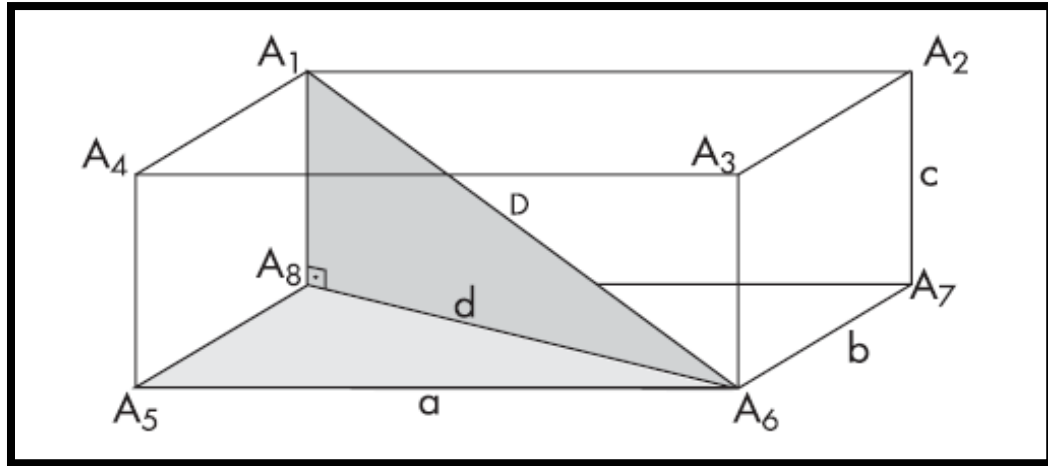


GEOMETRIA ESPACIAL - PRISMAS

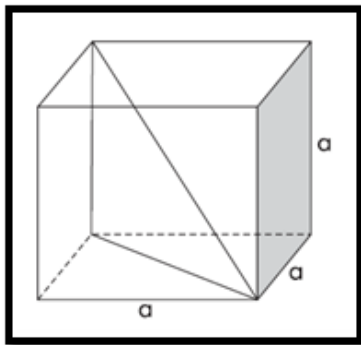
PROFESSOR MARCOS JOSÉ

Paralelepípedo retângulo



$$\begin{cases} D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \\ Volume = a \cdot b \cdot c \end{cases}$$

Cubo



$$\begin{cases} D^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow D = \sqrt{3a^2} \rightarrow D = a \cdot \sqrt{3} \\ A_{total} = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 6 \cdot a^2 \\ Volume = a \cdot a \cdot a \rightarrow V = a^3 \end{cases}$$

Exercícios

1) Num cubo, a soma das medidas de todas as arestas é 48 cm. Calcule a medida da diagonal desse cubo.

Um cubo tem 12 arestas. Assim:

$$\Sigma(\text{arestas}) = 48 \rightarrow 12a = 48 \rightarrow a = \frac{48}{12} = 4$$

$$d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

2) (PUCCAMP-SP) Usando uma folha de latão, deseja-se construir um cubo com volume de 8 dm^3 . A área da folha utilizada para isso será, no mínimo:

- a) 20 cm^2 b) 40 cm^2 c) 240 cm^2 d) 2000 cm^2 e) 2400 cm^2

$$\begin{cases} V = 8 \\ V = a^3 \end{cases} \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2$$

Vai utilizar uma folha. Tem – se que achar a área dessa folha.

$$A_t = 6 \cdot a^2 \rightarrow A_t = 6 \cdot 2^2 \rightarrow A_t = 24 \text{ dm}^2 \rightarrow A_t = 2400 \text{ cm}^2.$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

GABARITO: E

3) (ACAFE-SC) Num paralelepípedo reto, as arestas da base medem 8 dm e 6 dm e a altura mede 4 dm. Calcule a área da figura determinada pela diagonal do paralelepípedo, com a diagonal da base e a aresta lateral.

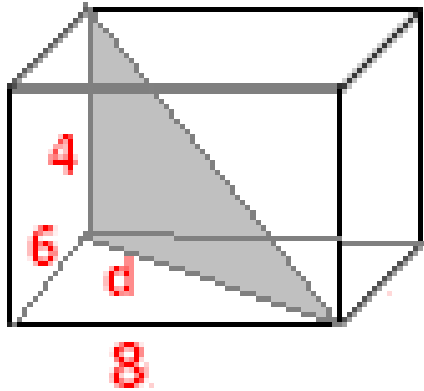
a) 20 dm²

b) 24 dm²

c) 32 dm²

d) 40 dm²

e) 48 dm²



$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

A área pedida está sombreada na figura. É um triângulo retângulo com catetos 4 e 10.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(10)(4)}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ dm}^2$$

GABARITO: A

4) Um cubo de aresta 4 m está completamente cheio com certo líquido. Todo este líquido será transportado para outro recipiente na forma de um paralelepípedo retângulo com arestas da base medindo 2 m e 8 m. Qual a altura que o líquido atinge no paralelepípedo retângulo?

- a) 2 m b) 3 m c) 4 m d) 5 m e) 6 m

$$V_{cubo} = a^3 \rightarrow V_{cubo} = 4^3 \rightarrow V_{cubo} = 64 \text{ m}^3$$

$$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot c \rightarrow 64 = 2 \cdot 8 \cdot c \rightarrow 64 = 16 \cdot c \rightarrow c = 4 \text{ m.}$$

GABARITO: C

5) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x , em centímetros, é:

- a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

$$V_{\text{cubo } 1} = a^3 \rightarrow V_{\text{cubo } 1} = 10^3 \rightarrow V_{\text{cubo } 1} = 1000 \text{ cm}^3$$

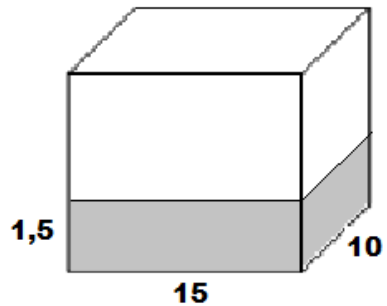
$$V_{\text{cubo } 2} = a^3 \rightarrow V_{\text{cubo } 2} = 6^3 \rightarrow V_{\text{cubo } 2} = 216 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 1000 + 216 \rightarrow 8.8.x = 1216 \rightarrow 64.x = 1216 \rightarrow x = 19$$

GABARITO: D

6) Uma piscina em forma de um paralelepípedo retângulo de 10,0 m x 15,0 m e fundo horizontal está com água até a altura de 1,5 m. Um produto químico em pó deve ser misturado à água à razão de um pacote para cada 4500 litros. O número de pacotes a serem usados é:

- a) 25 b) 50 c) 100 d) 250 e) 500



$$V_{piscina} = a \cdot b \cdot c \rightarrow V_{piscina} = 10 \cdot 15 \cdot 1,5 \rightarrow V_{piscina} = 225 \text{ m}^3 \rightarrow V_{piscina} = 225000 \text{ litros.}$$

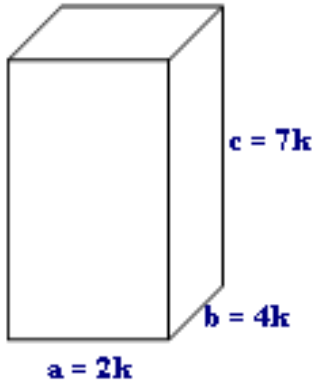
$$4500 \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ pacote}$$

$$225000 \rightarrow x \text{ pacotes}$$

$$4500 \cdot x = 225000 \rightarrow x = 50 \text{ pacotes}$$

GABARITO: B

7) As dimensões a , b e c de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 2, 4 e 7. Determine essas dimensões sabendo que a área total desse sólido é de 900 cm^2 .



