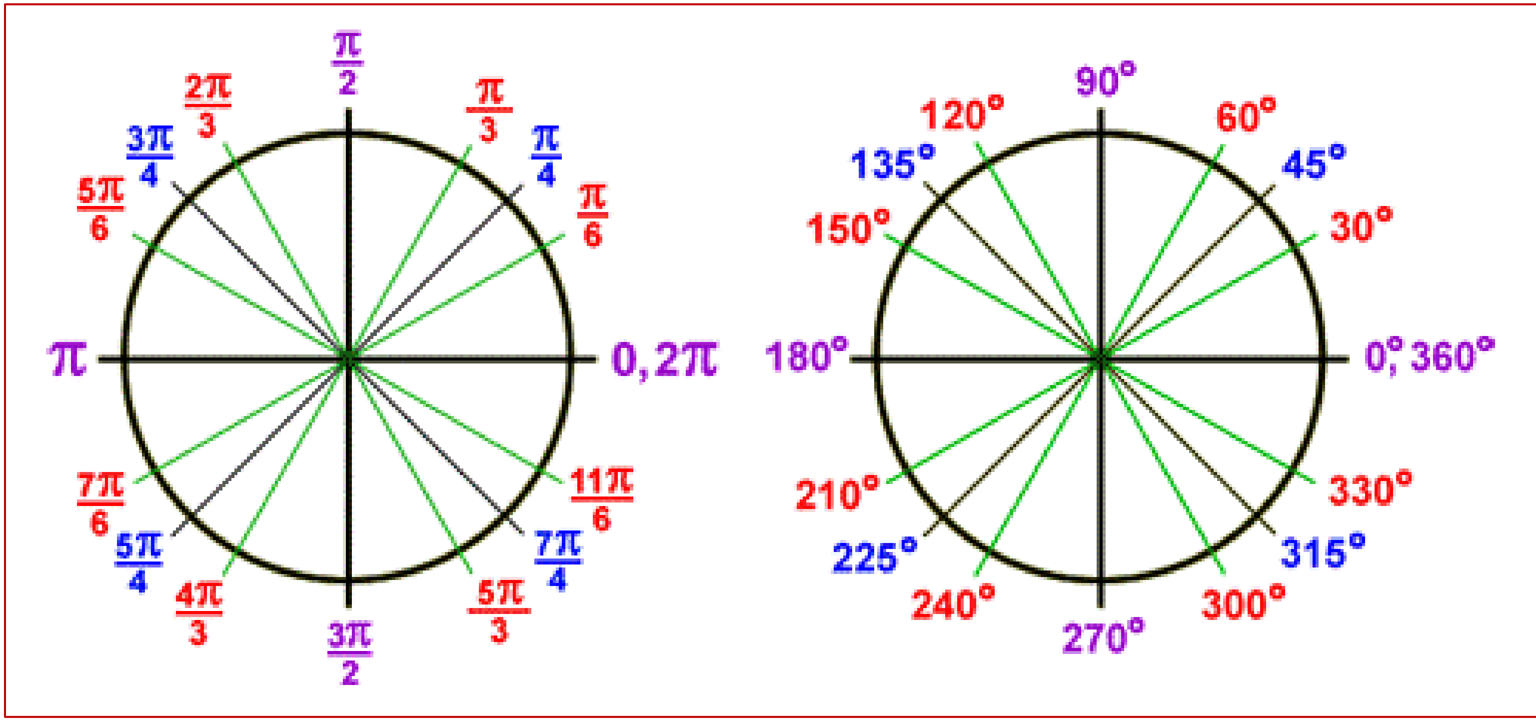
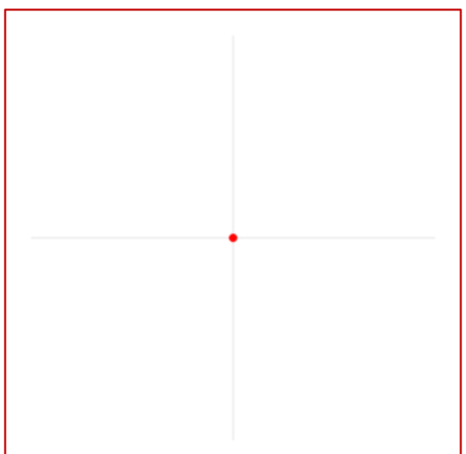
GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

