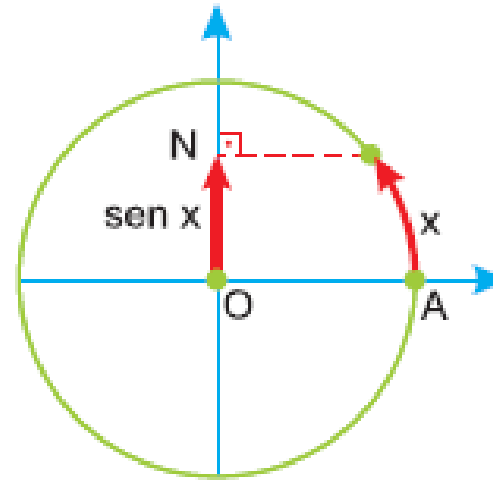
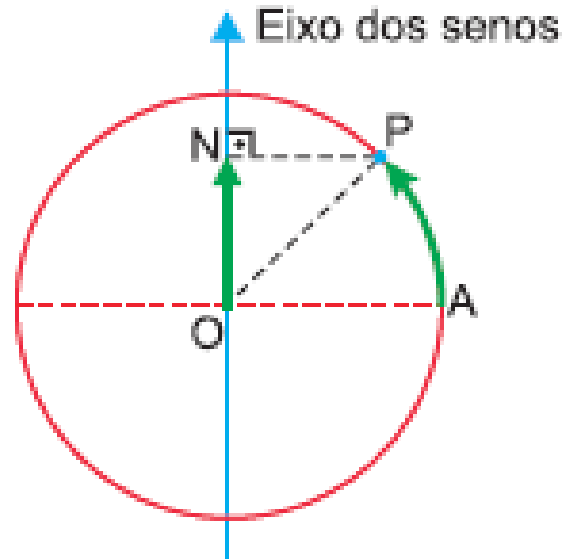


TRIGONOMETRIA

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

FUNÇÃO SENO



A cada número real x corresponde um único ponto P , extremidade do arco AP de medida x . A cada ponto P , por sua vez, corresponde uma única ordenada chamada seno de x .

A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a ordenada do ponto P é, por definição, a função seno.

Simbolicamente

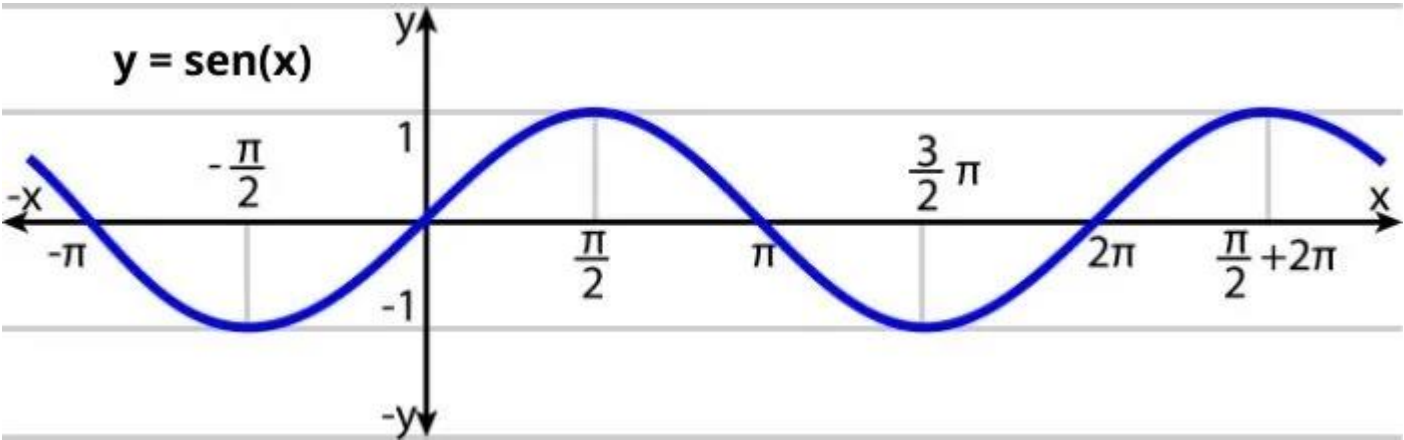
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x = ON$$

Variação da função seno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° e o seno de x varia de -1 a 1 . Assim: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.

Gráfico da função seno. $f(x) = \text{sen } x$.

x	F(x) = sen x
$0^\circ = 0 \text{ rad}$	0
$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	1
$180^\circ = \pi \text{ rad}$	0
$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	-1
$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$	0

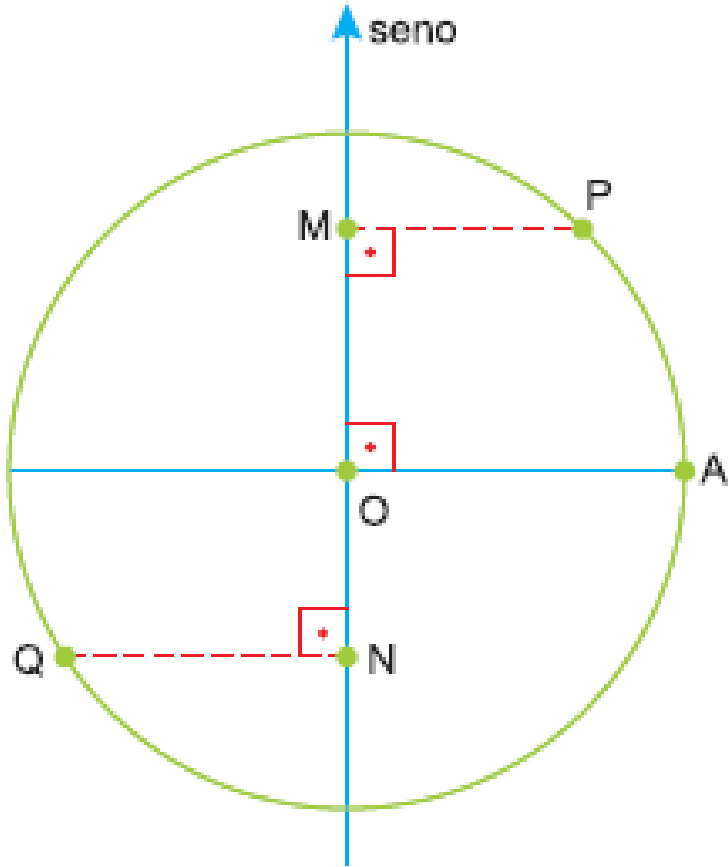


$$\begin{cases} Dom. = R \\ Im = [-1, 1] \\ p = 2\pi \end{cases}$$

OBS. O período $p \rightarrow p = \frac{2\pi}{k}$, k é o valor de quem está multiplicando x .