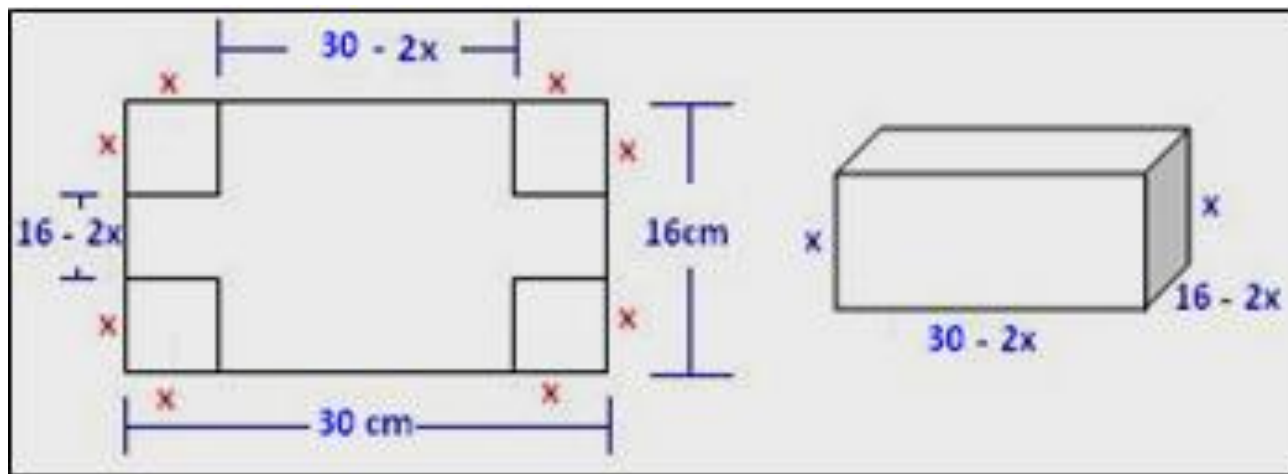
A área total do Paralelepípedo é: $A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$.

$$\begin{cases} A_T = 2 \times [(2k) \cdot (4k) + (2k) \cdot (7k) + (4k) \cdot (7k)] = 100k^2 \\ A_T = 900 \end{cases}$$

$$100k^2 = 900 \rightarrow k^2 = \frac{900}{100} \rightarrow k = \pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \rightarrow (\text{não serve}) \end{cases}$$

Logo, as arestas são: $a = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$; $b = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$ e $c = 7 \cdot 3 = 21 \text{ cm}$.

8) Para fazer uma caixa sem tampa com um único pedaço de papelão, utilizou-se um retângulo de 16 cm de largura por 30 cm de comprimento. De cada um dos quatro cantos desse retângulo foram retirados quadrados de área idêntica e, depois, foram dobradas para cima as abas resultantes. Determine a medida do lado do maior quadrado a ser cortado do pedaço de papelão, para que a caixa formada tenha área lateral de 204 cm^2 .

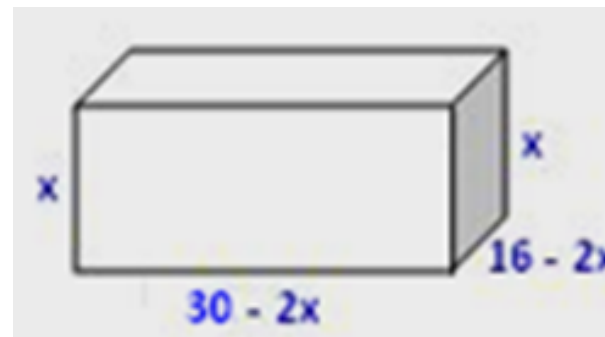


Observa-se que o valor de “x” está limitado entre 0 e 8. Caso contrário o termo $(16 - 2x)$ seria negativo.

$$A_{lateral} = 2(x)(30 - 2x) + 2(x)(16 - 2x)$$

$$A_l = 2x(30 - 2x + 16 - 2x) = 2x(46 - 4x)$$

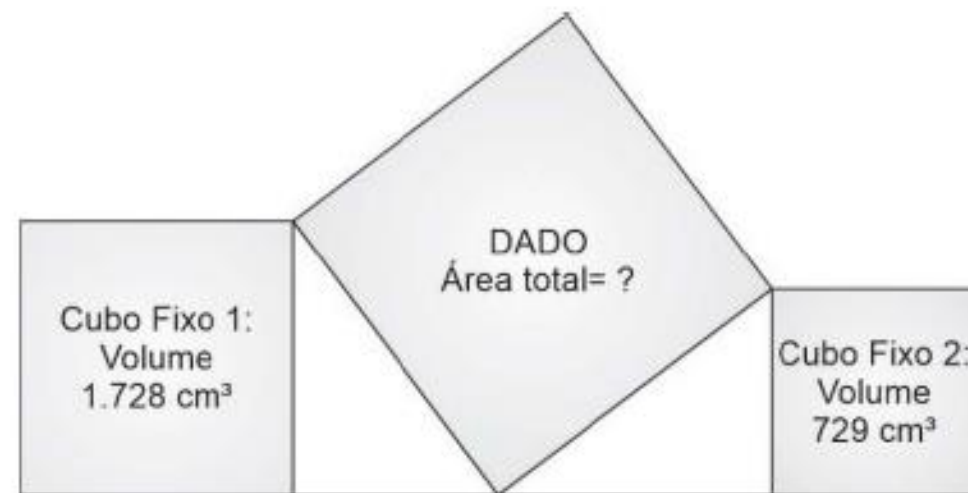
$$A_l = 92x - 8x^2$$



$$\begin{cases} A_l = 92x - 8x^2 \\ A_l = 204 \end{cases} \rightarrow 92x - 8x^2 = 204 \rightarrow 2x^2 - 23x + 51 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-23) \pm \sqrt{(-23)^2 - 4(2)(51)}}{2(2)}$$

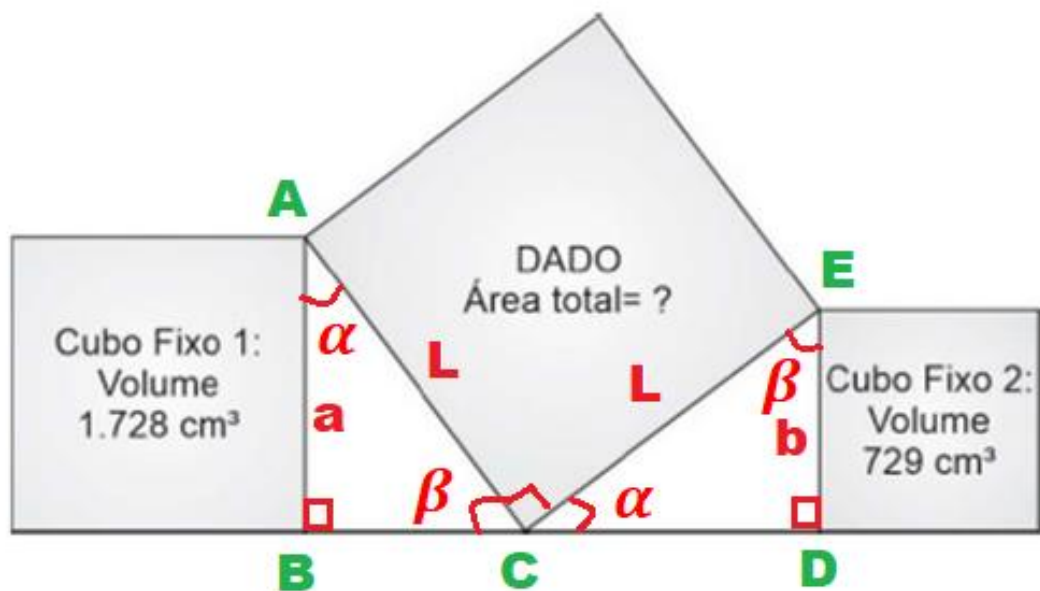
$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 408}}{4} = \frac{23 \pm \sqrt{121}}{4} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{23 + 11}{4} = \frac{34}{4} = 8,5 > 8 \rightarrow \text{n\~ao serve} \\ x = \frac{23 - 11}{4} = \frac{12}{4} = 3 \end{cases} \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

9) Uma brincadeira consiste em jogar um dado entre dois cubos fixos. Em uma das jogadas, o dado parou na posição observada na figura abaixo.