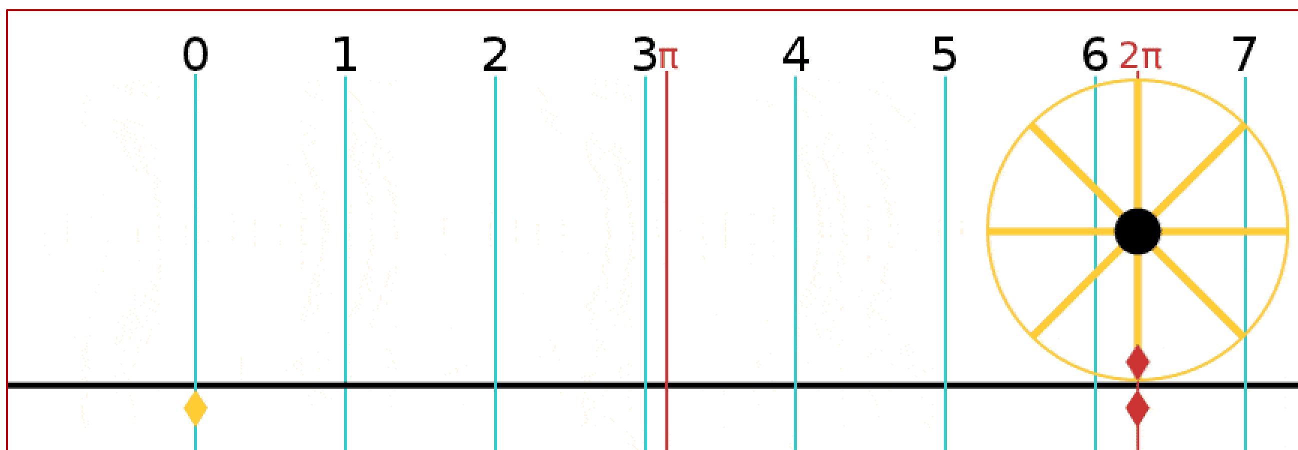
24/2/2018

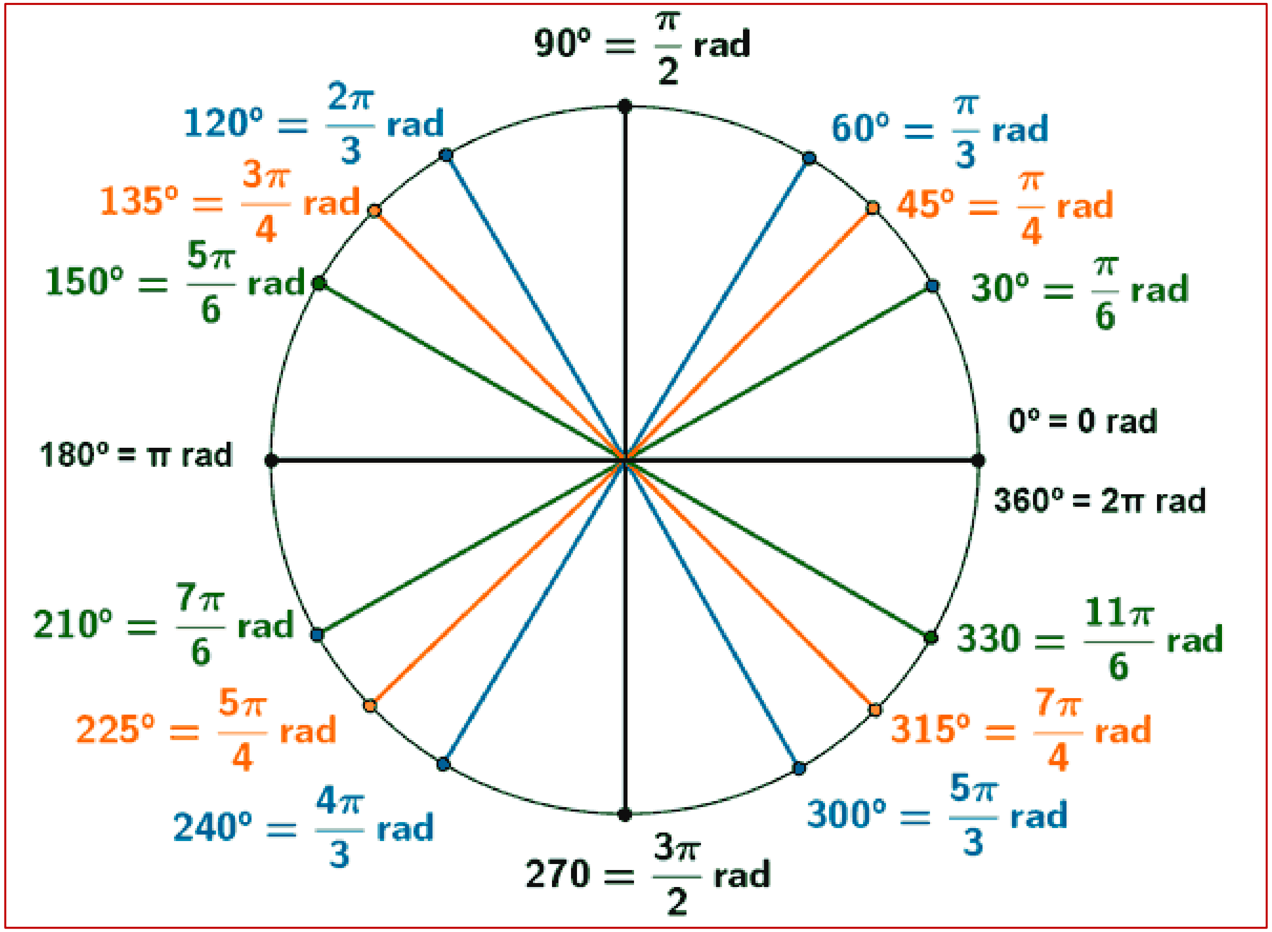
Prof. Walter Tadeu
www.professorwaltertadeu.mat.br