Exercícios

1) Utilizando a figura, complete as definições:

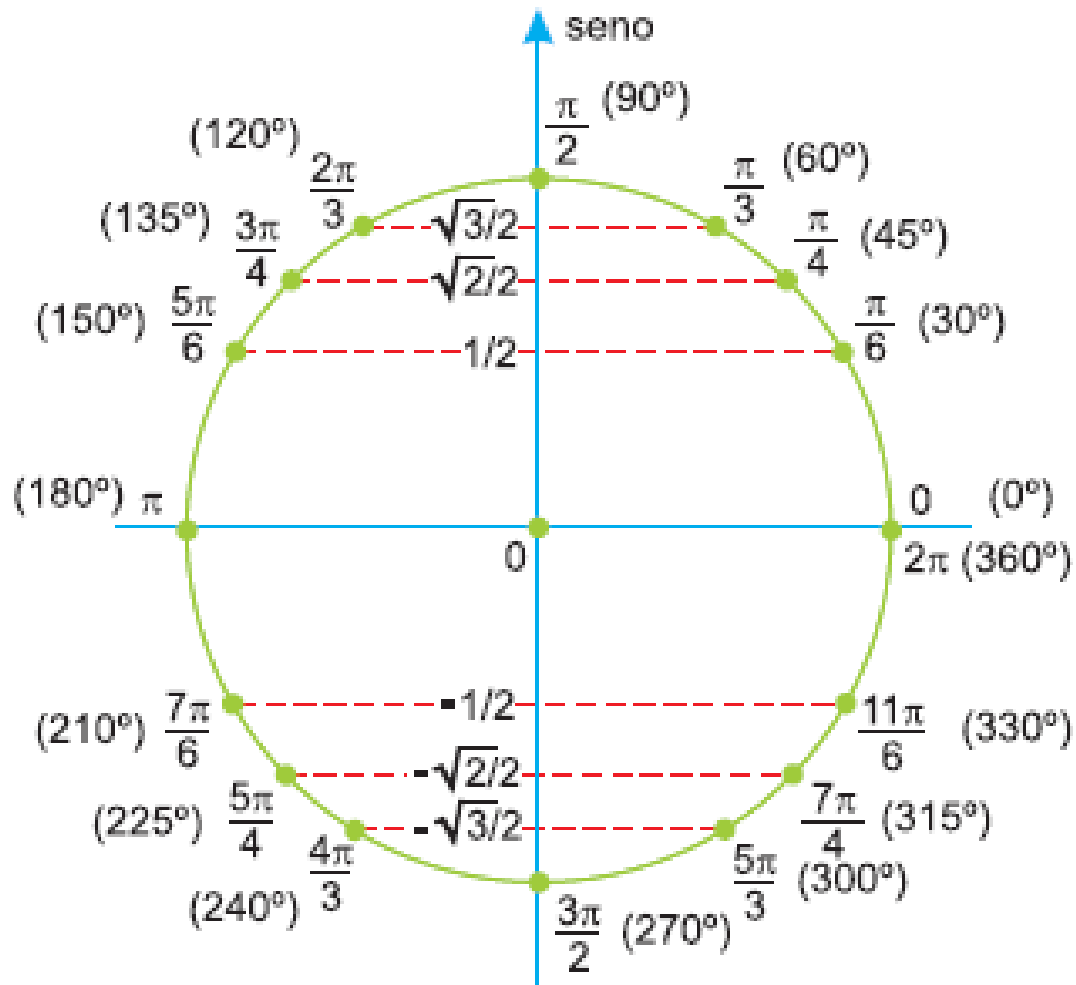


$\text{sen } \widehat{AP} = \dots\dots\dots$

$\text{sen } \widehat{AQ} = \dots\dots\dots$

$$\begin{cases} \text{sen } \widehat{AP} = OM \\ \text{sen } \widehat{AQ} = ON \end{cases}$$

2) Utilizando o ciclo trigonométrico abaixo, complete:



a) $\text{sen } 30^\circ = \text{sen } 150^\circ = ?$

b) $\text{sen } 210^\circ = \text{sen } 330^\circ = ?$

c) $\text{sen } 45^\circ = \text{sen } 135^\circ = ?$

d) $\text{sen } 225^\circ = \text{sen } 315^\circ = ?$

e) $\text{sen } 0^\circ = \text{sen } 180^\circ = \text{sen } 360^\circ = ?$

f) $\text{sen } 240^\circ = \text{sen } 300^\circ = ?$

a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) 0 ; f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Encontre o período e o Conjunto Imagem das funções abaixo:

$$a) f(x) = 3 + 2 \cdot \text{sen} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow p = \frac{2\pi}{2} \rightarrow p = \pi$$

Os valores máximo e mínimo do seno são -1 e 1 . Assim:

$$\begin{cases} \text{sen} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \rightarrow 3 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1 \\ \text{sen} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \rightarrow 3 + 2 \cdot (1) = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$Im = [1, 5]$$

$$b) y = 4 - 3 \cdot \text{sen} \left(\frac{x}{2} - \pi \right)$$

$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 4\pi$$

Os valores máximo e mínimo do seno são -1 e 1 . Assim:

$$\begin{cases} \text{sen} \left(\frac{x}{2} - \pi \right) = -1 \rightarrow 4 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7 \\ \text{sen} \left(\frac{x}{2} - \pi \right) = 1 \rightarrow 4 - 3 \cdot (1) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

$$Im = [1, 7]$$

$$c) f(x) = -5 - 2 \cdot \text{sen}(3x + \pi)$$

$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow p = \frac{2\pi}{3} \rightarrow p = \frac{2\pi}{3}$$

Os valores máximo e mínimo do seno são -1 e 1 . Assim:

$$\begin{cases} \text{sen}(3x + \pi) = -1 \rightarrow -5 - 2 \cdot (-1) = -5 + 2 = -3 \\ \text{sen}(3x + \pi) = 1 \rightarrow -5 - 2 \cdot (1) = -5 - 2 = -7 \end{cases}$$

$$Im = [-7, -3]$$

4) Encontre o valor máximo e mínimo das expressões abaixo:

a) $y = 3 - \text{sen}(2x)$

Os valores máximo e mínimo de $\text{sen}(2x)$ são 1 e -1. Assim:

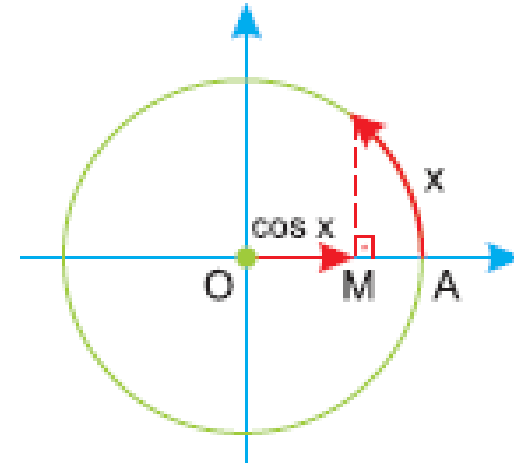
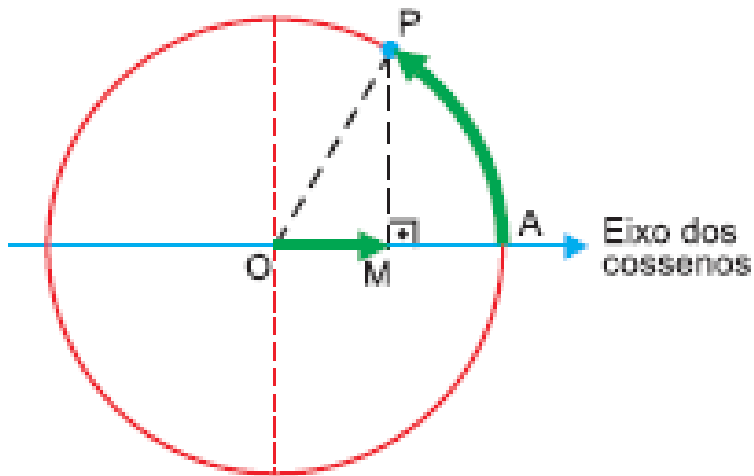
$$\begin{cases} \text{sen}(2x) = -1 \rightarrow y = 3 - (-1) = 4 \\ \text{sen}(2x) = 1 \rightarrow 3 - (1) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valor mínimo} = 2 \\ \text{Valor máximo} = 4 \end{cases}$$

b) $y = \frac{3}{2 - \text{sen}(3x)}$

Os valores máximo e mínimo de $\text{sen}(3x)$ são 1 e -1. Assim:

$$\begin{cases} \text{sen}(3x) = -1 \rightarrow y = \frac{3}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1 \\ \text{sen}(3x) = 1 \rightarrow y = \frac{3}{2 - 1} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valor mínimo} = 1 \\ \text{Valor máximo} = 3 \end{cases}$$

FUNÇÃO COSSENO



A cada número real x corresponde um único ponto P , extremidade do arco AP de medida x . A cada ponto P , por sua vez, corresponde uma única abscissa chamada cosseno de x .