Vista frontal da situação

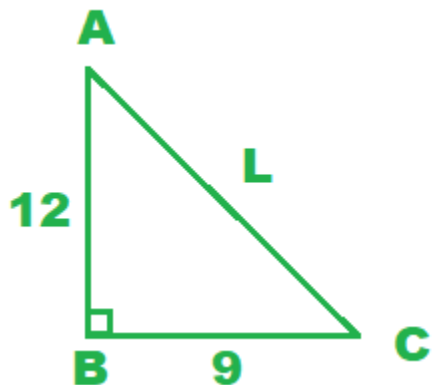
Determine a área total do dado.



$$V_{\text{cubo } 1} = a^3 \rightarrow 1728 = a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cubo } 2} = b^3 \rightarrow 729 = b^3 \rightarrow b = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ cm}$$

Os triângulos ABC e CDE são congruentes.

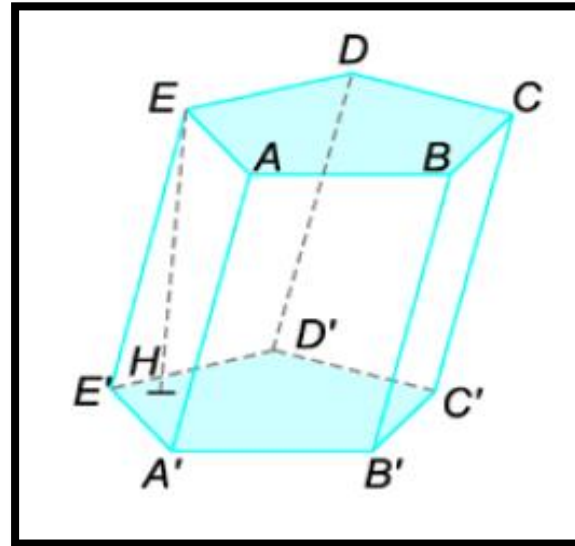


$$L^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow L^2 = 144 + 81 \rightarrow L^2 = 225 \rightarrow L = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

$$A_{\text{total}} = 6 \cdot L^2 = 6 \cdot 15^2 = 6 \cdot 225 = 1350 \text{ cm}^2$$

PRISMAS

1. Definição Prismas são poliedros que possuem duas faces paralelas e congruentes denominadas bases e as demais faces em forma de paralelogramos.



2. Elementos

BASES: são os polígonos $A'B'C'D'E'$ e $ABCDE$.

FACES LATERAIS: São os paralelogramos $ABA'B'$; $BCB'C'$; $CDC'D'$;

ARESTAS LATERAIS: são os segmentos AA' ; BB' ; CC' ; DD' e EE'

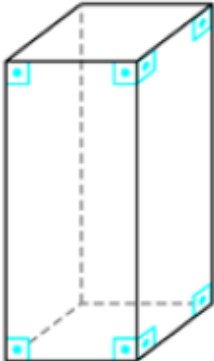
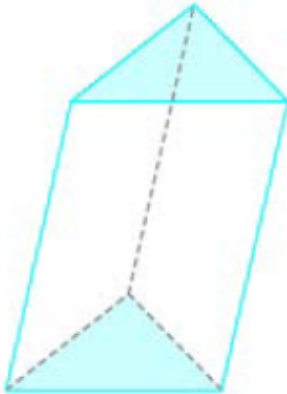
ALTURA: A distância EH entre as duas bases é denominada altura do Prisma

ARESTAS DAS BASES: são os segmentos $A'B'$; $B'C'$; $C'D'$; $D'E'$ e $E'A'$

3. Nomenclatura O nome do prisma dá-se através da figura da base.

- Prisma Triangular: As bases são triangulares.
- Prisma Quadrangular: As bases são quadriláteros.
- Prisma Hexagonal: As bases são hexágonos.

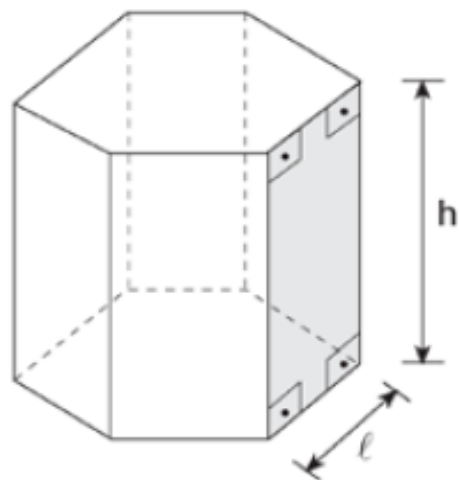
4. Classificação De acordo com sua inclinação um prisma pode ser:

Reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base.	Oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos da base.
	

Observações:

- 1) No prisma reto tem-se que as arestas laterais são iguais a altura.
- 2) Se o polígono da base for regular e o prisma for reto, ele será chamado de Prisma Regular.

5. Fórmulas: Considere um prisma regular com **n** lados da base.



Área da Base: É a área do Polígono que está na base

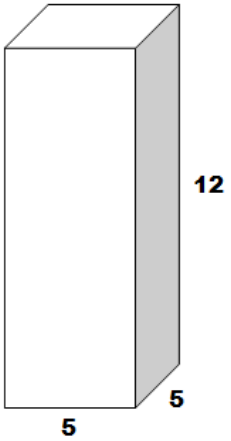
Área Lateral: $SL = n \cdot l \cdot h$

Área Total: $ST = 2SB + SL$

Volume: $V = SB \cdot h$

Exercícios

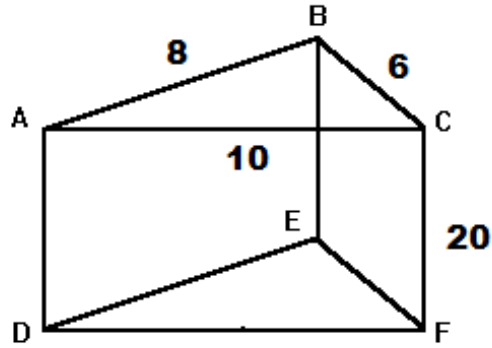
1) Calcule a área total de um prisma reto de altura 12 cm e base quadrada, com aresta 5 cm.