RADIANOS x GRAUS







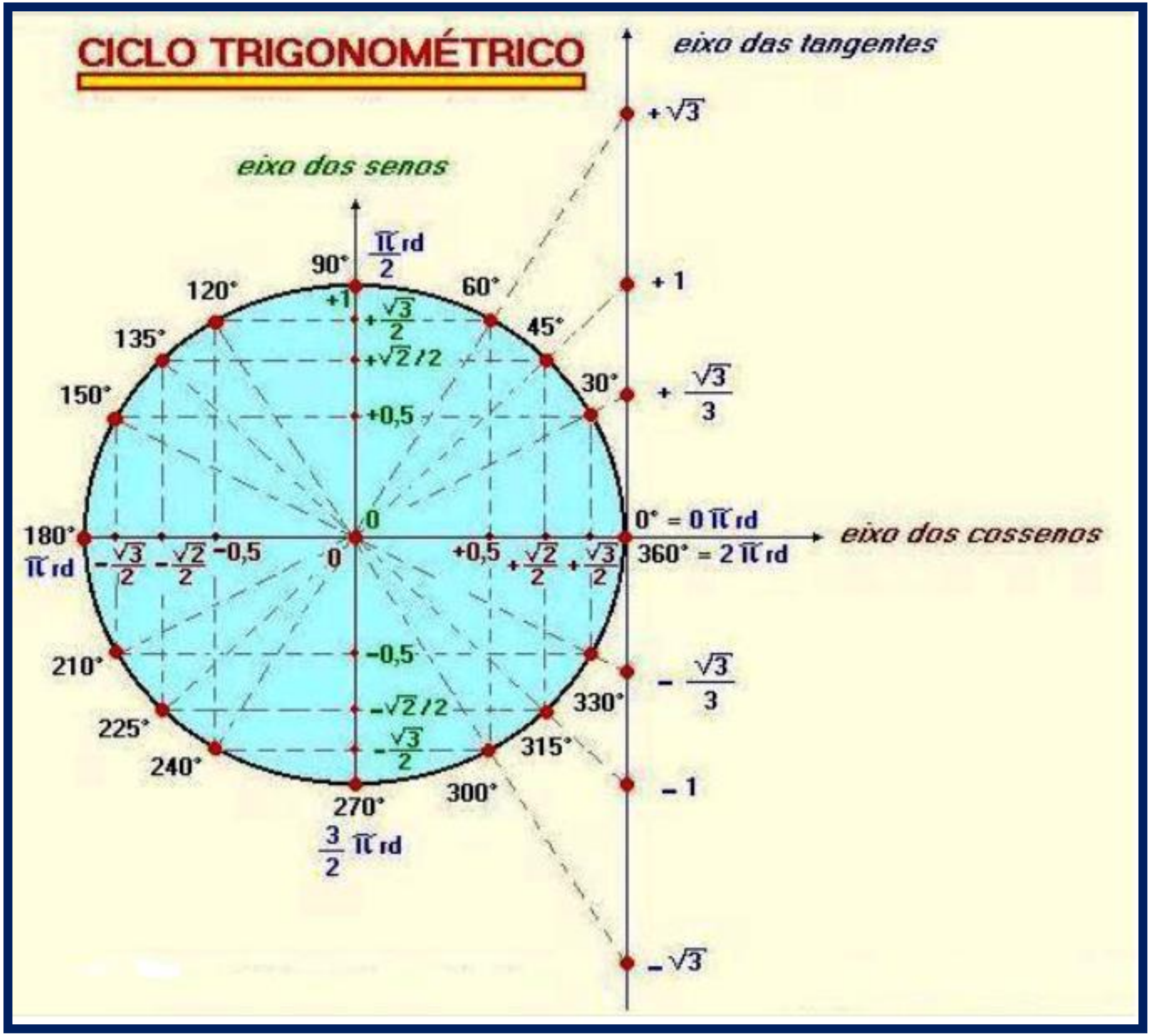


CONVERSÃO

$$2\pi \text{ rad} = 360°$$
$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}29577951°$$

ou

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$
$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}01745329 \text{ rad}$$


CICLO TRIGONOMÉTRICO
eixo das tangentes
eixo dos senos
eixo dos cossenos
90°
π/2 rd
120°
60°
135°
45°
150°
30°
180°
π rd
0° = 0 π rd
360° = 2 π rd
210°
330°
225°
315°
240°
300°
270°
3/2 π rd
+1
+√3/2
+√2/2
+0,5
0
−0,5
−√2/2
−√3/2
−√3/2
−√2/2
−0,5
+0,5
+√2/2
+√3/2
+√3
+ 1
+ √3/3
− √3/3
− 1
− √3