A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a abscissa do ponto P é, por definição, a função cosseno.

Simbolicamente:

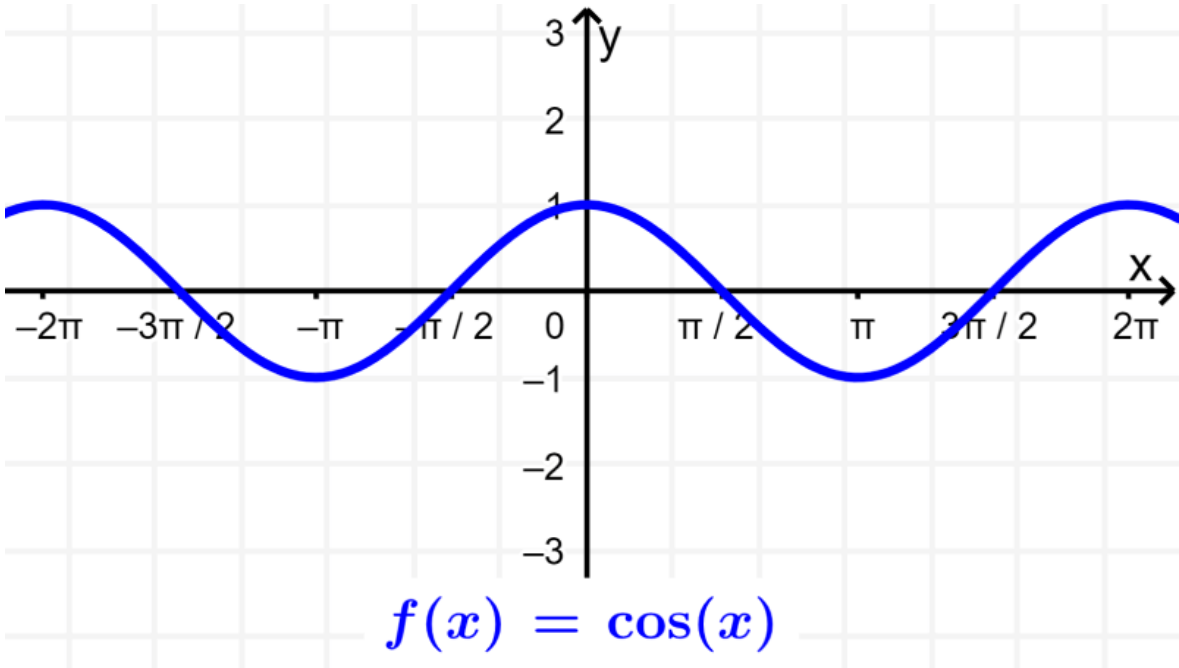
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos x = OM$$

Variação da função cosseno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° e o cosseno de x varia de -1 a 1 . Assim: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Gráfico da função seno. $f(x) = \cos x$.

x	$F(x) = \cos x$
$0^\circ = 0 \text{ rad}$	1
$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	0
$180^\circ = \pi \text{ rad}$	-1
$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	0
$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$	1

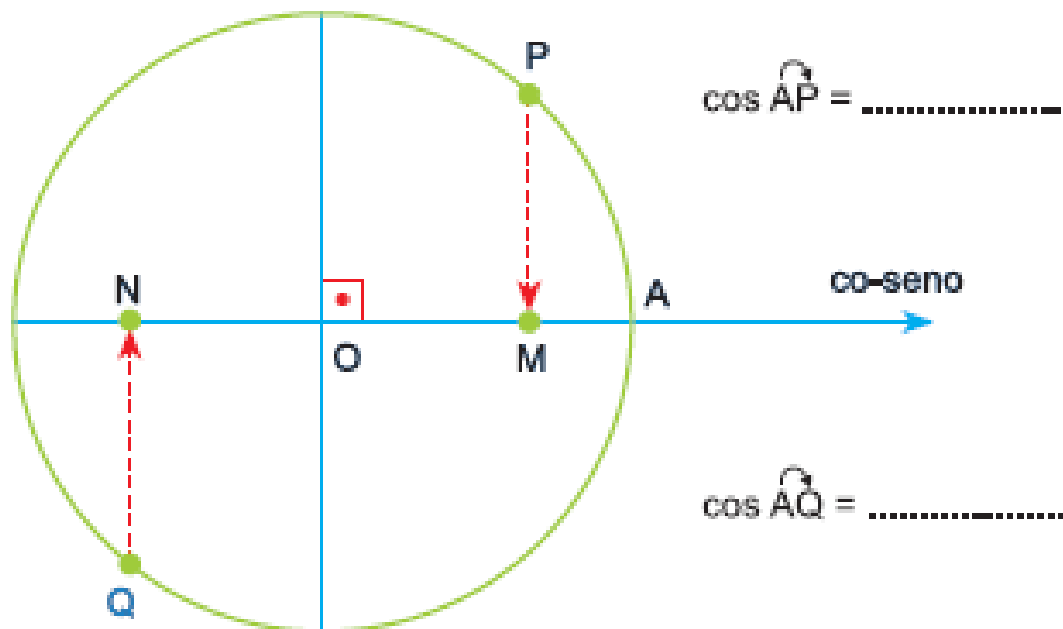


$$\begin{cases} Dom. = R \\ Im = [-1, 1] \\ p = 2\pi \end{cases}$$

OBS. O período $p \rightarrow p = \frac{2\pi}{k}$, k é o valor de quem está multiplicando x .