$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \times A_{base}$$

$$A_t = 4 \times (5 \cdot 12) + 2 \times (5^2) = 4 \times (60) + 2 \times (25) = 240 + 50 = 290 \text{ cm}^2.$$

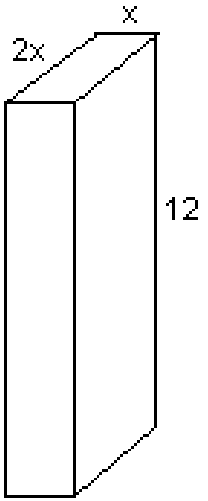
2) Calcule a área lateral e o volume de um prisma reto de base triangular, cujas arestas da base medem 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja aresta lateral mede 20 cm.



$$A_{lateral} = (6 \cdot 20) + (8 \cdot 20) + (10 \cdot 20) \rightarrow A_{lateral} = 120 + 160 + 200 \rightarrow A_{lateral} = 480 \text{ cm}^2.$$

$$V = A_{base} \cdot altura \rightarrow V = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 20 \rightarrow V = 480 \text{ cm}^3$$

3) Num prisma reto, cada uma das bases é um retângulo em que um lado é o dobro do outro. A altura do prisma mede 12 cm e a área total, 352 cm². Calcular as dimensões do prisma.



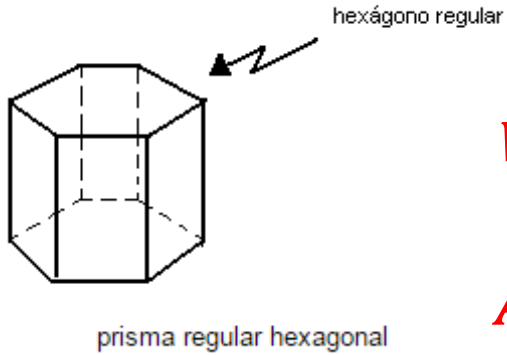
$$A_t = 2(2x)(12) + 2(x)(12) + 2(x)(2x) = 352 \text{ cm}^2.$$

$$48x + 24x + 4x^2 = 352 \rightarrow 4x^2 + 72x - 352 = 0 \rightarrow x^2 + 18x - 88 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 352}}{2} \rightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{676}}{2} \rightarrow x = \frac{-18 \pm 26}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-44}{2} = -22 \text{ (não serve)} \\ x_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

As dimensões são: 4 cm e 8 cm.

4) Se um prisma hexagonal regular de altura 6 cm possui volume igual a $1728.\sqrt{3}$ cm³, calcule a área lateral.



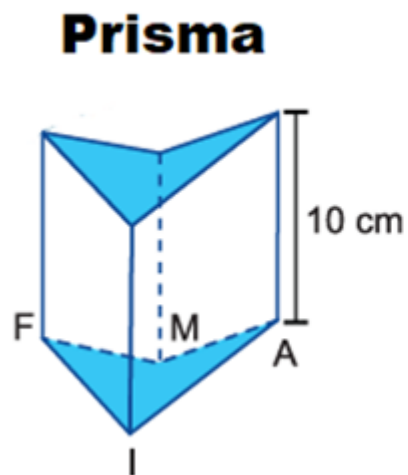
$$V = A_{base} \times h \rightarrow 1728\sqrt{3} = A_{base} \times 6 \rightarrow A_{base} = \frac{1728.\sqrt{3}}{6} = 288.\sqrt{3}$$

$$A_{base} = 3 \times \frac{L^2.\sqrt{3}}{2}$$

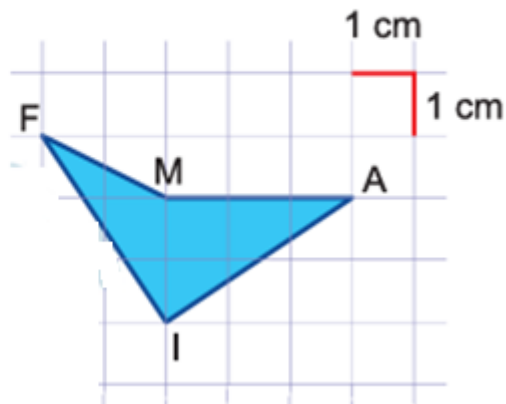
$$\frac{3.L^2.\sqrt{3}}{2} = 288.\sqrt{3} \rightarrow L^2 = \frac{288.2}{3} \rightarrow L^2 = 192 \rightarrow L = \sqrt{192} = 8.\sqrt{3}$$

$$A_{lateral} = 6 \times L \times h = 6 \times 8.\sqrt{3}.6 = 288.\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

5) Um prisma reto cuja base é o quadrilátero não convexo FMAI possui altura igual a 10 cm. A figura indica o prisma e a planificação da base FMAI feita em uma malha quadriculada.

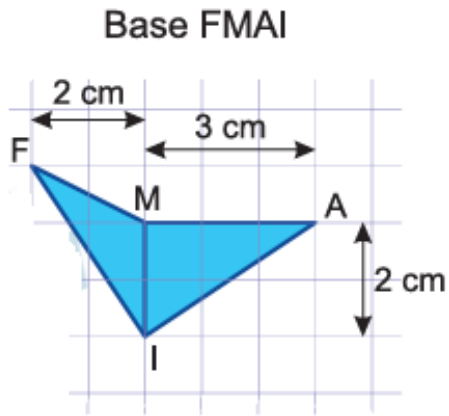
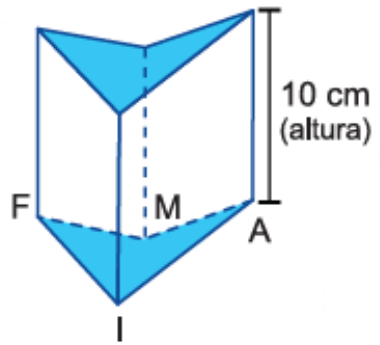


Planificação da base do prisma



O volume desse prisma é igual a

- a) 55 cm^3 . b) 45 cm^3 . c) 50 cm^3 . d) 60 cm^3 . e) 75 cm^3 .



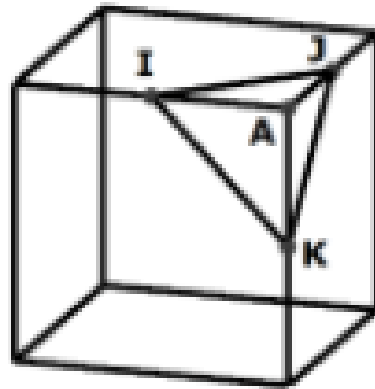
Base = dois triângulos

$$A_{base} = \triangle FMI + \triangle AMI \rightarrow A_{base} = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{3 \times 2}{2} = 2 + 3 = 5 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{base} \times h \rightarrow V = 5 \times 10 = 50 \text{ cm}^3$$

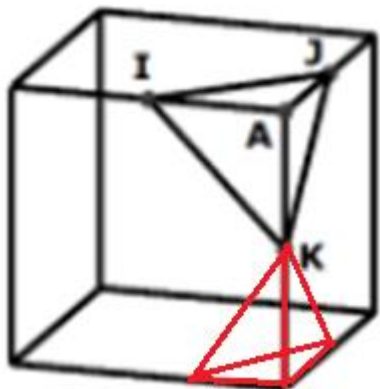
GABARITO: C

6) De cada vértice de um cubo de aresta medindo a , corta-se uma pirâmide. A figura abaixo mostra os vértices de uma das pirâmides, em que I, J e K são pontos médios de arestas e A é vértice do cubo.