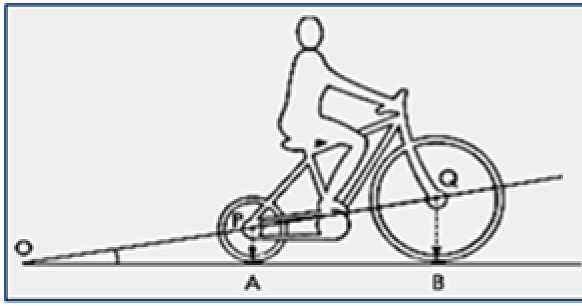
RESUMÃO

Tabela de Relações Trigonométricas

01) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$	02) $1 + \text{tg}^2x = \sec^2x$
03) $1 + \text{cotg}^2x = \text{cosec}^2x$	04) $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$
05) $\cos(-x) = \cos x$	06) $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$
07) $\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$	08) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
09) $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$	10) $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$
11) $\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$	12) $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\, a . \cos b \pm \cos a . \text{sen}\, b$
13) $\cos(a \pm b) = \cos a . \cos b \mp \text{sen}\, a . \text{sen}\, b$	14) $\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a . \text{tg}\, b}$
15) $\text{tg}(a - b) = \dfrac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a . \text{tg}\, b}$	16) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17) $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	18) $\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x . \cos x$
19) $\cos 2x = \cos^2x - \text{sen}^2x = 1 - 2\,\text{sen}^2x =$ $= 2\cos^2x - 1$	20) $\text{tg}\, 2x = \dfrac{2\, \text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}$

1ª Questão

(UERJ) Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica. Os centros das rodas estão a uma distância $\overline{PQ}$ igual a 120 cm e os raios $\overline{PA}$ e $\overline{QB}$ medem respectivamente 25 cm e 52 cm. De acordo com a tabela, qual o valor do ângulo $A\hat{O}P$?



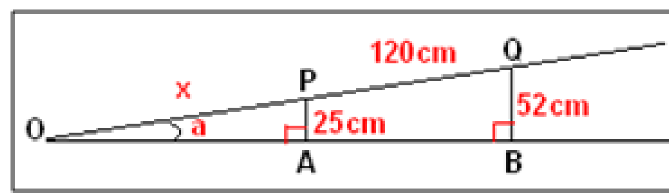
ÂNGULO (em graus)	SENO	COSSENO	TANGENTE
10	0,174	0,985	0,176
11	0,191	0,982	0,194
12	0,208	0,978	0,213
13	0,225	0,974	0,231
14	0,242	0,970	0,249

a) 10º b) 12º c) 13º d) 14º

Solução. A figura pode ser representada pelo esquema mostrado onde o ângulo "a" pedido está oposto aos catetos PA e QB. Aplicando a relação trigonométrica do seno, temos:

$$\begin{cases} sena = \dfrac{\overline{PA}}{x} = \dfrac{25}{x} \\ sena = \dfrac{\overline{QB}}{x+120} = \dfrac{52}{x+120} \end{cases} \Rightarrow \frac{52}{x+120} = \frac{25}{x} \Rightarrow$$

$$52x = 25x + 3000 \Rightarrow 52x - 25x = 3000 \Rightarrow x = \frac{3000}{27} = \frac{1000}{9}$$



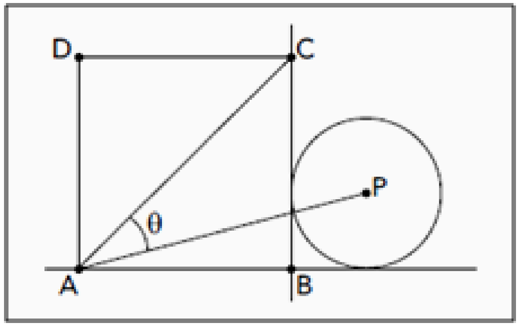
No triângulo OPA, temos: $sena = \dfrac{25}{x} = \dfrac{25}{\frac{1000}{9}} = 25.\dfrac{9}{1000} = \dfrac{9}{40} = 0,225$. **Logo,** $\boxed{A\hat{O}P = 13^o}$.

2ª Questão.

(UERJ) No esquema abaixo, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro P e raio **r**, tangente às retas AB e BC. O lado do quadrado mede **3r**.

A medida **θ** do ângulo CÂP pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$\boxed{tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \times tg(\beta)}}$$

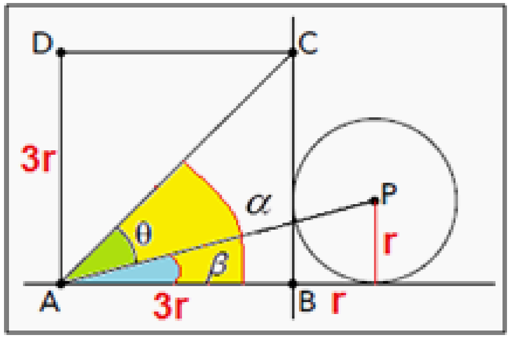


O valor da tangente de **θ** é igual a:

a) 0,65 b) 0,60 c) 0,55 d) 0,50

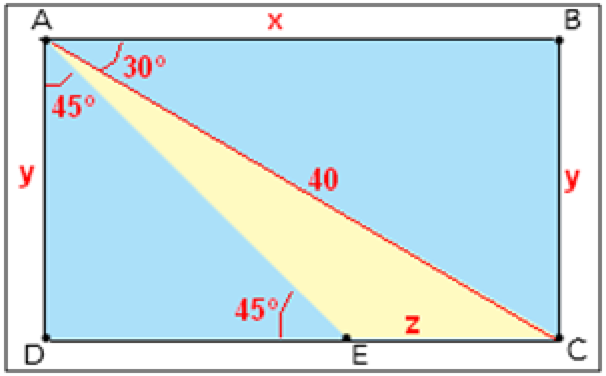
Solução. Observando a figura, temos:

$$\theta = \alpha - \beta \rightarrow \begin{cases} tg\alpha = \dfrac{3r}{3r} = 1 \\ tg\beta = \dfrac{r}{4r} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow tg\theta = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + (1)\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow tg\theta = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$



3ª Questão.

