

JUROS SIMPLES E PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

JURO SIMPLES

No regime de juro simples, ele incide apenas sobre o capital investido. Portanto, o montante resgatado depende da quantia desse capital investido, do tempo de aplicação e da taxa de juro cobrada.

Seja **C** o capital, **i** a taxa percentual de juro, **t** o tempo de investimento, **J** o juro e **M** o montante, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t \quad \text{e} \quad M = C + J$$

OBS: Para o cálculo do juro, o tempo e a taxa devem sempre estar na mesma unidade, e para isso considera-se o ano comercial, aquele com 360 dias, sendo 12 meses de 30 dias cada.

Exercícios

1) Marcos pegou emprestado R\$ 5.000,00 de um amigo por cinco meses, com juros simples de 4% ao mês. Quanto deverá pagar para saldar a dívida?

$$\left\{ \begin{array}{l} C = R\$ 5000 \\ i = 4\% \text{ a. m.} = \frac{4}{100} \text{ a. m.} \\ t = 5 \text{ meses} \end{array} \right.$$

$$J = C \cdot i \cdot t \rightarrow J = 5000 \cdot \frac{4}{100} \cdot 5 \rightarrow J = 50 \cdot 4 \cdot 5 \rightarrow J = R\$1000$$

$$M = C + J \rightarrow M = 5000 + 1000 = R\$ 6000,00$$

2) César aplicou R\$ 2.000,00, durante um ano, à taxa de 6% ao ano. Qual o juro recebido por ele?

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 2000 \\ i = 6\% \text{ a. a} = \frac{6}{100} \text{ a. a} \\ t = 1 \text{ ano} \end{array} \right. \quad J = C \cdot i \cdot t \rightarrow J = 2000 \cdot \frac{6}{100} \cdot 1 \rightarrow J = \text{R\$ } 120,00$$

3) A que taxa anual esteve empregado o capital de R\$ 20000,00 para render em três anos R\$ 28800,00 de juros simples?

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 20000 \\ t = 3 \text{ anos} \\ J = 28800 \end{array} \right.$$

$$J = C \cdot i \cdot t \rightarrow 28800 = 20000 \cdot i \cdot 3 \rightarrow 288 = 600 \cdot i \rightarrow i = \frac{288}{600} = \frac{48}{100} = 48\% \text{ a. a}$$

4) Calcule a taxa mensal de juro simples a que deve ser aplicado um capital de R\$ 48000,00, para render R\$ 6912,00 em 4 meses?

$$\begin{cases} C = 48000 \\ J = 6912 \\ t = 4 \text{ meses} \end{cases} \quad J = C \cdot i \cdot t \rightarrow 6912 = 48000 \cdot i \cdot 4 \rightarrow \frac{6912}{4} = 48000 \cdot i \rightarrow 1728 = 48000 \cdot i$$
$$i = \frac{1728}{48000} \rightarrow i = \frac{3,6}{100} \rightarrow i = 3,6\% \text{ a. m}$$

5) Qual o capital que à taxa de 2,5% ao mês, rende juro simples de R\$ 126.000,00 em 3 anos?

$$\begin{cases} i = 2,5\% \text{ a. m} = \frac{2,5}{100} \text{ a. m} \\ J = 126000 \\ t = 3 \text{ anos} = 36 \text{ meses} \end{cases} \quad J = C \cdot i \cdot t \rightarrow 126000 = C \cdot \frac{2,5}{100} \cdot 36 \rightarrow 126000 = C \cdot \frac{90}{100}$$
$$126000 = \frac{9 \cdot C}{10} \rightarrow C = \frac{1260000}{9} \rightarrow C = R\$140000,00$$

6) A que taxa devemos aplicar o capital de R\$ 4 500,00, no sistema de capitalização simples, para que depois de 4 meses, o montante seja de R\$ 5 040,00?