Depois de retiradas todas as pirâmides, o volume do sólido que resta vale:

- a) $\frac{a^3}{2}$ b) $\frac{a^3}{3}$ c) $\frac{a^3}{6}$ d) $\frac{2 \cdot a^3}{3}$ e) $\frac{5 \cdot a^3}{6}$



$$\text{Volume da pirâmide } AIJK = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h$$

$$\text{Base} = \triangle AKI \rightarrow \text{Base} = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$h = \frac{a}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2}{8} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$$

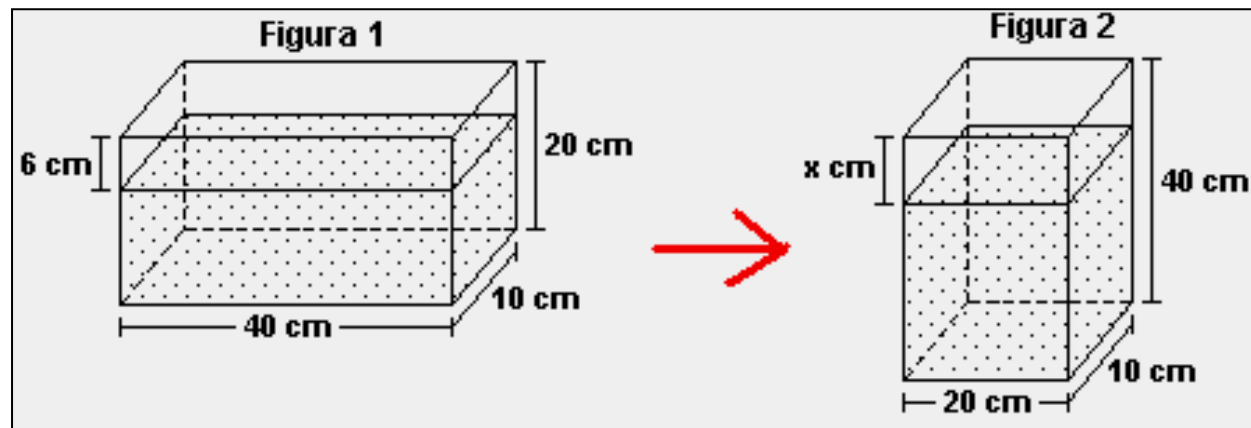
$$\text{São 8 vértices} \rightarrow 8 \times \frac{a^3}{48} \rightarrow \text{Volume das pirâmides} = \frac{a^3}{6}$$

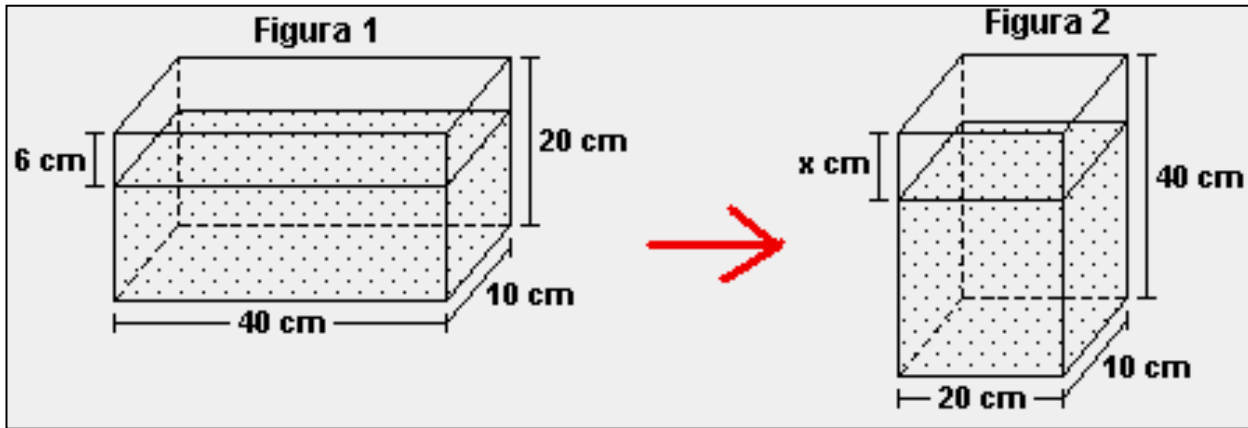
$$\text{Volume restante} = \text{cubo} - \text{pirâmides} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5 \cdot a^3}{6}$$

GABARITO: E

7) (UFRRJ) Observe o bloco retangular da figura 1, de vidro totalmente fechado com água dentro. Virando-o, como mostra a figura 2, podemos afirmar que o valor de x é:

- a) 12 cm b) 11 cm c) 10 cm d) 5 cm e) 6 cm





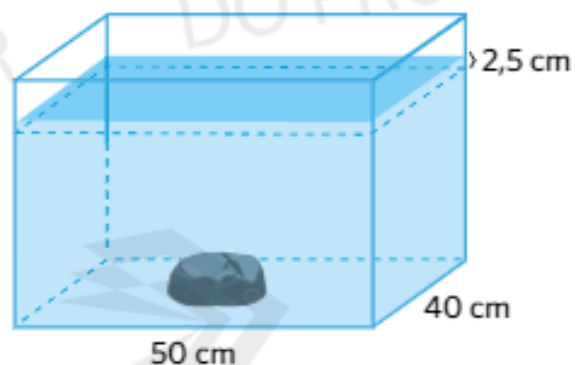
$$\begin{cases} V_1 = (40) \cdot (10) \cdot (20 - 6) = (40) \cdot (10) \cdot (14) = 5600 \text{ cm}^3 \\ V_2 = (20) \cdot (10) \cdot (40 - x) = 8000 - 200x \text{ cm}^3 \end{cases}$$

$$5600 = 8000 - 200x \rightarrow x = \frac{8000 - 5600}{200} = 12 \text{ cm}$$

GABARITO: A

8)

Quando uma pedra submerge completamente nas águas de um aquário, cuja forma é de um paralelepípedo reto retângulo, o nível da superfície da água sobe 2,5 cm. Sabendo que, internamente, o fundo desse aquário tem 50 cm de comprimento por 40 cm de largura, podemos dizer que o volume da pedra é de:



- (A) 5 cm^3 .
- (B) 50 cm^3 .
- (C) 500 cm^3 .
- (D) 5.000 cm^3 .

$$V_{\text{pedra}} = V_{\text{deslocado}}$$

$$V_{\text{pedra}} = 50 \times 40 \times 2,5 = 2000 \times 2,5 = 5000 \text{ cm}^3$$

GABARITO: D

9) A figura a seguir representa um prisma reto com aresta lateral de 10 m. Sua base é um trapézio com três lados medindo 3 m e o quarto lado medindo 6 m.

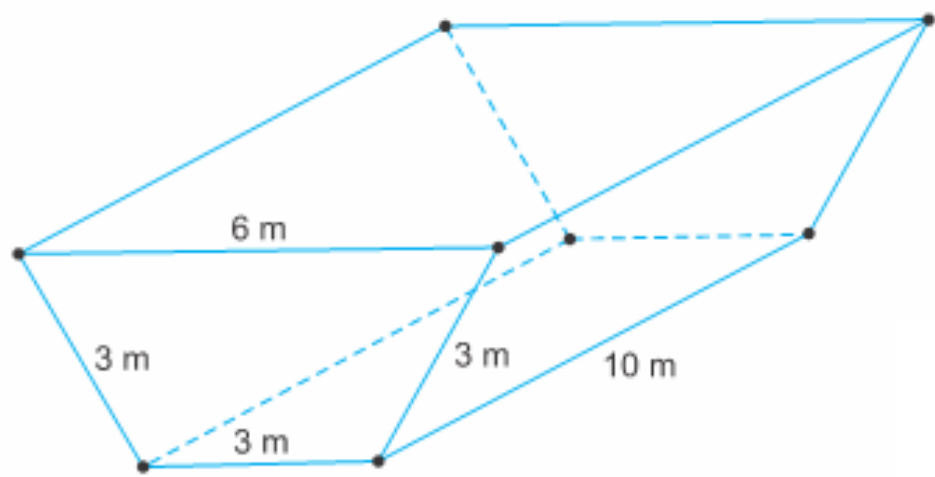
O volume do prisma, em m³, é igual a:

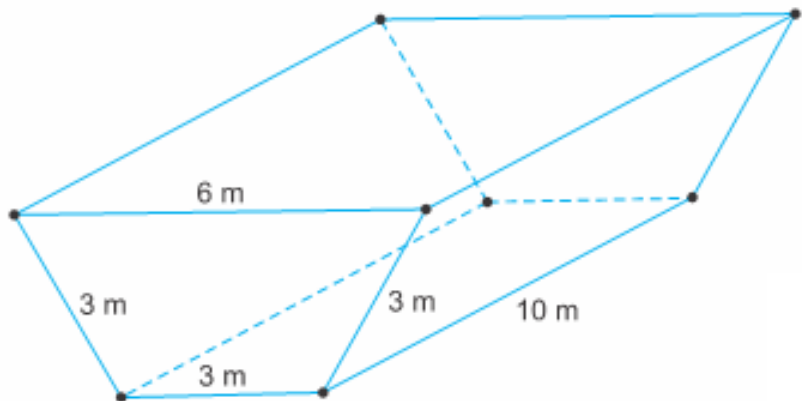
(A) $\frac{135\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{155\sqrt{3}}{2}$

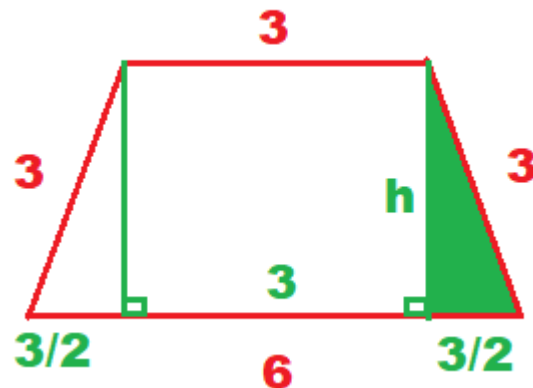
(C) $\frac{175\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{195\sqrt{3}}{2}$





Base:



$$3^2 = h^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow 9 = h^2 + \frac{9}{4} \rightarrow 36 = 4h^2 + 9 \rightarrow 27 = 4h^2 \rightarrow h^2 = \frac{27}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{base} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(6 + 3) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

$$V = A_{base} \times h = \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{4} \times 10 = \frac{27 \cdot \sqrt{3} \cdot 5}{2} = \frac{135 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

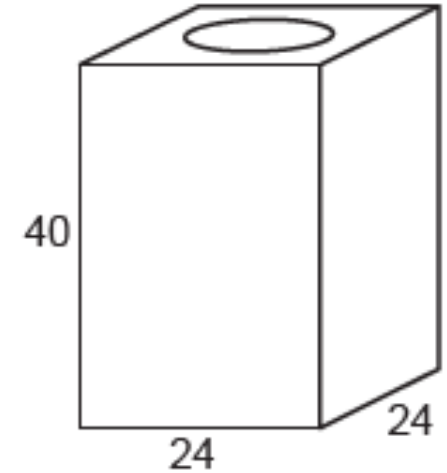
GABARITO: A

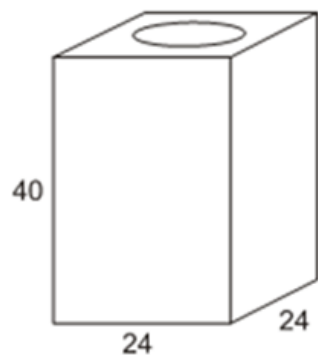
10) (ENEM) Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

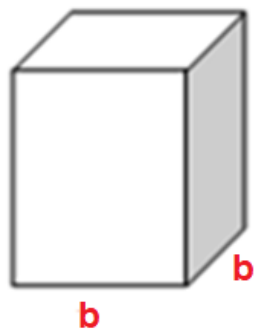
Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- (A) 14,4%.
- (B) 20,0%.
- (C) 32,0%.
- (D) 36,0%.
- (E) 64,0%





