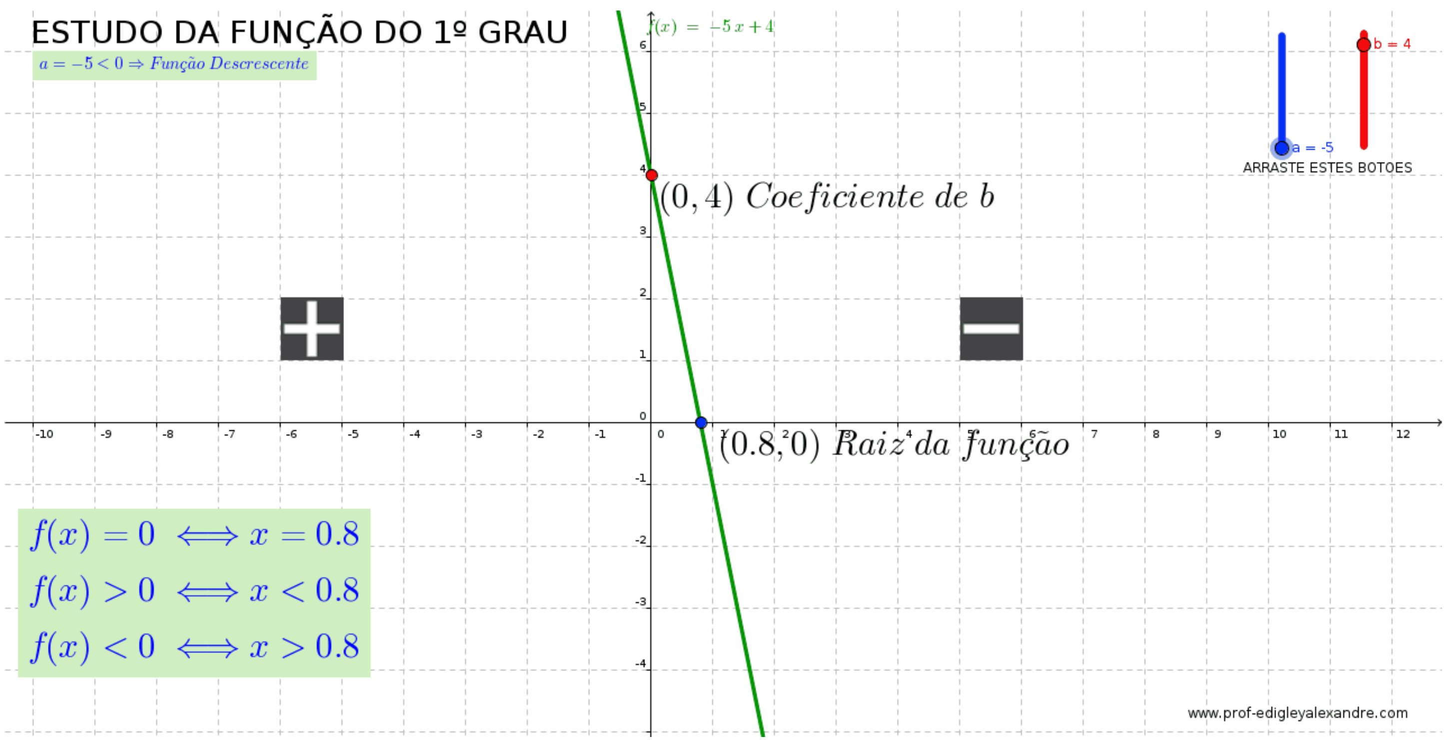
- Estudo do sinal:

$f(x) < 0 \rightarrow$ imagem negativa

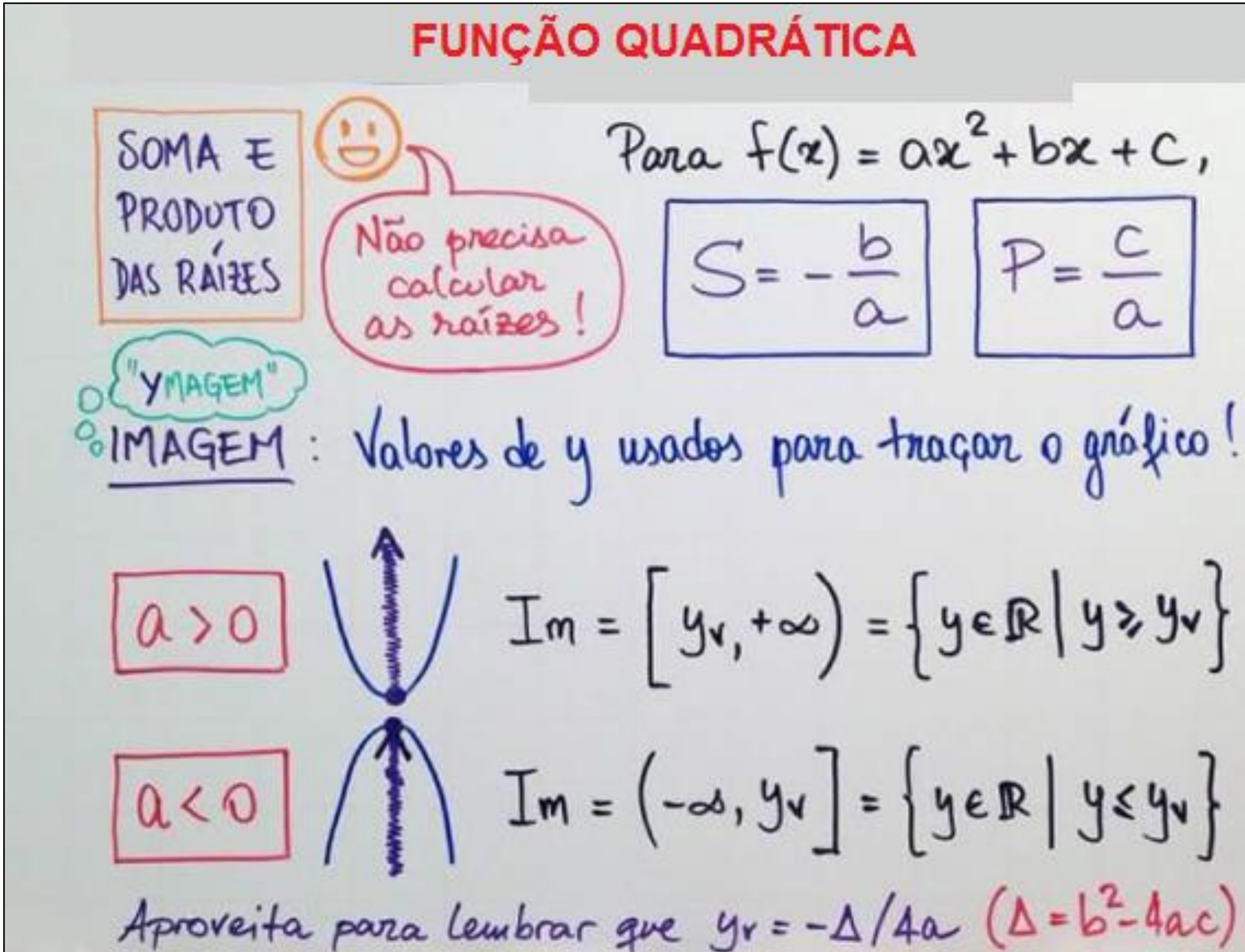
$f(x) = 0 \rightarrow$ imagem nula

$f(x) > 0 \rightarrow$ imagem positiva





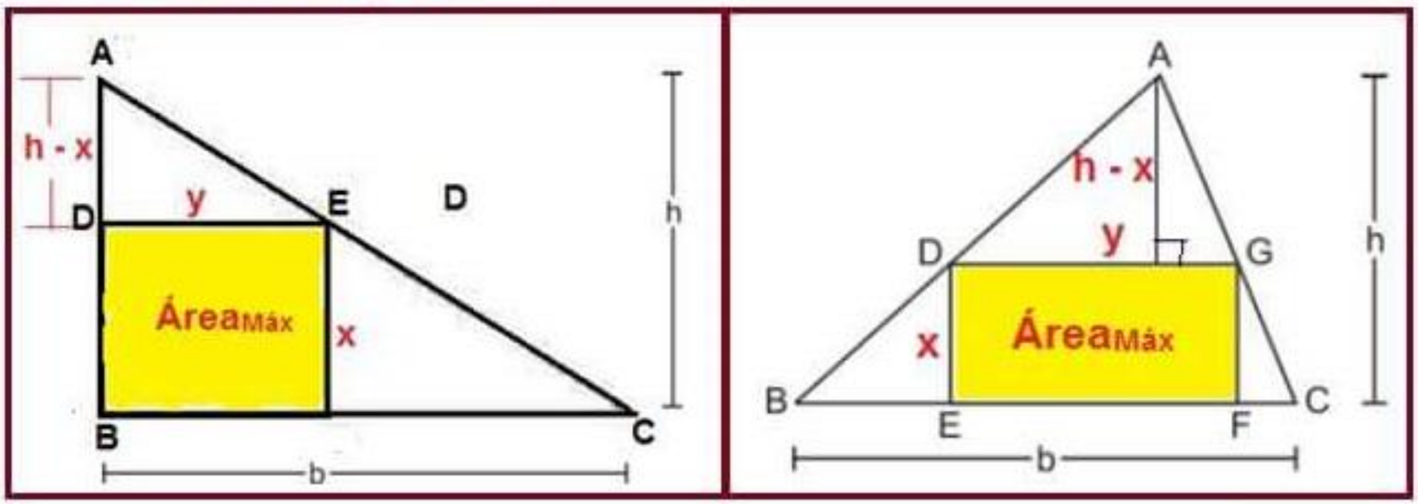
Funções Polinomiais de 2° grau



Uma aplicação em Geometria

A área máxima do retângulo inscrito em um triângulo pode ser calculada pelo produto da metade da medida da base (b) pela metade da medida da altura (h) do triângulo.

Utilizando semelhança, temos:



$$i)\ \frac{h-x}{h}=\frac{y}{b}\Rightarrow hy=bh-bx\Rightarrow y=\frac{bh-bx}{h}=b-\frac{bx}{h}$$

$$ii)\ \text{Área (retângulo)}=x.y=x\left(b-\frac{bx}{h}\right)=-\frac{bx^2}{h}+bx$$

$$iii)\ \text{Área (máxima)}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(b)^2-4\left(-b/h\right)(0)}{4\left(-b/h\right)}=-\frac{b^2}{-4b/h}=\frac{b^2.h}{4b}=\frac{b.h}{4}=\frac{b}{2}.\frac{h}{2}$$

1ª Questão

(ENEM) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (**n**), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (**n**), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$ b) $100n + 150 = 120n + 350$ c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$ e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

Solução.

A empresa A: $y_A = an + b \Rightarrow y_A = 100000.n + 350000$

A empresa B: $y_B = an + b \Rightarrow y_B = 120000.n + 150000$