$$M = C + J \rightarrow 5040 = 4500 + J \rightarrow J = 540$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J = 540 \\ C = 4500 \\ t = 4 \text{ meses} \end{array} \right. \quad J = C \cdot i \cdot t \rightarrow 540 = 4500 \cdot i \cdot 4 \rightarrow 54 = 450 \cdot i \cdot 4 \rightarrow 54 = 1800 \cdot i$$
$$i = \frac{54}{1800} \rightarrow i = \frac{3}{100} = 3 \% \text{ a. m}$$

7) Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado para que seu valor dobre, no sistema de juros simples, a taxa de 2% ao mês.

$$M = 2 \cdot C \rightarrow C + J = 2 \cdot C \rightarrow C = J$$

$$J = C \cdot i \cdot t \rightarrow C = C \cdot \frac{2}{100} \cdot t \rightarrow 1 = \frac{2}{100} \cdot t \rightarrow 100 = 2 \cdot t \rightarrow t = 50 \text{ meses}$$

8) Um capital de R\$ 800,00, aplicado a uma taxa de juros simples de 20% ao ano, gerou um montante de R\$ 1 440,00 depois de certo tempo. Qual foi esse tempo?

$$M = C + J \rightarrow 1440 = 800 + J \rightarrow J = 640$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J = 640 \\ C = 800 \\ i = 20\% \text{ a. a} = \frac{20}{100} \text{ a. a} \end{array} \right.$$

$$J = C \cdot i \cdot t \rightarrow 640 = 800 \cdot \frac{20}{100} \cdot t \rightarrow 640 = 8 \cdot 20 \cdot t \rightarrow 640 = 160t$$

$$t = \frac{640}{160} = 4 \text{ anos}$$

Progressão Aritmética

Uma sucessão aritmética é também chamada de Progressão Aritmética (PA) se a diferença entre seus termos consecutivos for constante.

Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Uma progressão aritmética genérica pode ser escrita da forma $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ cuja a razão é r . De acordo com a definição podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + 1.r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

.....

Podemos deduzir das igualdades acima que: $a_n = a_1 + (n - 1).r$ (Fórmula do Termo Geral da PA).

Dessa fórmula, temos que:

→ a_n é o termo de ordem n (n-ésimo termo);

→ r é a razão;

→ a_1 é o primeiro termo da Progressão Aritmética (PA).

Assim, temos que:

$$a_{20} = a_1 + 19.r$$

$$a_{33} = a_1 + 32.r$$

$$a_{50} = a_1 + 49.r$$

E assim sucessivamente.

Exercícios

1) Considere a PA (3, 6, 9, ...). Determine:

a) O primeiro termo;

b) A razão;

c) O quarto termo;

d) O centésimo termo.

$$\mathbf{a) } a_1 = 3 \quad \mathbf{b) } r = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3 \quad \mathbf{c) } a_4 = a_3 + r = 9 + 3 = 12$$

$$\mathbf{d) } a_{100} = a_1 + 99.r \rightarrow a_{100} = 3 + 99.3 \rightarrow a_{100} = 3 + 297 \rightarrow a_{100} = 300$$

2) Numa P.A. de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual é a posição do termo igual a 44 ?

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ r = 5 \\ a_n = 44 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \rightarrow 44 = 4 + (n - 1).5 \rightarrow 40 = 5n - 5 \rightarrow 45 = 5n \rightarrow n = 9$$

3) Considere a sequência dos números positivos ímpares, colocados em ordem crescente. Calcule 95º elemento.

a) 95

b) 131

c) 187

d) 189

e) 191

$$PA = (1, 3, 5, \dots)$$

$$a_{95} = a_1 + 94.r \rightarrow a_{95} = 1 + 94.2 \rightarrow a_{95} = 1 + 188 \rightarrow a_{95} = 189$$