h



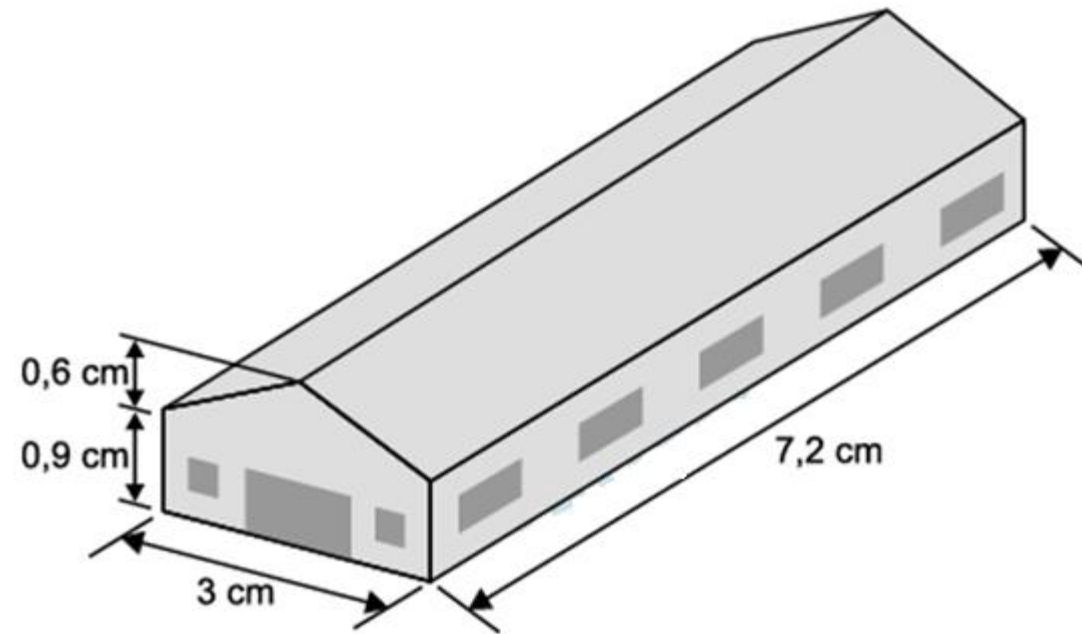
$$b = 1,25 \times 24 = 30$$

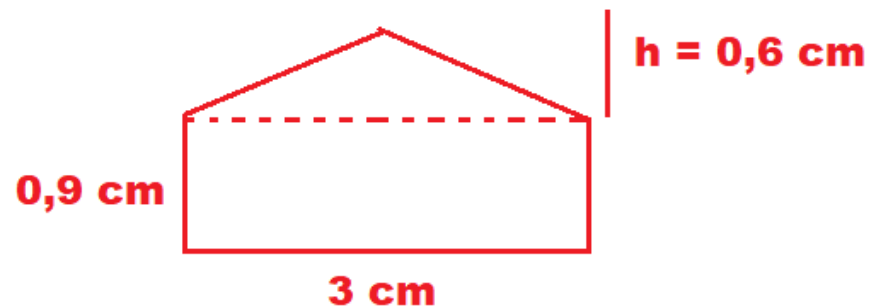
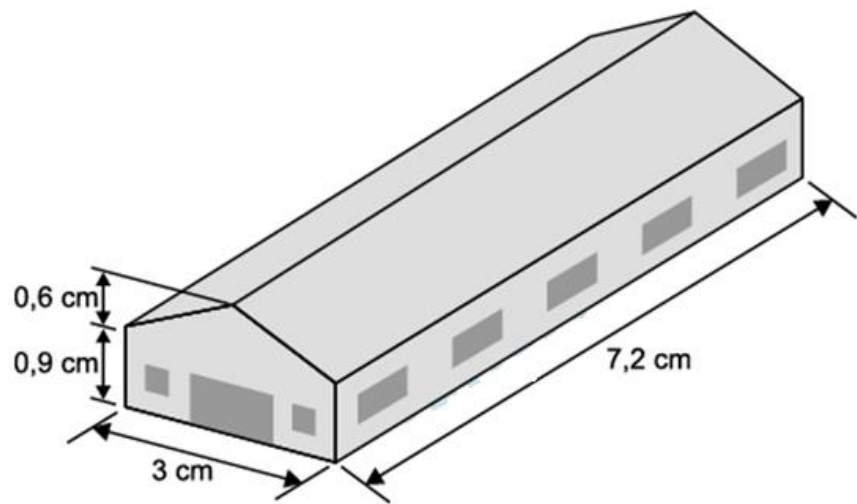
$$40 \times 24 \times 24 = 30 \times 30 \times h \rightarrow 40 \times 4 \times 4 = 5 \times 5 \times h \rightarrow h = \frac{640}{25} \rightarrow h = 25,6$$

$$\frac{40 - 25,6}{40} = \frac{14,4}{40} = \frac{7,2}{20} = \frac{36}{100} = 36\%$$

GABARITO: D

11) (FGV) A figura mostra a maquete do depósito a ser construído. A escala é 1 : 500, ou seja, 1cm, na representação, corresponde a 500 cm na realidade. Qual será a capacidade, em metros cúbicos, do depósito?





$$escala = 1:500 \rightarrow \begin{cases} h = 0,6 \times 500 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m} \\ 0,9 \times 500 = 450 \text{ cm} = 4,5 \text{ m} \\ 3 \times 500 = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ 7,2 \times 500 = 3600 \text{ cm} = 36 \text{ m} \end{cases}$$

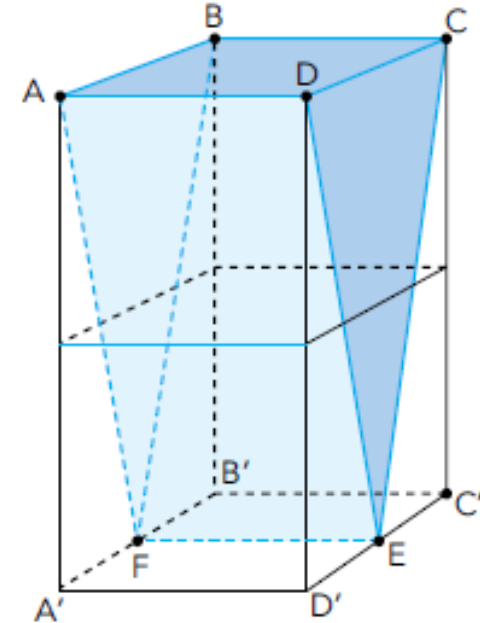
$$A_{base} = A_{retângulo} + A_{triângulo} = 4,5 \times 15 + \frac{15 \times 3}{2} = 67,5 + 22,5 = 90 \text{ m}^2$$

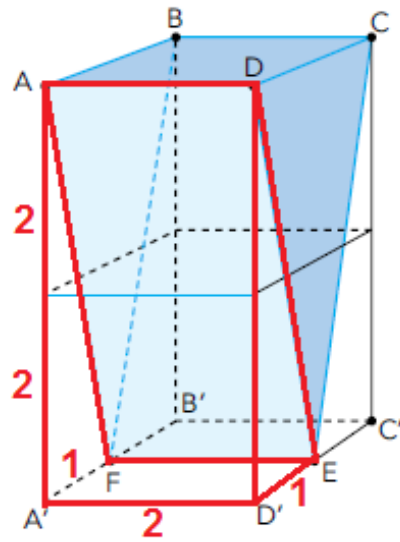
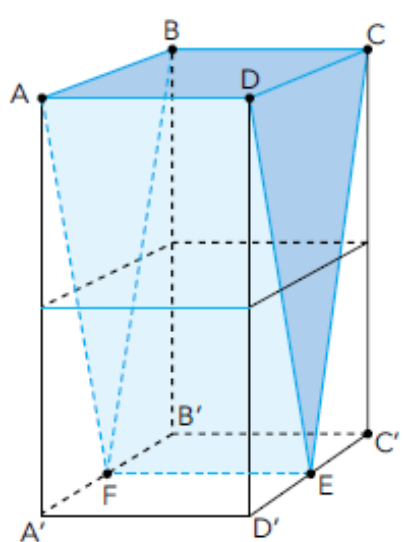
$$V = A_{base} \times h = 90 \times 36 = 3240 \text{ m}^3$$

12) (UERJ) Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo $ABCD A'B'C'D'$. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos $ADEF$ e $BCEF$, que passam pelos pontos médios F e E das arestas $A'B'$ e $C'D'$, respectivamente. A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido $ABCDEF$, conforme indica a figura a seguir.

O volume do sólido $ABCDEF$, em cm^3 , é igual a:

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 12





O volume do sólido ABCDEF será a diferença entre os volumes do paralelepípedo e o dobro do volume do prisma triangular AA'FED'D indicado. Há outro prisma equivalente a esse: BB'FEC'C.

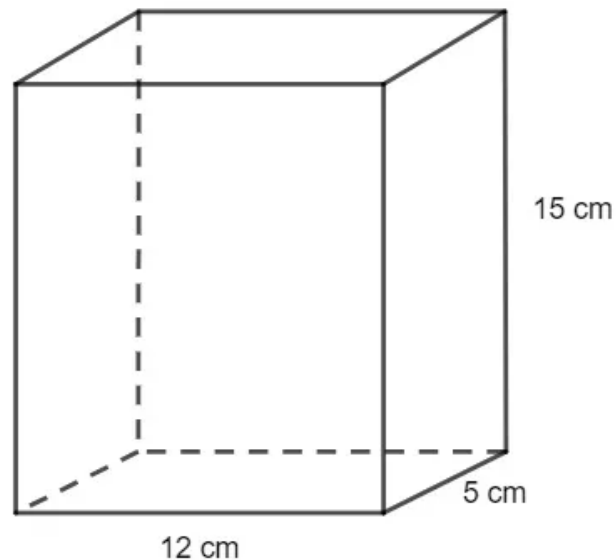
$$V(\text{paralelepípedo}) = 2 \times 2 \times 4 = 16 \text{ cm}^3$$

$$V(AA'FED'D) = A_{\text{base}} \times h = \frac{(4 \times 1)}{2} \times 2 = 4 \text{ cm}^3$$

$$V(\text{Sólido}) = 16 - 2 \times 4 = 16 - 8 = 8 \text{ cm}^3$$

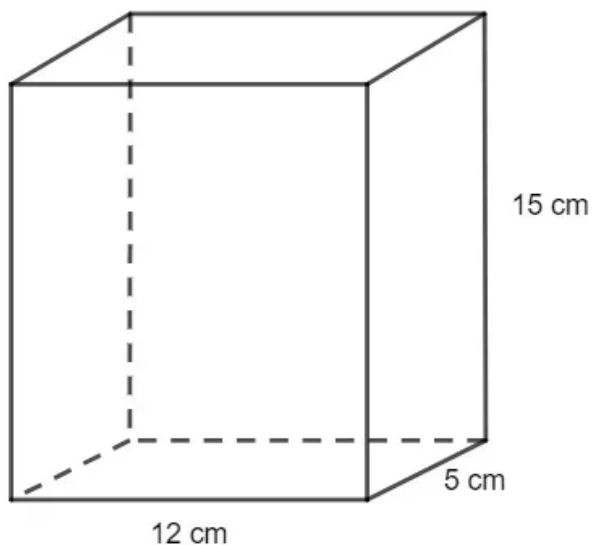
GABARITO: C

13) Um recipiente possui formato de um prisma com as dimensões a seguir:



Sabendo que $\frac{2}{3}$ do volume desse recipiente estão ocupados, então o volume não ocupado é igual a:

- A) 200 cm^3
- B) 300 cm^3
- C) 500 cm^3
- D) 600 cm^3
- E) 900 cm^3



$$V = a \cdot b \cdot c \rightarrow V = 12 \times 5 \times 15 = 900 \text{ cm}^3$$

$\frac{2}{3}$ do volume está ocupado $\rightarrow \frac{1}{3}$ do volume NÃO está ocupado.

$$V_{\text{não ocupado}} = \frac{1}{3} \times 900 = 300 \text{ cm}^3$$

GABARITO: B

14) O volume de uma caixa cúbica é 216 litros. A medida da sua diagonal, em centímetros, é:

- (A) $0,8.\sqrt{3}$ (B) 6 (C) 60 (D) $60\sqrt{3}$ (E) $900\sqrt{3}$

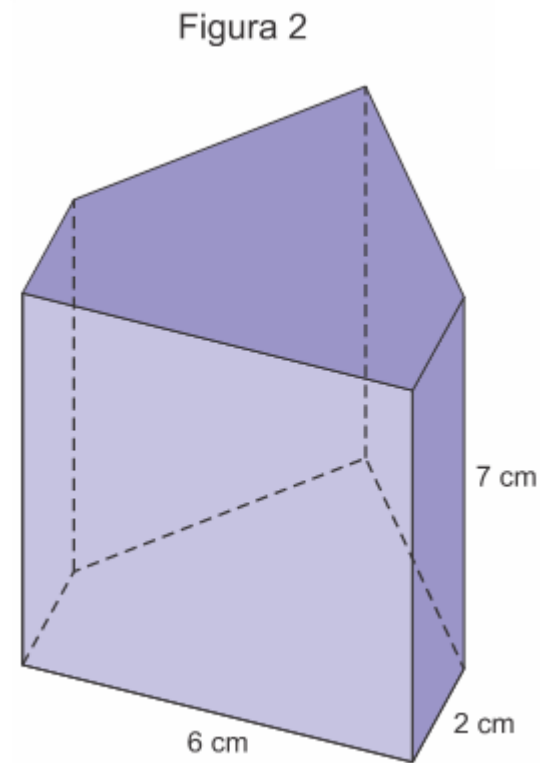
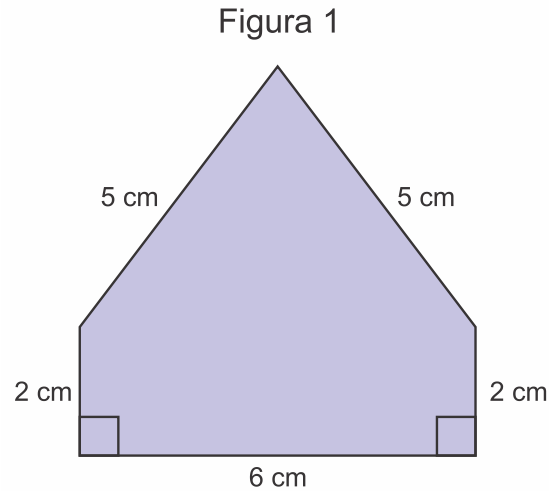
$$1 L = 1 dm^3 \rightarrow 216L = 216 dm^3$$

$$V_{cubo} = a^3 \rightarrow 216 = a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{216} \rightarrow a = 6 dm = 60 cm$$

$$D = a.\sqrt{3} = 60.\sqrt{3} cm$$

GABARITO: D

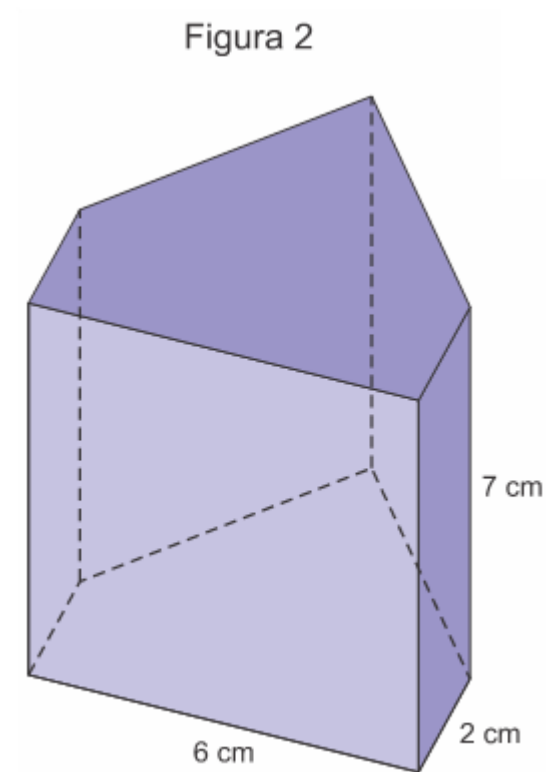
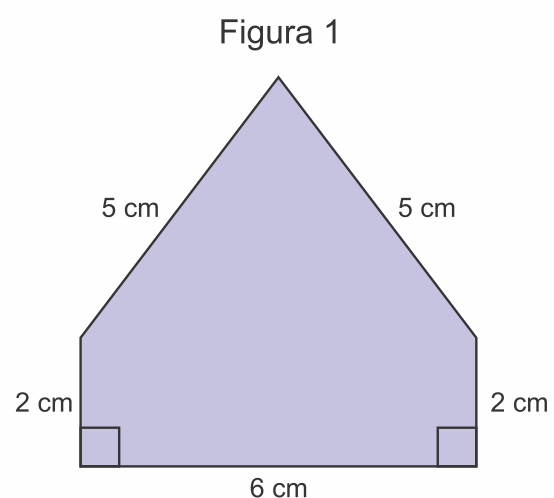
15) Um prisma reto tem por base um pentágono com dois ângulos retos, conforme mostra a figura 1.



O volume desse prisma é igual a 168 cm^3 e a figura 2 mostra uma vista desse prisma quando está apoiado sobre um dos pentágonos.

A área total desse prisma é

- a) 140 cm^2 .
- b) 164 cm^2 .
- c) 188 cm^2 .
- d) 212 cm^2 .
- e) 236 cm^2 .



$$V = A_{base} \times h \rightarrow 168 = A_{base} \times 7 \rightarrow A_{base} = \frac{168}{7} = 24 \text{ cm}^2$$

$$A_{lateral} = 6 \times 7 + 2 \times 7 + 5 \times 7 + 5 \times 7 + 2 \times 7 = 42 + 14 + 35 + 35 + 14 = 140 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \times A_{base} = 140 + 2 \times 24 = 140 + 48 = 188 \text{ cm}^2$$

GABARITO: C