O valor cobrado pelas duas empresas será o mesmo quando $y_A = y_B$, então, temos:

$y_A = y_B \Rightarrow 100000.n + 350000 = 120000.n + 150000$

Dividindo ambos os membros da equação por *1000*, teremos: $100.n + 350 = 120.n + 150$

2ª Questão.

(PISM) Com relação a equação $2x^2 + x - 1 = 0$ e correto afirmar que:

a) Não possui raízes reais. b) A soma das raízes e zero. c) Possui duas raízes inteiras e distintas.

d) Possui uma raiz racional não inteira. e) O Produto das raízes e zero.

Solução. Analisando a equação, temos:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.(2).(-1)}}{2.(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \in Z \\ x_2 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \notin Z \end{cases}.$$

3ª Questão.

(PISM) Dada as funções f(x) = x + 3 e $g(x) = \dfrac{13x - 9}{x + 2}$, determine o maior subconjunto dos números reais tais que f(x) > g(x).

a) $]5, +\infty[$ b) $]-2, 5[$ c) $]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$ d) $]-\infty, 3[$ e) $]-2, 3[\cup]5, +\infty[$

Solução. Desenvolvendo a desigualdade, temos:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x + 3 > \frac{13x - 9}{x + 2} \Rightarrow x + 3 - \frac{13x - 9}{x + 2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 6 - (13x - 9)}{x + 2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x + 15}{x + 2} > 0$$.