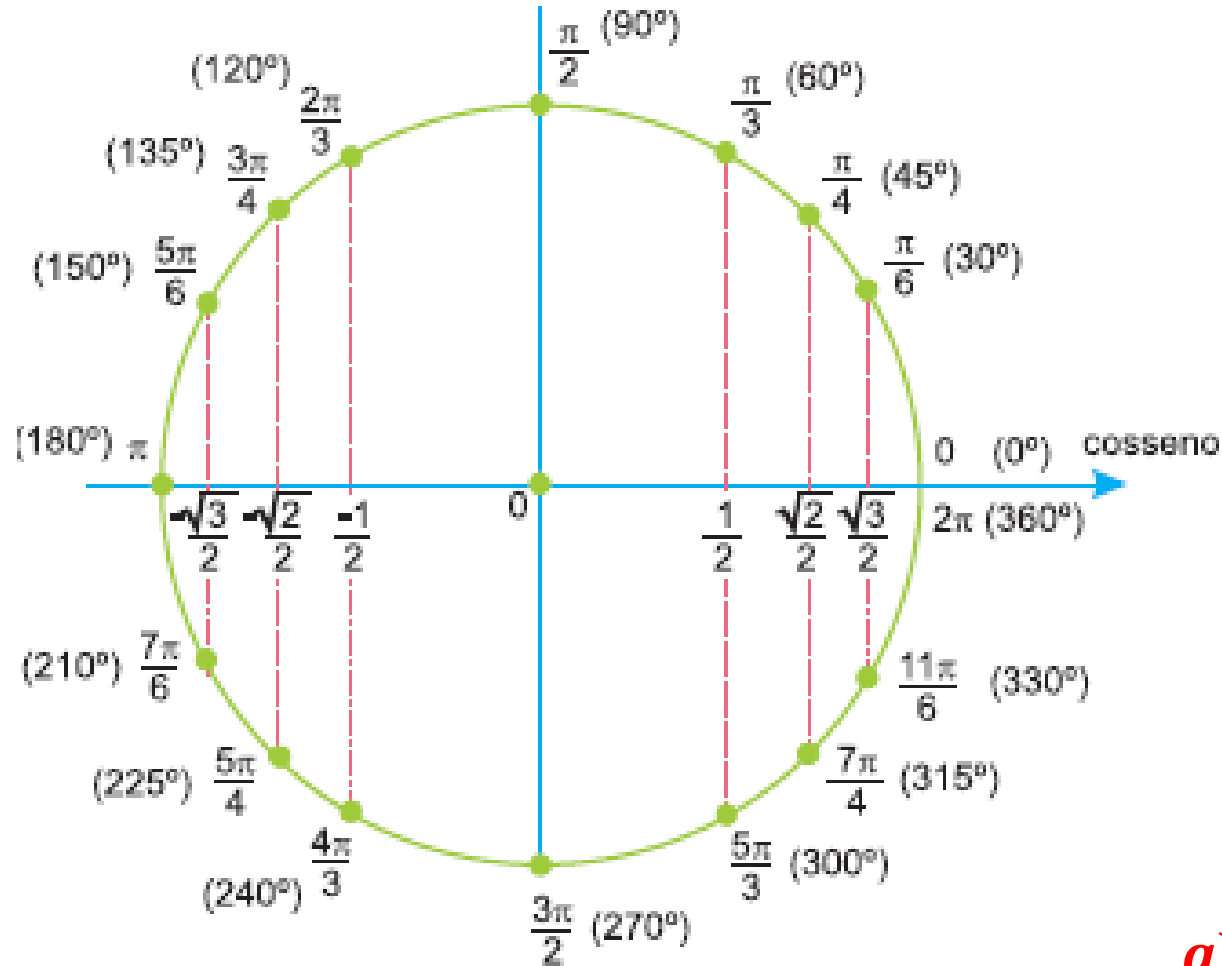
Exercícios

1) Utilizando a figura, complete as definições:



$$\begin{cases} \cos \widehat{AP} = OM \\ \cos \widehat{AQ} = ON \end{cases}$$

2) Utilizando o ciclo trigonométrico abaixo, complete a tabela.



a) $\cos 30^\circ = \cos 330^\circ = ?$

b) $\cos 150^\circ = \cos 210^\circ = ?$

c) $\cos 45^\circ = \cos 315^\circ = ?$

d) $\cos 135^\circ = \cos 225^\circ = ?$

e) $\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = ?$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) 1

3) Encontre o período e o Conjunto Imagem das funções abaixo:

$$a) f(x) = 3 + 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow p = \frac{2\pi}{2} \rightarrow p = \pi$$

Os valores máximo e mínimo do cosseno são -1 e 1 . Assim:

$$\begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \rightarrow 3 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1 \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \rightarrow 3 + 2 \cdot (1) = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$Im = [1, 5]$$

$$b) y = 4 - 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$

$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 4\pi$$

Os valores máximo e mínimo do cosseno são -1 e 1 . Assim:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) = -1 \rightarrow 4 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7 \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) = 1 \rightarrow 4 - 3 \cdot (1) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

$$Im = [1, 7]$$

$$c) f(x) = -5 - 2 \cdot \cos(3x + \pi)$$

$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow p = \frac{2\pi}{3} \rightarrow p = \frac{2\pi}{3}$$

Os valores máximo e mínimo do cosseno são -1 e 1 . Assim:

$$\begin{cases} \cos(3x + \pi) = -1 \rightarrow -5 - 2 \cdot (-1) = -5 + 2 = -3 \\ \cos(3x + \pi) = 1 \rightarrow -5 - 2 \cdot (1) = -5 - 2 = -7 \end{cases}$$

$$Im = [-7, -3]$$

4) Encontre o valor máximo e mínimo das expressões abaixo:

a) $y = 3 - \cos(2x)$

Os valores máximo e mínimo de $\cos(2x)$ são 1 e -1. Assim:

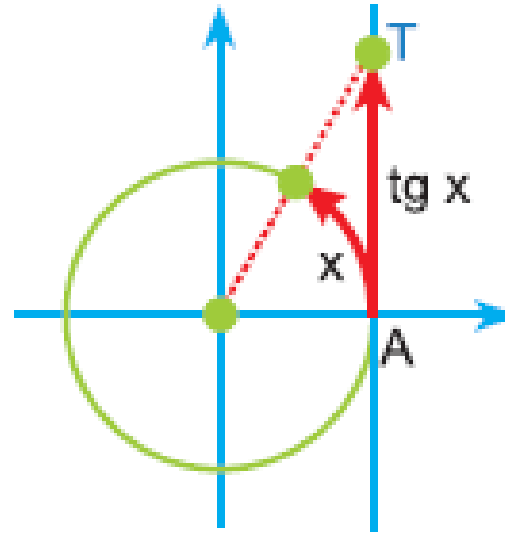
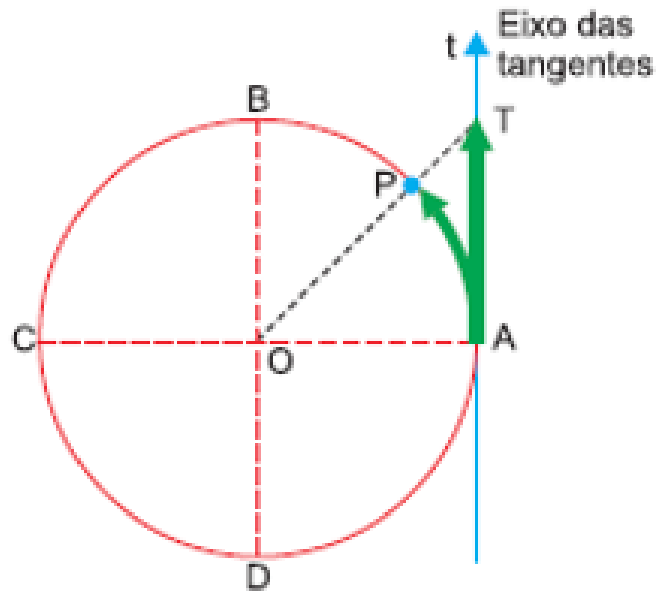
$$\begin{cases} \cos(2x) = -1 \rightarrow y = 3 - (-1) = 4 \\ \cos(2x) = 1 \rightarrow 3 - (1) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valor mínimo} = 2 \\ \text{Valor máximo} = 4 \end{cases}$$

b) $y = \frac{3}{2 - \sin(3x)}$

Os valores máximo e mínimo de $\sin(3x)$ são 1 e -1. Assim:

$$\begin{cases} \sin(3x) = -1 \rightarrow y = \frac{3}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1 \\ \sin(3x) = 1 \rightarrow y = \frac{3}{2 - 1} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valor mínimo} = 1 \\ \text{Valor máximo} = 3 \end{cases}$$

FUNÇÃO TANGENTE



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco AP de medida x . A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única medida algébrica AT, chamada tangente de x .

A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a medida algébrica AT é, por definição, a função tangente.