(UERJ) Considere uma placa retangular ABCD de acrílico, cuja diagonal AC mede 40 cm. Um estudante, para construir um par de esquadros, fez dois cortes retos nessa placa nas direções AE e AC, de modo que DÂE=45º e BÂC=30º, conforme ilustrado a seguir:



Após isso, o estudante descartou a parte triangular CAE, restando os dois esquadros. Admitindo que a espessura do acrílico seja desprezível e que $\sqrt{3}$ = 1,7, a área, em cm², do triângulo CAE equivale a:

(A) 80 (B) 100 (C) 140 (D) 180

Solução. Identificando os valores de x, y e z na figura, temos:

i) y = 20 cm, pois é cateto oposto ao ângulo de 30º no triângulo retângulo ABC. Também será o valor da altura do triângulo AEC.

ii) x = $\boxed{20\sqrt{3} = 20.(1,7) = 34\ cm}$**, pois é oposto ao ângulo de 60º do triângulo ABC. Vale a metade da hipotenusa multiplicado pela raiz de 3.**

iii) DE = y = 20 cm, pois é cateto do triângulo retângulo isósceles ADE. Logo z = EC = 34 – 20 = 14 cm.

A área do triângulo CAE vale: $\boxed{A = \frac{\overline{EC} \times \overline{AD}}{2} = \frac{14 \times 20}{2} = 140\ cm^2}$**.**

4ª Questão.

(UERJ) Um caminhão do corpo de bombeiros tem 2m de altura e a escada acoplada em sua parte superior mede 20m quando totalmente estendida; desta forma ela é encostada no prédio **A** e depois no prédio **B**, formando com a horizontal ângulos de 15º e 75º, respectivamente, e alcançando a metade da altura do prédio **A** no ponto **P**, e a altura do prédio **B** no ponto **Q**.

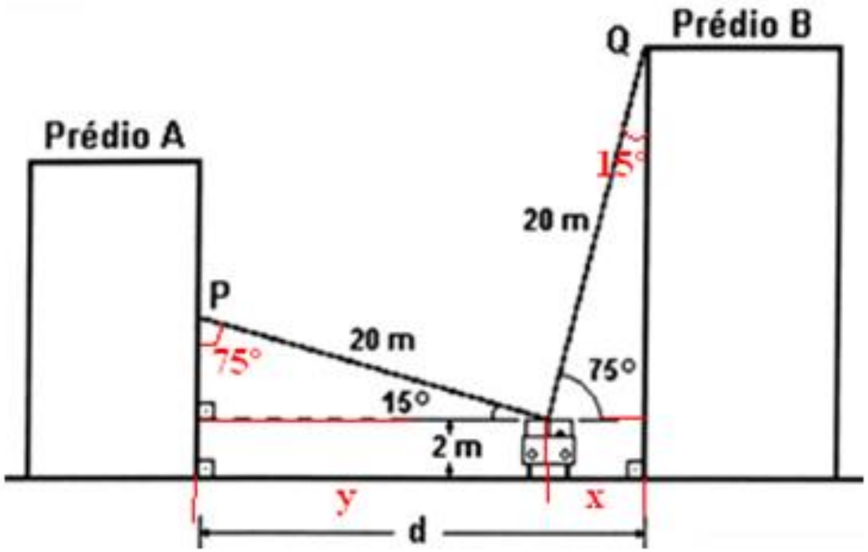
De acordo com a figura, onde se observa esquematicamente a situação, a distância **d**, em metros, entre os prédios é igual a:

a) 20(cos15º + sen15º).

b) 20(cos15º – sen15º).

c) 20(cos15º + sen75º).

d) 20(cos75º + sen15º).



Solução. Dividindo a distância "d" em segmentos x e y, catetos dos triângulos retângulos indicados, temos:

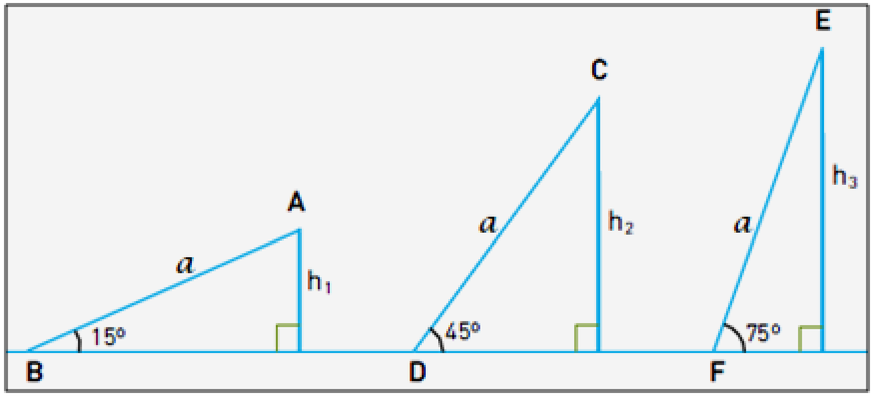
$$\begin{cases} \cos 15° = \dfrac{y}{20} \Rightarrow y = 20.\cos 15° \\ \cos 75° = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 20.\cos 75° \end{cases} \Rightarrow d = x + y = 20.\cos 15° + 20.\cos 75°.$$

Lembrando que 15º + 75º = 90º implica em sen75º = cos15º e cos75º = sen15º, temos:

D = 20.cos15º + 20.cos75º = 20.cos15º + 20.sen15º= 20(cos15º + sen15º).