GABARITO: D

4) Numa P.A., cujo 2º termo é igual a 5 e o 6º termo é igual a 13, o 20º termo é igual a:

a) 13

b) 40

c) 41

d) 42

e) 45

$$\begin{cases} a_2 = 5 \rightarrow a_1 + r = 5 \\ a_6 = 13 \rightarrow a_1 + 5.r = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ a_1 + 5.r = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a_1 - r = -5 \\ a_1 + 5.r = 13 \end{cases} \rightarrow 4.r = 8 \rightarrow r = 2 \rightarrow a_1 + 2 = 5 \rightarrow a_1 = 3$$

$$PA = (3, 5, 7, \dots)$$

$$a_{20} = a_1 + 19.r \rightarrow a_{20} = 3 + 19.2 \rightarrow a_{20} = 41$$

GABARITO: C

Classificação de PA

1) Uma PA é crescente quando cada termo é maior que o anterior. Isso acontece quando $r > 0$.

Exemplos

1) (4, 6, 8, 10, ...)

2) (-5, -2, 1, 4, ...)

2) Uma PA é constante quando cada termo é igual ao anterior. Isto acontece quando $r = 0$.

Exemplos

1) (4, 4, 4, 4, ...)

2) (-3, -3, -3, -3, ...)

3) Uma PA é decrescente quando cada termo é menor que o anterior. Isso acontece quando $r < 0$.

Exemplos

1) (5, 4, 3, 2, ...)

2) (-2, -4, -6, -8, -10, ...)

Notações especiais

Quando procuramos obter uma PA com 3 ou 4 termos é muito prática a notação seguinte:

1ª) para 3 termos: $(x - r, x, x + r)$

2ª) para 4 termos: $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

Exercício

1) Obtenha uma PA de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

$$(x - r, x, x + r) \rightarrow \begin{cases} x - r + x + x + r = 24 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 440 \end{cases}$$

$$(8 - r) \cdot 8 \cdot (8 + r) = 440 \rightarrow (8 - r) \cdot (8 + r) = 55 \rightarrow 64 - r^2 = 55 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$$

$$\begin{cases} x = 8 \text{ e } r = 3 \rightarrow (5, 8, 11) \\ x = 8 \text{ e } r = -3 \rightarrow (11, 8, 5) \end{cases}$$

Propriedades de uma PA

P1: Em toda Progressão Aritmética (PA), um termo qualquer, excluindo-se os extremos, é média aritmética entre o seu antecedente e o seu conseqüente. Assim, se (a_1, a_2, a_3) são termos de uma PA, então: $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$.

Exemplo: PA = (2, 4, 6, 8, 10, ...) temos que:

$$4 = \frac{2 + 6}{2}; 6 = \frac{4 + 8}{2}; 8 = \frac{6 + 10}{2}$$

P2: Em toda Progressão Aritmética (PA), a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Na PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ temos que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \text{etc}$$

Exemplo: PA = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14) temos que:

$$2 + 14 = 4 + 12 = 6 + 10 = 8.2$$

P3: Em toda P.A. de número ímpar de termos, o termo central ou termo médio é a média aritmética dos termos equidistantes a ele.

Exemplo: PA = (2, 4, 6, 8, 10,) temos que:

$$6 = \frac{2 + 10}{2} = \frac{4 + 8}{2}$$

Exercícios

1) Na PA $(x + 3, x - 2, 3x + 1)$, encontre o quarto termo.

$$\text{Pela P1} \rightarrow x - 2 = \frac{(x + 3) + (3x + 1)}{2} \rightarrow 2x - 4 = 4x + 4 \rightarrow 2x = -8 \rightarrow x = -4$$

$$PA = (-4 + 3, -4 - 2, 3 \cdot (-4) + 1) \rightarrow PA = (-1, -6, -11) \rightarrow a_4 = -16$$

2) Os números $\left(\frac{10}{x}, x - 3, x + 3\right)$ são os três primeiros termos de uma P.A., de termos positivos, sendo $x \neq 0$. Determine o décimo termo desta PA.