Simbolicamente

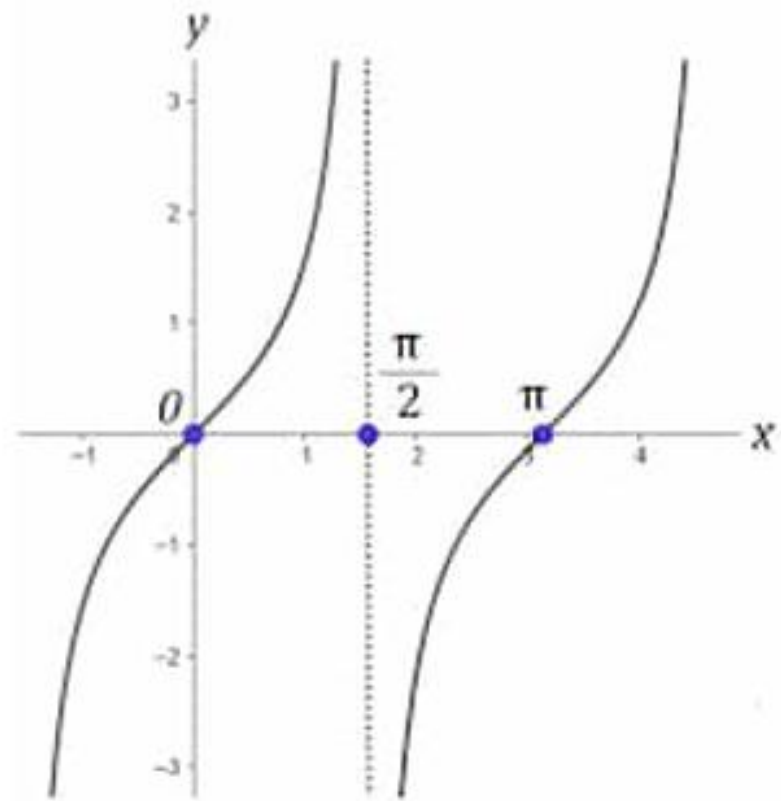
$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \operatorname{tg} x = AT$$

Variação da função tangente

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° , e a tangente varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Gráfico da função seno. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

x	$F(x) = \operatorname{tg} x$
$0^\circ = 0 \operatorname{rad}$	0
$90^\circ = \frac{\pi}{2} \operatorname{rad}$	$\nexists$
$180^\circ = \pi \operatorname{rad}$	0
$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \operatorname{rad}$	$\nexists$
$360^\circ = 2\pi \operatorname{rad}$	0

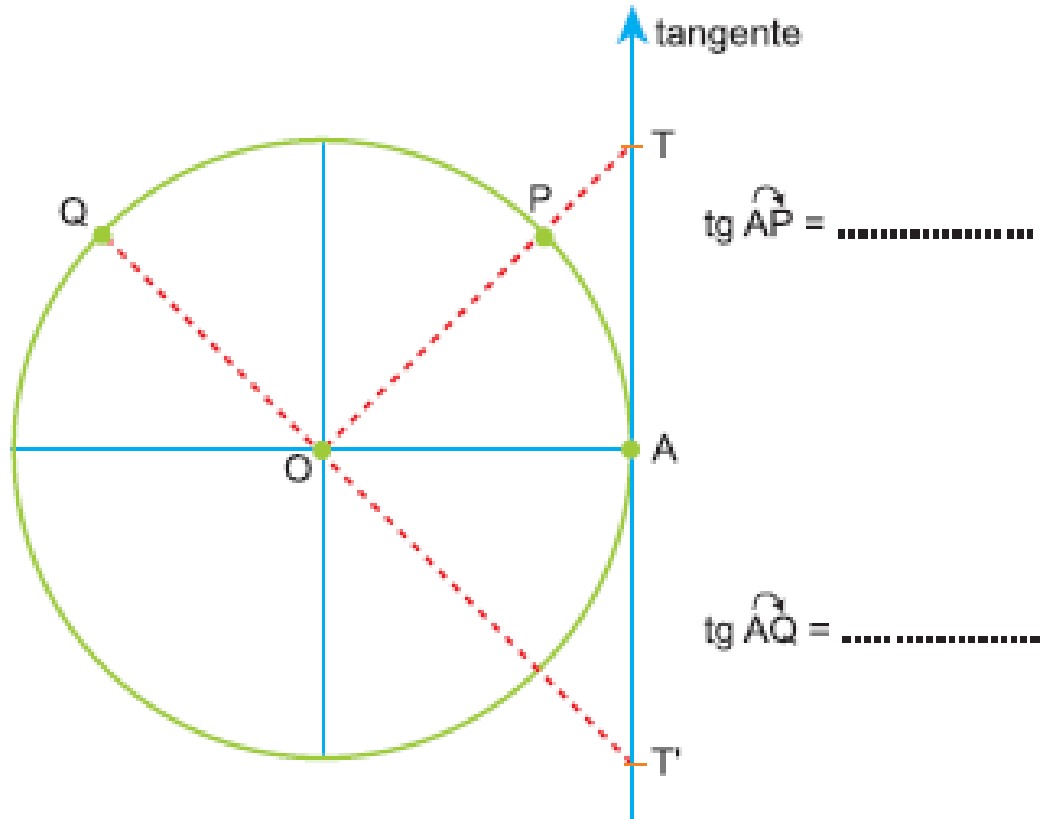


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dom.} = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \text{Conjunto Imagem} = \mathbb{R} \\ p = \pi \end{array} \right.$$

OBS. O período $p \rightarrow p = \frac{\pi}{k}$, k é o valor de quem está multiplicando x .

Exercícios

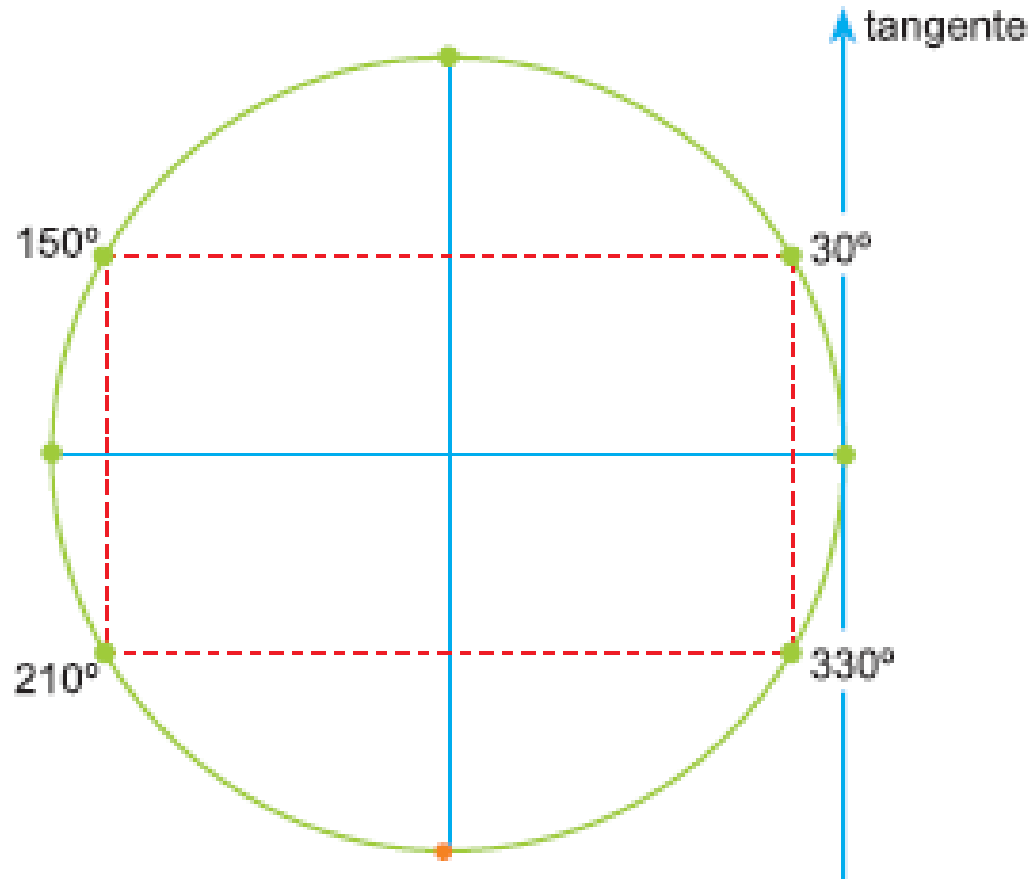
1) Utilizando a figura, complete as definições.