5ª Questão.

(UERJ) Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento *a*, mas com inclinações diferentes. As figuras abaixo representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa.
Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida A, C e E são, respectivamente, h1, h2 e h3, conclui-se que h1 + h2 é igual a:



(A) $h_3\sqrt{3}$ (B) $h_3\sqrt{2}$ (C) $2h_3$ (D) h_3

Solução. Observe que 75º = 45º + 30º e 15º = 45º - 30º. As alturas são catetos opostos aos ângulos indicados. Estabelecendo as relações, temos:

$$\frac{h_1}{a}=\text{sen}15^\circ=\text{sen}(45^\circ-\text{sen}30^\circ)=\text{sen}45^\circ\cos 30^\circ-\text{sen}30^\circ\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{h_2}{a}=\text{sen}45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

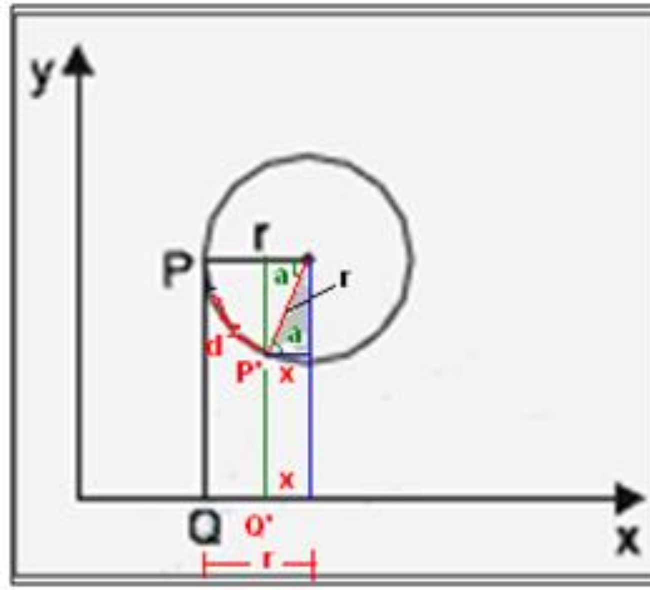
$$\frac{h_3}{a}=\text{sen}75^\circ=\text{sen}(45^\circ+\text{sen}30^\circ)=\text{sen}45^\circ\cos 30^\circ+\text{sen}30^\circ\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{cases} h_1+h_2=a\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=a\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{4}\right]=a\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{4}\right]=a\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right] \\ h_3=a\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right] \end{cases}\Rightarrow h_1+h_2=h_3$$

6ª Questão.

(ENEM) Considere um ponto **P** em uma circunferência de raio **r** no plano cartesiano. Seja **Q** a projeção ortogonal de **P** sobre o eixo **X**, como mostra a figura, e suponha que o ponto **P** percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

Então o ponto **Q** percorrerá, no eixo **X**, uma distância dada por:



a) $r\left(1 - sen\dfrac{d}{r}\right)$ b) $r\left(1 - \cos\dfrac{d}{r}\right)$ c) $r\left(1 - tg\dfrac{d}{r}\right)$

d) $r.sen\left(\dfrac{d}{r}\right)$ e) $r.\cos\left(\dfrac{d}{r}\right)$

Solução. A figura mostra que o ponto P se desloca até P' e sua projeção Q para Q'. A distância "d" percorre um arco de comprimento d = r.a, onde "a" é o ângulo central em radianos.

A distância no eixo X, pedida, é $\overline{QQ'} = r - x$.

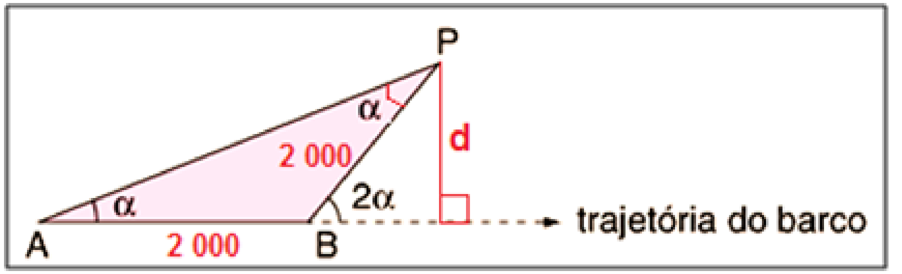
No triângulo hachurado "x" é o cateto adjacente ao ângulo "a" de hipotenusa "r".

Aplicando a razão trigonométrica do cosseno, temos:

$$\begin{cases} \cos a = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r.\cos a \\ d = r.a \Rightarrow a = \dfrac{d}{r} \end{cases} \Rightarrow QQ' = r - x = r - r\cos\left(\dfrac{d}{r}\right) = r\left(1 - \cos\left(\dfrac{d}{r}\right)\right).$$

7ª Questão.

(ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo ***P*** será:

a) 1 000 m b) $1\,000\sqrt{3}$ m c) $2\,000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m d) 2 000 m e) $2\,000\sqrt{3}$ m

Solução. O triângulo ABP é isósceles. Aplicando a razão trigonométrica do seno, temos:

$$\begin{cases} sen(2\alpha) = \dfrac{d}{2\,000} \\ 2\alpha = 2.(30^\circ) = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow d = 2\,000.sen60^\circ = 2\,000.\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\,000.\sqrt{3}\ m$$.

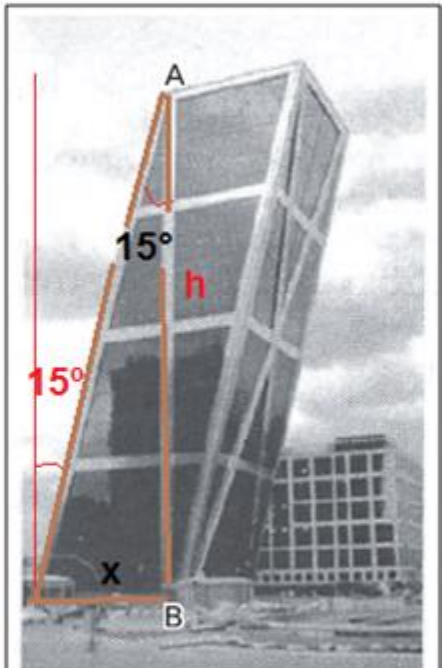
8ª Questão.

(ENEM) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa Avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Solução. De acordo com a figura, x é o valor da aresta da base do prédio. Aplicando a razão trigonométrica da tangente, temos:

$$i)\ tg15° = \frac{x}{h} \Rightarrow x = (114).(0{,}26) \Rightarrow x = 29{,}64\ m$$

$$ii)\ Área\,(base) = (29{,}64)^2 \cong 878{,}53\ m^2 > 700\ m^2$$



Disponível em: www.flickr.com.
Acesso em: 27 mar. 2012

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15º e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) menor que 100m². b) entre 100m² e 300m². c) entre 300m² e 500m².

d) entre 500m² e 700m². e) maior que 700m².

9ª Questão.

(PISM 2) Seja **x** um número real tal que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. É **CORRETO** afirmar que:

a) $senx > \cos x$ b) $\cos x > senx$ c) $tgx > \cos x$ d) $tgx > senx$ e) $senx > tgx$

Solução. Analisando as opções, temos que as desigualdades (a) e (b) são falsas por que se x = π/4, senx = cosx. Analisando as demais desigualdades, temos:

$$c)\ Falsa: \frac{senx}{\cos x} > \cos x \Rightarrow senx > \cos^2 x \Rightarrow senx > 1 - sen^2 x \Rightarrow sen^2 x + senx - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} senx < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \\ senx > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 1 \end{cases}$$

$$d)\ Verdadeiao: \frac{senx}{\cos x} > senx \Rightarrow \frac{1}{\cos x} > 1 \Rightarrow \cos x < 1$$

$$e)\ Falsa: senx > \frac{senx}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 < \cos x$$

10ª Questão.

(PISM 2) Sejam **x** e **y** tais que $y - x = \pi$ e que $senx = 2.\cos y$. O valor de $tg\, y$ é:

a) – 2 b) 2 c) – 1 d) 1 e) 4

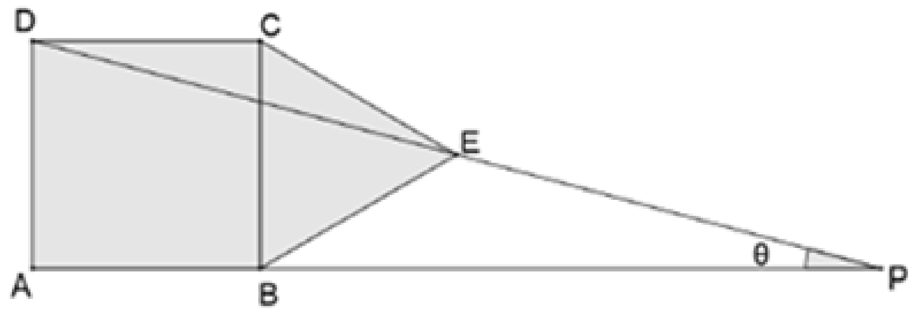
Solução. Os números x e y diferem de π. Logo, são diametralmente opostos. Temos:

$$senx = 2.\cos y \Rightarrow \frac{senx}{\cos y} = 2 \Rightarrow \frac{sen(y-\pi)}{\cos y} = 2 \Rightarrow \frac{seny.\cos\pi - sen\pi\cos y}{\cos y} = 2 \Rightarrow -\frac{seny}{\cos y} = 2 \Rightarrow tgy = -2$$

11ª Questão.