$$x - 3 = \frac{\frac{10}{x} + x + 3}{2} \rightarrow 2x - 6 = \frac{10}{x} + x + 3 \rightarrow 2x^2 - 6x = 10 + x^2 + 3x$$

$$x^2 - 9x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2} \quad x = \begin{cases} x_1 = \frac{9 + 11}{2} = 10 \\ x_2 = \frac{9 - 11}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \rightarrow PA = \left(\frac{10}{10}, 10 - 3, 10 + 3\right) \rightarrow PA = (1, 7, 13) \rightarrow \text{Termos positivos} \rightarrow \text{ok} \\ x = -1 \rightarrow PA = \left(\frac{10}{-1}, -1 - 3, -1 + 3\right) \rightarrow PA = (-10, -4, 2) \rightarrow \text{Tem termo negativo} \rightarrow \text{n\~{a}o serve} \end{cases}$$

$$PA = (1, 7, 13, \dots) \rightarrow a_{10} = a_1 + 9 \cdot r \rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot 6 \rightarrow a_{10} = 55$$

Soma dos termos uma Progressão Aritmética (P.A.): A Soma dos termos de uma P.A. finita (ou limitada) é igual ao produto da semissoma dos extremos pelo número de termos.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exercícios

1) Calcular a soma dos 20 primeiros termos da P.A. (2, 5, 8...).

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot r \rightarrow a_{20} = 2 + 19 \cdot 3 \rightarrow a_{20} = 59$$

$$S_{20} = \frac{(2 + 59) \cdot 20}{2} \rightarrow S_{20} = 61 \cdot 10 \rightarrow S_{20} = 610$$

2) Numa PA $a_4 = 16$ e $a_7 = 40$. Ache a soma dos 10 primeiros termos.

$$\begin{cases} a_4 = 16 \rightarrow a_1 + 3.r = 16 \\ a_7 = 40 \rightarrow a_1 + 6.r = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 - 3.r = -16 \\ a_1 + 6.r = 40 \end{cases} \rightarrow 3.r = 24 \rightarrow r = 8 \rightarrow a_1 + 6.8 = 40 \rightarrow a_1 = -8$$

$$PA = (-8, 0, 8, 16, \dots) \rightarrow a_{10} = a_1 + 9.r \rightarrow a_{10} = -8 + 9.8 \rightarrow a_{10} = 64$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2} \rightarrow S_{10} = \frac{(-8 + 64).10}{2} \rightarrow S_{10} = \frac{56.10}{2} \rightarrow S_{10} = 280$$

3) Uma pessoa arrumou suas fichas da seguinte forma: colocou 1 ficha na primeira fila, 3 fichas na segunda fila, 5 fichas na terceira fila, e assim sucessivamente. Se essa pessoa usou 20 filas, quantas fichas ela possui?

$$PA = (1, 3, 5, 7, \dots, a_{20}) \rightarrow a_{20} = a_1 + 19.r \rightarrow a_{20} = 1 + 19.2 \rightarrow a_{20} = 39$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{(1 + 39).20}{2} \rightarrow S_{20} = 40.10 \rightarrow S_{20} = 400$$

4) Calcule a soma dos 17 primeiros termos de uma P.A., sabendo que $r = 1/4$ e $a_{17} = 21$.

$$a_{17} = a_1 + 16.r \rightarrow 21 = a_1 + 16.\frac{1}{4} \rightarrow 21 = a_1 + 4 \rightarrow a_1 = 17$$

$$S_{17} = \frac{(a_1 + a_{17}).17}{2} \rightarrow S_{17} = \frac{(17 + 21).17}{2} \rightarrow S_{17} = \frac{38.17}{2} \rightarrow S_{17} = 323$$

Interpolação de uma Progressão Aritmética (P.A.): Interpolar ou inserir “**k**” meios aritméticos entre dois extremos **a_1** e **a_n** , significa formar uma P.A. de $n = k + 2$ termos onde **a_1** e **a_n** são os extremos. Como **a_1** e **a_n** são sempre dados, basta determinar a razão **r** .