Fazendo o estudo de sinais, temos:

F(x) = x^2 – 8x + 15 = (x – 3).(x – 5): Função quadrática com concavidade para cima. Os zeros são x = 3 e x = 5. A função assume valores positivos para x < 3 ou x > 5 e valores negativos se 3 < x < 5.

G(x) = x + 2: Função afim crescente, com zero igual a x = – 2. Assume valores postivos para x > – 2 e negativa para x < – 2.

	−2	3	5	
$x^2 - 8x + 15$	+	+	-	+
x + 2	-	+	+	+
$\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x + 2}$	-	+	-	+

4ª Questão.

(UERJ) O balanço de cálcio é a diferença entre a quantidade de cálcio ingerida e a quantidade excretada na urina e nas fezes. É usualmente positivo durante o crescimento e a gravidez e negativo na menopausa, quando pode ocorrer a osteoporose, uma doença caracterizada pela diminuição da absorção de cálcio pelo organismo.
A baixa concentração de íon cálcio (Ca®®) no sangue estimula as glândulas paratireóides a produzirem hormônio paratireóideo (HP). Nesta situação, o hormônio pode promover a remoção de cálcio dos ossos, aumentar sua absorção pelo intestino e reduzir sua excreção pelos rins.

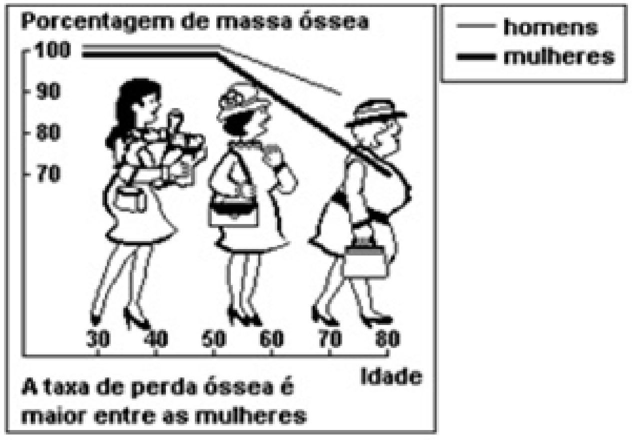
(Adaptado de ALBERTS, B. et al., "Urologia Molecular da Célula." Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.)

Admita que, a partir dos cinquenta anos, a perda da massa óssea ocorra de forma linear conforme mostra o gráfico a seguir:

Aos 60 e aos 80 anos, as mulheres têm, respectivamente, 90% e 70% da massa óssea que tinham aos 30 anos.
O percentual de massa óssea que as mulheres já perderam aos 76 anos, em relação à massa aos 30 anos, é igual a:

a) 14 b) 18 c) 22 d) 26

(Adaptado de "Galileu", janeiro de 1999.)



Solução. A partir dos 50 anos o decrescimento é linear e considerando M a massa aos 30 anos, temos que os pontos (60, 0.9M) e (80, 0.7M). Utilizando a expressão da função afim, temos:

$$i)\begin{cases}60a+b=0{,}9M \rightarrow \times(-1)\\ 80a+b=0{,}7M\end{cases} \Rightarrow 20a=-0{,}2M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-0{,}2M}{20}=\frac{-2M}{200}=-0{,}01M$$

$$ii)\ 60.(-0{,}01M)+b=0{,}9M \Rightarrow b=0{,}9M+0{,}6M=1{,}5M$$

$$iii)\ f(x)=-0{,}01Mx+1{,}5M \Rightarrow f(76)=-0{,}01M.(76)+1{,}5M=$$

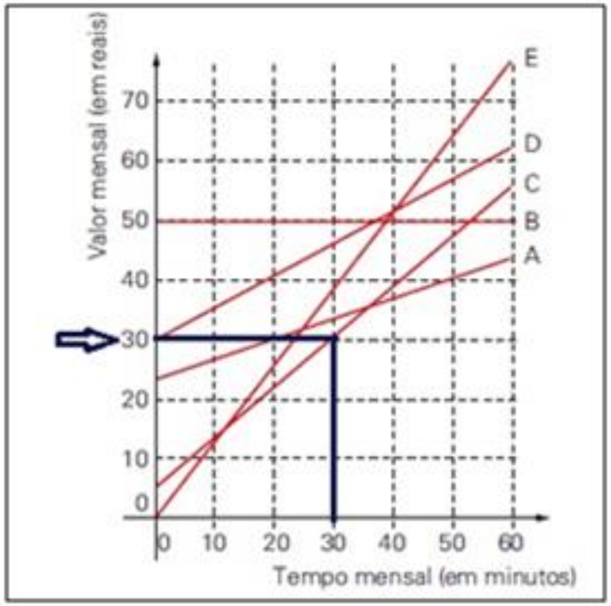
$$=-0{,}76M+1{,}50M=0{,}74M$$

$$iv)\ Perda=M-0{,}74M=0{,}26M \rightarrow 26\%M$$

5ª Questão.