$$\begin{cases} \text{tg } \widehat{AP} = AT \\ \text{tg } \widehat{AQ} = AT' \end{cases}$$

2) Encontre a tangente dos arcos abaixo:

a)



a) $tg 30^\circ = ?$

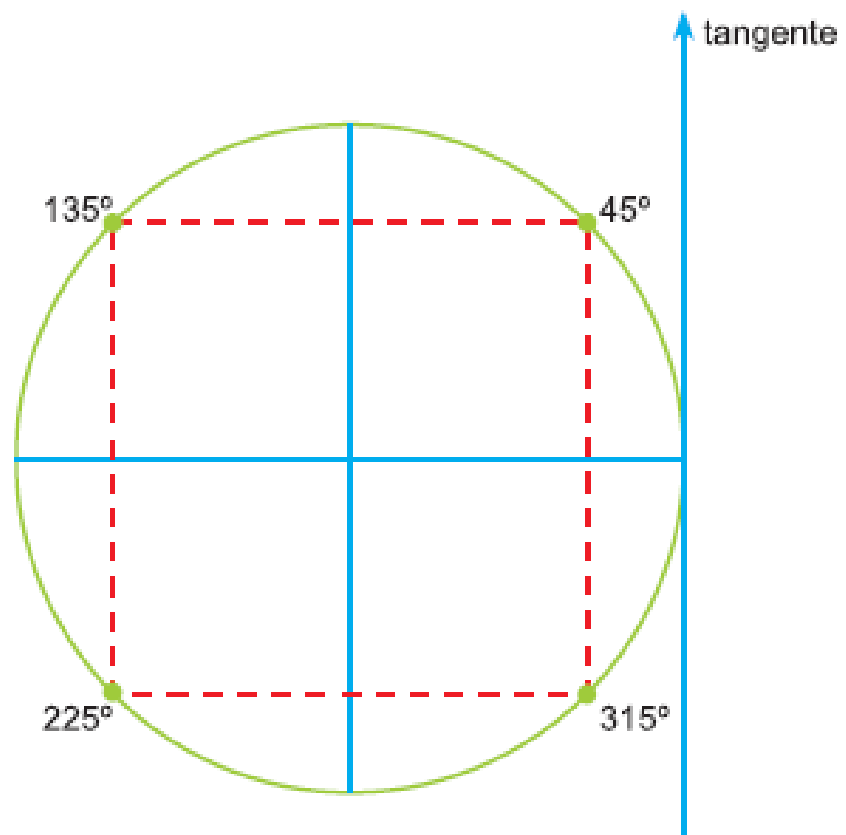
b) $tg 150^\circ = ?$

c) $tg 210^\circ = ?$

d) $tg 330^\circ = ?$

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b)



a) $tg 45^\circ = ?$

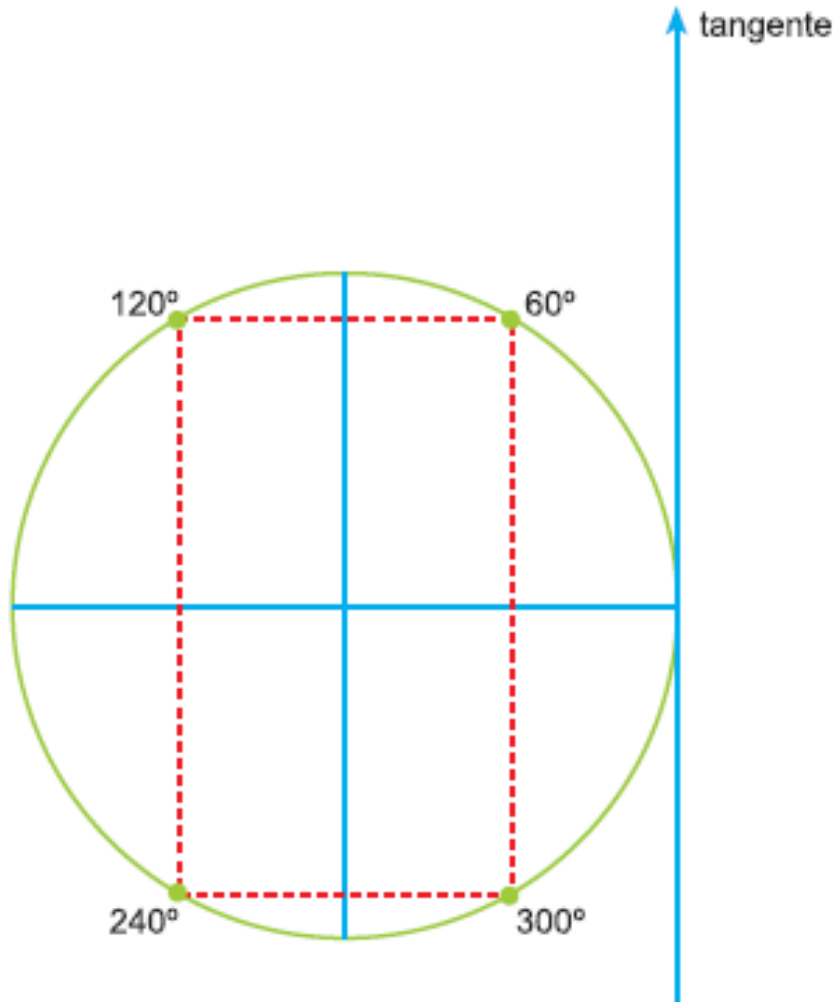
b) $tg 135^\circ = ?$

c) $tg 225^\circ = ?$

d) $tg 315^\circ = ?$

a) 1; b) - 1; c) 1; d) - 1

c)