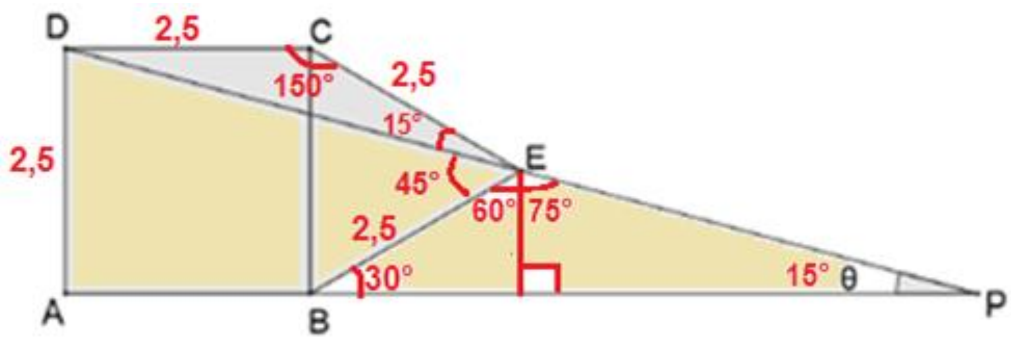
(PISM 1) Na figura abaixo, estão representados o quadrado ABCD, de perímetro medindo 10 cm e o triângulo equilátero BCE. Prolongam-se DE e AB até que se intersectem no ponto P, segundo um ângulo de medida Θ.

α	$sen\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$
15º	0,26	0,97	0,27
30º	0,5	0,87	0,58
45º	0,71	0,71	1
60º	0,87	0,5	1,73
75º	0,97	0,26	3,73



Qual a medida aproximada do segmento DP? (se necessário, use os valores da tabela acima).

a) 37,04 cm b) 17,24 cm c) 9,61 cm d) 5,78 cm e) 2,68 cm



Solução. No triângulo retângulo ADP, o segmento DP é hipotenusa. De acordo com os ângulos e medidas identificadas na figura, temos:

$$sen15° = \frac{2,5}{\overline{DP}} \Rightarrow \overline{DP} = \frac{2,5}{sen15°} \Rightarrow \overline{DP} = \frac{2,5}{0,26} \Rightarrow \overline{DP} \cong 9,61$$

12ª Questão.

(PISM 2) Seja **x** um número real tal que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Sabendo que $y = x + \frac{\pi}{2}$ e que $tgx = 3$, o valor de

$$\frac{(\cos x).(senx)(seny) - (\cos^2 x)(\cos y)}{sen^3 x + (\cos^2 y)(senx)}$$

é igual a:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) 9 e) 27

Solução. O número x pertence ao 1º quadrante e y, ao 2º quadrante. Simplificando a expressão e substituindo, temos:

$$i)\begin{cases} seny = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \\ \cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -senx \end{cases}$$

$$ii)\ \frac{\cos x.senx.seny - \cos^2 x.\cos y}{sen^3 x + \cos^2 y.senx} = \frac{\cos x.senx.(\cos x) - \cos^2 x.(-senx)}{sen^3 x + (-senx)^2.senx} = \frac{2\cos^2 x.senx}{2.sen^3 x} = \cot g^2 x = \frac{1}{tg^2 x} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

13ª Questão.

(PISM 2) Considere as seguintes afirmações:

I) $sen x \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$

II) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, para todo $x \in R$.

III) $tg x \geq \sqrt{3}$ para todo $x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

É **CORRETO** afirmar que:

a) apenas I é verdadeira

b) apenas II é verdadeira

c) apenas III é verdadeira

d) apenas I e II são verdadeiras

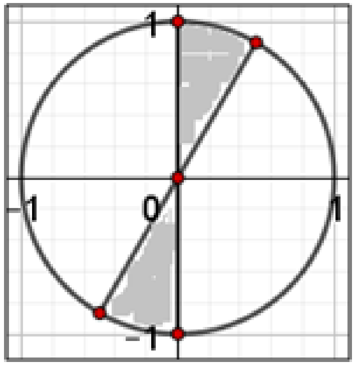
e) apenas II e III são verdadeiras

Solução. Analisando as opções, temos:

I) Falso. $\boxed{\dfrac{\pi}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right], \text{ mas } sen\, \dfrac{\pi}{2} = 1 > \dfrac{1}{2}}$.

II) Verdadeiro. $\boxed{\cos^2 x = \dfrac{1+\cos^2 x - sen^2 x}{2} = \dfrac{2\cos^2 x}{2} = \cos^2 x}$.

III) Verdadeiro.



14ª Questão.

(PISM 2) Determine o conjunto solução para a equação $6.sen^2x - 9.senx + 3 = 0$.

a) $\left\{x \in R;\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ ou\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

b) $\left\{x \in R;\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ ou\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

c) $\left\{x \in R;\ x = 2k\pi \ ou\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

d) $\left\{x \in R;\ x = \dfrac{\pi}{4} \ ou\ x = \dfrac{\pi}{3}\right\}$

e) $\left\{x \in R;\ x = \dfrac{\pi}{6} \ ou\ x = \dfrac{\pi}{2} \ ou\ x = \dfrac{\pi}{4}\right\}$

Solução. Resolvendo a equação, temos:

$$i)\ \begin{cases} 6.sen^2x - 9.senx + 3 = 0 \\ senx = y \end{cases} \Rightarrow 6y^2 - 9y + 3 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.(2).(1)}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$ii)\ \begin{cases} senx = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ senx = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \left\{x \in R;\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ou\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$$