(ENEM) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico. Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês no telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?



a) A

b) B

c) C

d) D

e) E

Solução. Observando a interseção da reta y = 30 com as retas dos gráficos, identificamos que o plano C permitirá 30 ligações com o gasto de R$30,00. Logo, o mais vantajoso.

6ª Questão.

(ENEM) Certa empresa de telefonia oferece a seus clientes dois pacotes de serviço:

• Pacote laranja: Oferece 300 minutos mensais de ligação local e o usuário deve pagar R$ 143,00 por mês. Será cobrado o valor de R$ 0,40 por minuto que exceder o valor oferecido.

• Pacote azul: Oferece 100 minutos mensais de ligação local e o usuário deve pagar mensalmente R$ 80,00. Será cobrado o valor de R$ 0,90 por minuto que exceder o valor oferecido.

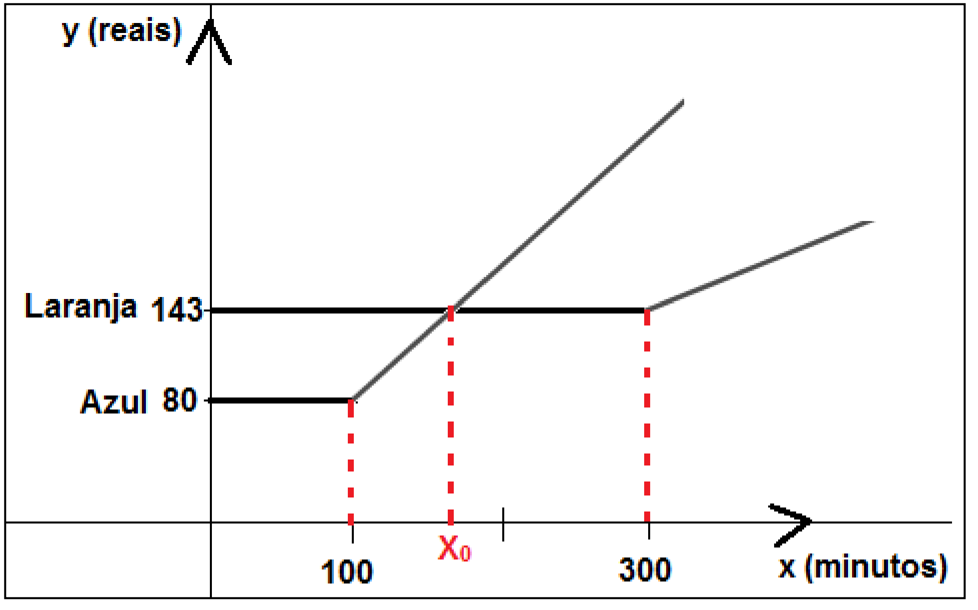
Para ser mais vantajoso contratar o pacote laranja, comparativamente ao pacote azul, o número mínimo de minutos de ligação que o usuário deverá fazer é:

a) 300. b) 70. c) 126. d) 400. e) 171.