a) $tg 60^\circ = ?$

b) $tg 120^\circ = ?$

c) $tg 240^\circ = ?$

d) $tg 300^\circ = ?$

a) $\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{3}$

Resumo teórico

1. Função seno

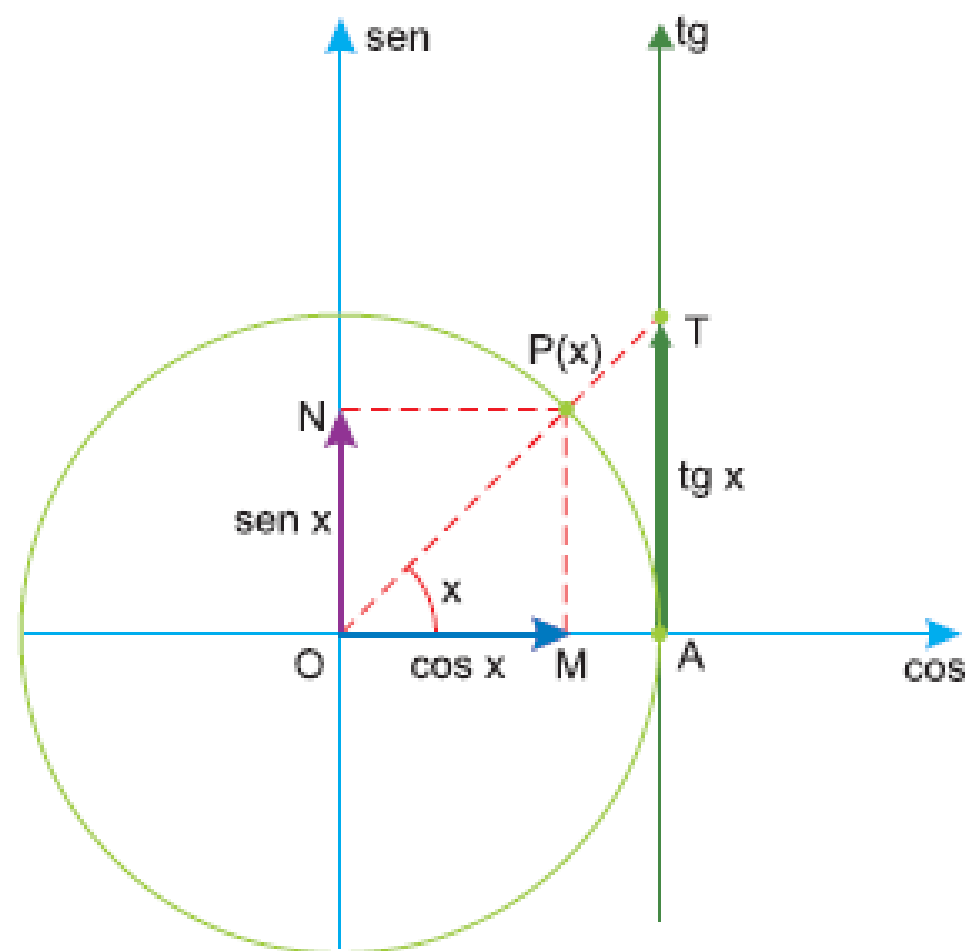
- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x = \text{ON}$
- b) o conjunto imagem é $[-1; 1]$ e o período é 2π

2. Função cosseno

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{cos } x = \text{OM}$
- b) o conjunto imagem é $[-1; 1]$ e o período é 2π

3. Função tangente

- a) $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{tg } x = \text{AT}$
- b) o conjunto imagem é $\mathbb{R}$ e o período é π



Relações fundamentais e Auxiliares

- $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

- $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

- $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$

- $\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$

- $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

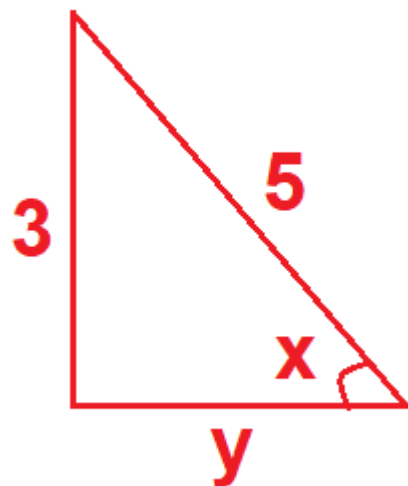
- $\text{sec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$

- $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

Exercícios

1) Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, encontre as demais razões trigonométricas.

$\frac{\pi}{2} < x < \pi \rightarrow x \in 2^{\circ} \text{ quadrante}$



$$5^2 = y^2 + 3^2 \rightarrow 25 = y^2 + 9 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = 4$$

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\sec x = -\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$$

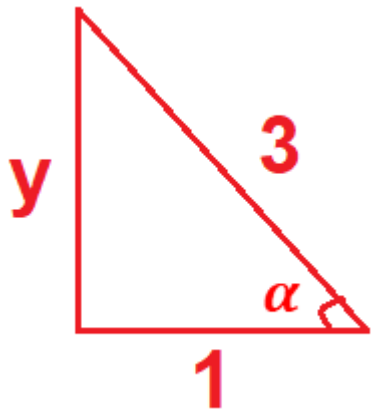
$$\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}$$

2) Sabendo que $\sec\alpha = 3$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, encontre as demais razões trigonométricas.

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \rightarrow \alpha \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante}$$

$$\sec\alpha = 3 \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$



$$3^2 = 1^2 + y^2 \rightarrow 9 = 1 + y^2 \rightarrow y^2 = 8 \rightarrow y = \sqrt{8} \rightarrow y = 2\sqrt{2}$$

$$\sen\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

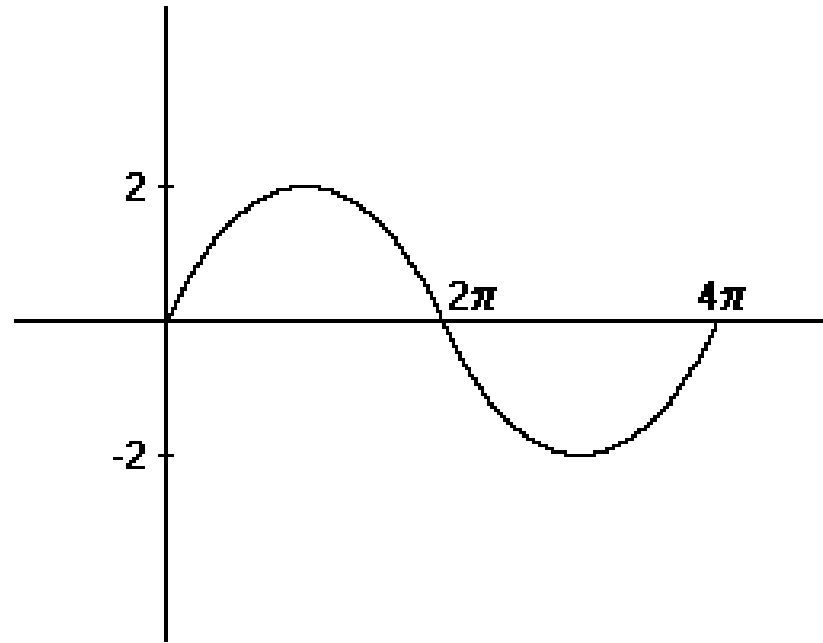
$$\cossec\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \cossec\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$

$$cotg\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:

- a) $\text{sen } x$
- b) $2 \text{ sen } (x/2)$
- c) $2 \text{ sen } x$
- d) $2 \text{ sen } 2x$
- e) $\text{sen } 2x$



$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{k} \rightarrow 4 = \frac{2}{k} \rightarrow k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$Im = [-2, 2] \rightarrow$ A função estará multiplicada por 2

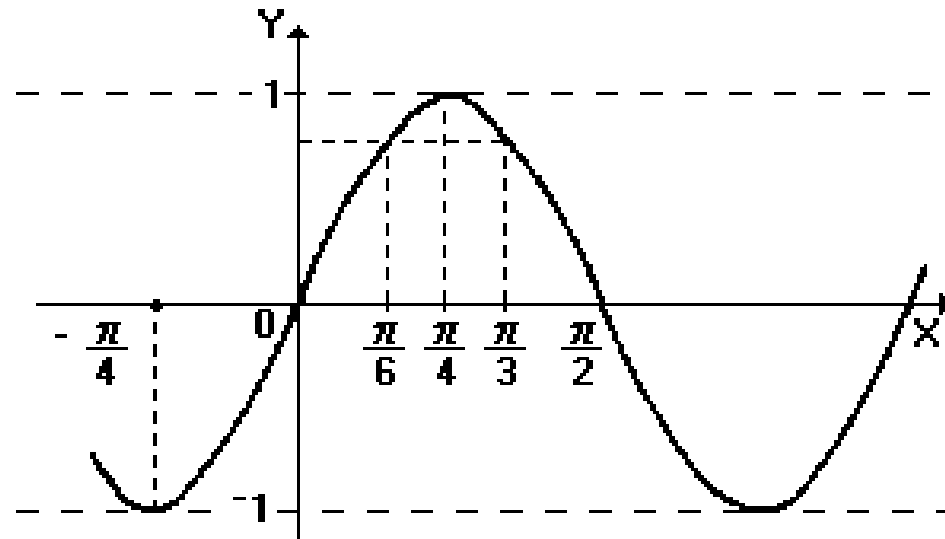
Como o gráfico começa na origem, a função é seno. Assim: $f(x) = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)$

GABARITO: B

4) Observe o gráfico a seguir.