Exercícios

1) Inserir 4 meios aritméticos entre 3 e 38.

$$PA = (3, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 38)$$

$$a_1 = 3; a_6 = 38; n = 6; r = ?$$

$$a_6 = a_1 + 5.r \rightarrow 38 = 3 + 5.r \rightarrow 35 = 5.r \rightarrow r = 7$$

$$PA = (3, 10, 17, 24, 31, 38)$$

2) Determine a média aritmética dos seis meios aritméticos que podem ser interpolados entre 10 e 500.

$$PA = (10, _, _, _, _, _, _, 500)$$

$$\begin{cases} n = 8 \\ a_1 = 10 \\ a_8 = 500 \end{cases} \quad a_8 = a_1 + 7.r \rightarrow 500 = 10 + 7.r \rightarrow 490 = 7.r \rightarrow r = 70$$

$$PA = (10, 80, 150, 220, 290, 360, 430, 500)$$

$$M.A. = \frac{80 + 150 + 220 + 290 + 360 + 430}{6} = \frac{1530}{6} = 255$$

Exercícios de revisão

1) Uma progressão aritmética de razão 4 possui cinco termos. Se o último termo vale 1000, qual o primeiro termo?

$$\begin{cases} n = 5 \\ r = 4 \\ a_5 = 1000 \end{cases} \quad a_5 = a_1 + 4.r \rightarrow 1000 = a_1 + 4.4 \rightarrow 1000 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 984$$

2) (UFRGS) Em uma Progressão Aritmética, o primeiro termo é 23 e a razão é -6, determine a posição ocupada pelo elemento -13.

$$\begin{cases} a_1 = 23 \\ r = -6 \\ a_n = -13 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \rightarrow -13 = 23 + (n - 1).(-6) \rightarrow -36 = -6n + 6 \rightarrow 6n = 42 \rightarrow n = 7$$

3) Determine o valor de x para que a sequência $(2x, x+1, 3x)$ seja uma PA.

$$x + 1 = \frac{2x + 3x}{2} \rightarrow 2x + 2 = 5x \rightarrow 2 = 3x \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

4) Qual o número de termos da PA: $(100, 98, 96, \dots, 22)$?

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ r = -2 \\ a_n = 22 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \rightarrow 22 = 100 + (n - 1).(-2) \rightarrow -78 = -2n + 2 \rightarrow 2n = 80 \rightarrow n = 40$$

5) Uma P.A. tem vinte elementos. Seu 1º termo é 1 e a soma de seus termos é 590. Determine o 15º elemento.

$$\begin{cases} n = 20 \\ a_1 = 1 \\ S_{20} = 590 \end{cases}$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \rightarrow 590 = (1 + (a_1 + 19 \cdot r)) \cdot 10 \rightarrow 59 = 1 + 1 + 19 \cdot r \rightarrow 57 = 19 \cdot r \rightarrow r = 3$$

$$a_{15} = a_1 + 14 \cdot r \rightarrow a_{15} = 1 + 14 \cdot 3 \rightarrow a_{15} = 43$$

6) Depois de 3 anos, o capital de R\$ 2.000,00 rendeu R\$ 2.160,00 de juro simples. Qual foi a taxa anual de juro da aplicação?

$$\begin{cases} t = 3 \text{ anos} \\ C = 2000 \\ J = 2160 \end{cases}$$

$$J = C \cdot i \cdot t \rightarrow 2160 = 2000 \cdot i \cdot 3 \rightarrow 2160 = 6000 \cdot i \rightarrow i = \frac{2160}{6000} \rightarrow i = \frac{36}{100} \rightarrow i = 36\% \text{ a. a}$$