Solução. Até 100 minutos, o pacote laranja cobra R$143 e o pacote azul cobra R$80,00. Considerando x o número de ligações acima de 100 minutos, temos:

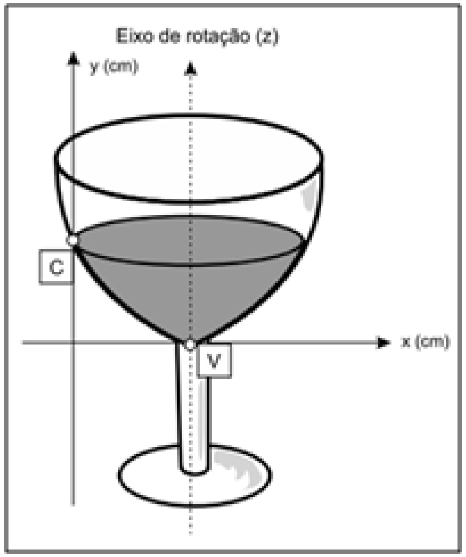
$$P(Laranja) < P(azul) \Rightarrow 143 < 80 + 0{,}9x \Rightarrow 0{,}9x > 63 \Rightarrow x > \frac{63}{0{,}9} \Rightarrow x > 70 \rightarrow mínimo = 71$$

Logo, o número mínimo de ligações deverá ser (100 + 71) = 171 ligações.



7ª Questão.

(ENEM) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura. A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei f(x) = $\frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.



Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

Solução. Utilizando a fórmula das coordenadas do vértice, temos:

$$i)\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \rightarrow Vértice: \begin{cases} x_V = -\dfrac{(-6)}{2.\left(3/2\right)} = \dfrac{6}{3} = 2 \\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-6)^2 - 4.\left(3/2\right)C}{4.\left(3/2\right)} = -\dfrac{36 - 6.C}{6} = C - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2, C-6) = (2, 0) \Rightarrow C = 6$$

$$ii)\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 \rightarrow Altura = f(0) = \frac{3}{2}(0)^2 - 6(0) + 6 = 6$$

8ª Questão.

(ENEM) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação q = 400 – 100p, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.
A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.
O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo:

A) R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50

B) R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50

C) R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50

D) R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50

E) R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

Solução. A arrecadação é o valor da do produto da quantidade de pães vendidos pelo preço unitário do pão. O preço atual é de (300 ÷ 100) = R$3,00.

Temos:

$$p.q = 300 \Rightarrow p.(400-100p) = 300 \Rightarrow -100p^2 + 400p - 300 = 0 \Rightarrow p^2 - 4p + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (p-3).(p-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = 3 \end{cases}.$$

Como o preço atual é R$3,00 o novo preço deve ser de R$1,00 que se encontra entre R$0,50 e R$1,50.

9ª Questão.

(UERJ) Um triângulo equilátero possui perímetro P, em metros, e área A, em metros quadrados. Os valores de P e A variam de acordo com a medida do lado do triângulo. Desconsiderando as unidades de medida, a expressão Y = P - A indica o valor da diferença entre os números P e A. O maior valor de Y é igual a:

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{3}$

Solução. De acordo com as informações, temos:

$$\begin{cases} P(L) = 3L \\ A(L) = \dfrac{L^2.\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow Y(L) = 3L - \dfrac{L^2.\sqrt{3}}{4} \rightarrow \text{Função Quadrática}$$

$$Y_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\left[\frac{9 - 4\left(-\sqrt{3}/4\right).(0)}{4.\left(-\sqrt{3}/4\right)}\right] = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

.

10ª Questão.

(ENEM) Uma lanchonete vende, em média, 200 sanduíches por noite ao preço de R$ 6,00 cada um. O proprietário observa que, para cada R$ 0,10 que diminui no preço, a quantidade vendida aumenta em cerca de 20 sanduíches.

RVLSOFT/SHUTTERSTOCK

Considerando o custo de R$ 4,50 para produzir cada sanduíche, o preço de venda que dará o maior lucro ao proprietário é:

a) R$ 5,00

b) R$ 5,25

c) R$ 5,50

d) R$ 5,80

e) R$ 6,00

Solução. Organizando as informações para a generalização, temos:

Preço Unitário: P (R$)	Número de sanduíches vendidos (N)	Faturamento: F (R$)
6	200	F = (6).(200)
6 – 0,1	200 + 1.(20)	F = (6 – 0,1).(200 + 1.(20))
...	.....	.....
6 – 0,1.x	200 + 20x	F = (6 – 0,1.x).(200 + 20x)

O preço total de custo será (4,50).(200 + 2x). Como Lucro = Faturamento – Custo, temos:

$i)\ L(x) = (6-0{,}1x).(200+20x) - 4{,}5.(200+20x) = 1200 + 120x - 20x - 2x^2 - 900 - 90x = -2x^2 + 10x + 300$

$$ii)\ L(x)_{Max} \to x_{Max} = -\frac{10}{2.(-2)} = \frac{10}{4} = 2{,}5.\ Como\ x \in N \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow \text{Preço unitário} = 6 - 0{,}1.(2) = 6 - 0{,}2 = R\$5{,}80 \\ ou \\ x = 3 \Rightarrow \text{Preço unitário} = 6 - 0{,}1.(3) = 6 - 0{,}3 = R\$5{,}70 \end{cases}$$

$iii)\ Maior\ lucro:\ R\$5{,}80 - R\$4{,}50 = R\$1{,}30$

11ª Questão.

(UERJ) O gráfico abaixo mostra o segmento de reta AB, sobre o qual um ponto C (p, q) se desloca de A até B (3, 0). O produto das distâncias do ponto C aos eixos coordenados é variável e tem valor máximo igual a 4,5. O comprimento do segmento AB corresponde a:

(A) 5 (B) 6 (C) $3\sqrt{5}$ (D) $6\sqrt{2}$

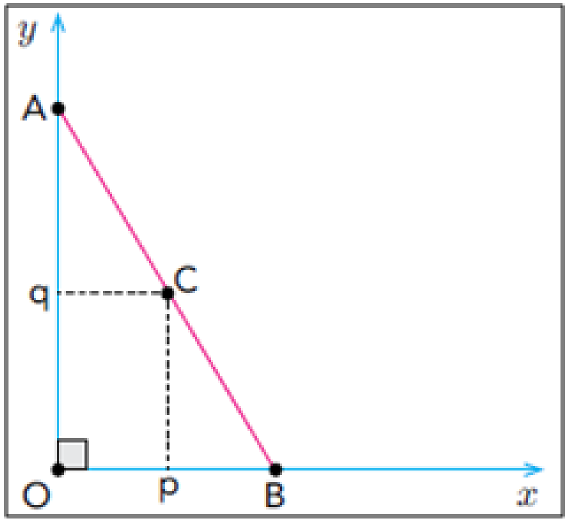
Solução 1. A reta AB representa uma função afim decrescente da forma f(x) = – ax + b. O produto das distâncias representa a área do retângulo de lados p e q. Temos:

$$i)\begin{cases}\begin{cases}f(p)=-a.p+b\\ f(p)=q\end{cases}\Rightarrow -a.p+b=q\Rightarrow b=q+ap\\ \begin{cases}f(3)=-a.3+b\\ f(3)=0\end{cases}\Rightarrow -3a+b=0\Rightarrow b=3a\end{cases}\Rightarrow q+ap=3a\Rightarrow q=3a-ap$$

$$ii)\begin{cases}Área(retângulo)=p.q=p.(3a-ap)=-ap^2+3ap\\ Área_{Máxima}(retângulo)=4,5\\ Área_{Máxima}(retângulo)=-\dfrac{\Delta}{4a}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4,5=-\frac{9a^2-4(-a).(0)}{4(-a)}\Rightarrow\frac{9a^2}{4a}=4,5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2-18a=0\Rightarrow 9a(a-2)=0\Rightarrow a=2\rightarrow(a\neq 0).\ Logo, b=3(2)=6$$



A possui coordenadas (0, 6). Calculando a hipotenusa AB, temos: $\boxed{\overline{AB}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}}$.

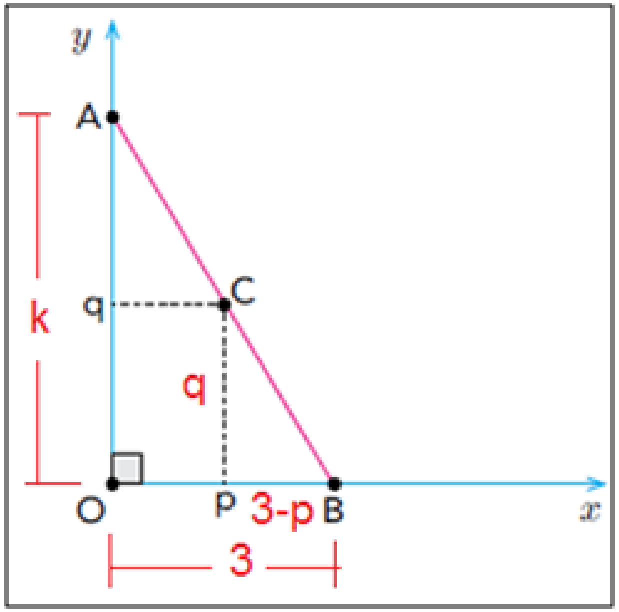
Solução 2. Os triângulos PBC e OBA são semelhantes. Considerando AO = k, vem:

$$i)\ \frac{k}{3}=\frac{q}{3-p}\Rightarrow q=\frac{(3-p).k}{3}$$

$$ii)\ \begin{cases} Área(retângulo)=p.q=p.\dfrac{(3-p).k}{3}=-\dfrac{k}{3}p^2+kp \\ Área_{Máxima}(retângulo)=4,5 \\ Área_{Máxima}(retângulo)=-\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4,5=-\frac{k^2-4(-k/3).(0)}{4(-k/3)}\Rightarrow \frac{k^2}{4k/3}=4,5\Rightarrow \frac{3k}{4}=4,5\Rightarrow k=6$$

$$iii)\ A=(0,6)\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$



12ª Questão.

(UERJ) Um barco percorre seu trajeto de descida de um rio, a favor da correnteza, com a velocidade de 2 m/s em relação à água. Na subida, contra a correnteza, retornando ao ponto de partida, sua velocidade é de 8 m/s, também em relação à água.

Considere que:

- o barco navegue sempre em linha reta e na direção da correnteza;
- a velocidade da correnteza seja sempre constante;
- a soma dos tempos de descida e de subida do barco seja igual a 10 min.

Assim, a maior distância, em metros, que o barco pode percorrer, neste intervalo de tempo, é igual a:

a) 1.250 b) 1.500 c) 1.750 d) 2.000

Solução. Considerando t_s, t_d e c, respectivamente, o tempo de subida, tempo de descida e a velocidade da correnteza, temos que a favor da correnteza o barco possui velocidade (2 + c) e contra a correnteza, velocidade (8 – c). O trajeto possui a mesma distância D. Como as velocidades estão em segundos, utilizamos 10 minutos = 600 segundos.

$$i)\ \begin{cases} t_d = \dfrac{D}{2+c} \\ t_s = \dfrac{D}{8-c} \end{cases} \Rightarrow \frac{D}{2+c} + \frac{D}{8-c} = 600 \Rightarrow 8D - cD + 2D + cD = 600.\left(16 + 6c - c^2\right) \Rightarrow 10D = -600c^2 + 3600c + 9600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -60c^2 + 360c + 960$$

$$ii)\ D(Máxima) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(360)^2 - 4(-60).(960)}{4.(-60)} = \frac{129600 + 230400}{240} = \frac{360000}{240} = 1500\ m$$

13ª Questão.

(ENEM) O apresentador de um programa de auditório propôs aos participantes de uma competição a seguinte tarefa: cada participante teria 10 minutos para recolher moedas douradas colocadas aleatoriamente em um terreno destinado à realização da competição. A pontuação dos competidores seria calculada ao final do tempo destinado a cada um dos participantes, no qual as moedas coletadas por eles seriam contadas e a pontuação de cada um seria calculada, subtraindo do número de moedas coletadas uma porcentagem de valor igual ao número de moedas coletadas. Dessa forma, um participante que coletasse 60 moedas teria sua pontuação calculada da seguinte forma: pontuação P = 60 – 36 (60% de 60) = 24. O vencedor da prova seria o participante que alcançasse a maior pontuação.

Qual será o limite máximo de pontos que um competidor pode alcançar nessa prova?

a) 0 b) 25 c) 50 d) 75 e) 100

Solução. Considerando x o número de moedas que o participante recolhe, a função que calcula a pontuação é f(x) = x – x%.(x), que representa uma função quadrática. Logo, a pontuação máxima será a ordenada do vértice da parábola relacionada. Temos:

$$i)\ f(x) = x - \frac{x}{100}.x \Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{100} + x$$

$$ii)\ Pontuação(Máxima) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(1)^2 - 4.\left(-\frac{1}{100}\right)(0)}{4.\left(-\frac{1}{100}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{100}} = 25$$.