A função real de variável real que MELHOR corresponde a esse gráfico é

- a) $y = \cos x$
- b) $y = \sin x$
- c) $y = \cos 2x$
- d) $y = \sin 2x$
- e) $y = 2 \sin x$



$$P = \frac{2\pi}{k} \rightarrow \pi = \frac{2\pi}{k} \rightarrow k = 2$$

$$Im = [-1, 1]$$

Como o gráfico começa na origem, a função é seno. Assim: $f(x) = \sin(2x)$

GABARITO: D

5) A figura a seguir é parte do gráfico da função:

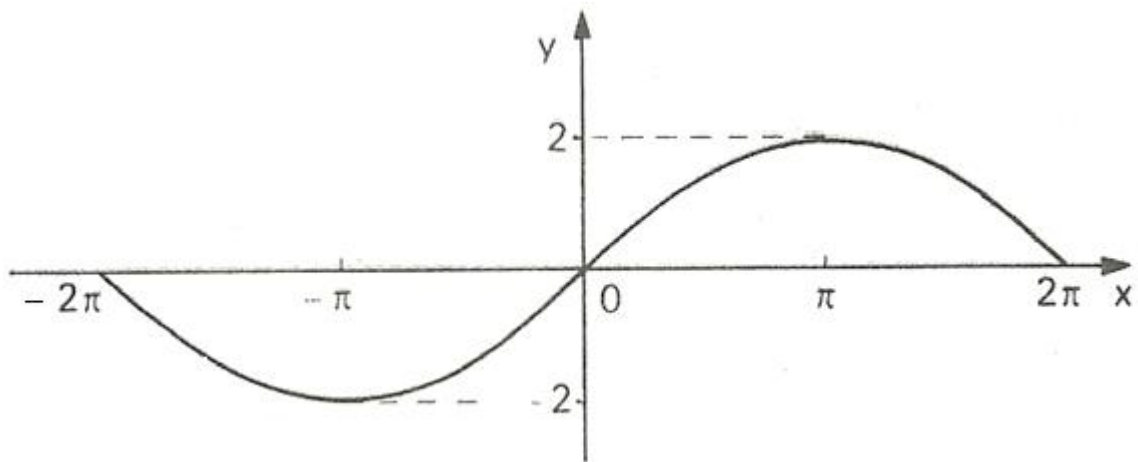
a) $f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$

c) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} 2x$

d) $f(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$

e) $f(x) = 2 \cos 2x$



$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{k} \rightarrow k = \frac{2}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$Im = [-2, 2] \rightarrow$ A função estará multiplicada por 2

Como o gráfico começa na origem, a função é seno. Assim: $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)$

GABARITO: A

6) A figura a seguir é parte do gráfico da função:

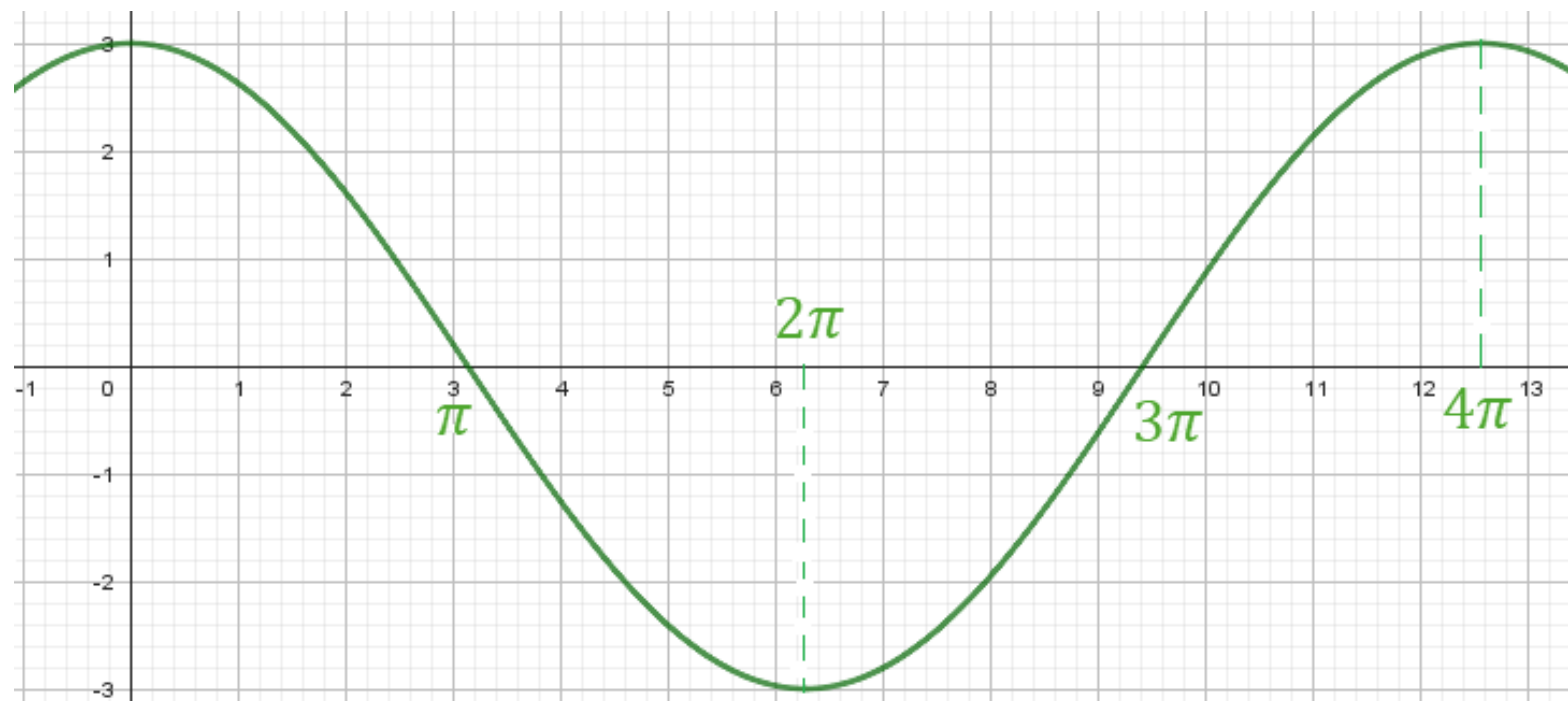
a) $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2}$

b) $f(x) = 2 \cos 2x$

c) $f(x) = 1 + \cos 2x$

d) $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2}$

e) $f(x) = 3 \cos 2x$



$$p = \frac{2\pi}{k} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{k} \rightarrow k = \frac{2}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$Im = [-3, 3] \rightarrow$ A função estará multiplicada por 3

Como o gráfico começa no ponto $(0, 3)$, a função é cosseno. Assim: $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

GABARITO: D