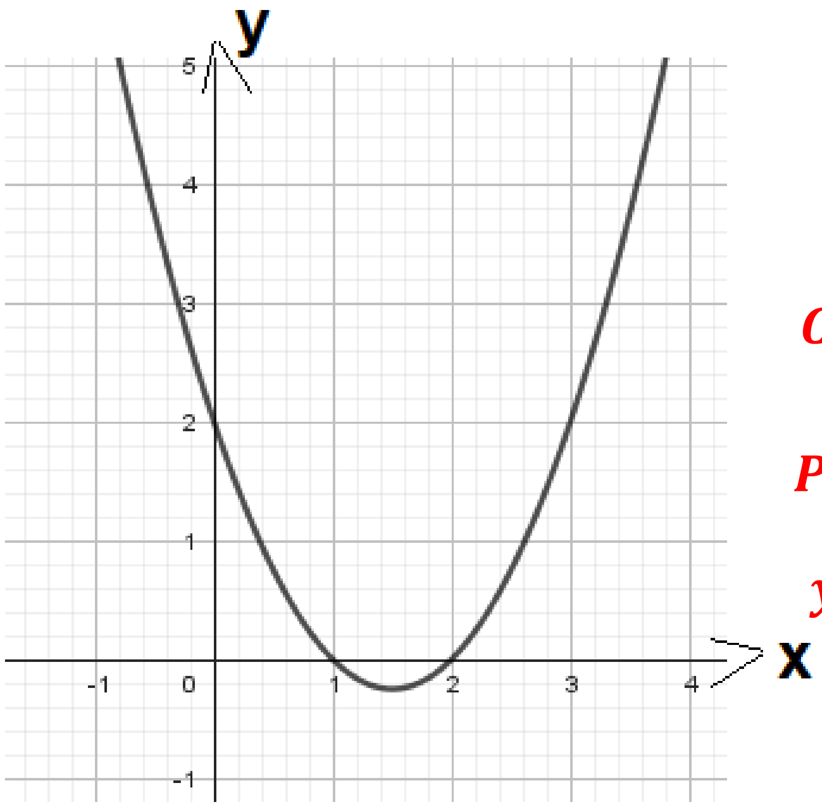
LISTA DE EXERCÍCIOS 1:
FUNÇÃO QUADRÁTICA E EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

QUESTÃO 1: Encontre a lei das funções quadráticas representadas pelos gráficos abaixo

a)



$$\boldsymbol{Solução\ 1:}$$

$$\boldsymbol{Função\ quadrática \rightarrow y = a.x^2 + b.x + c}$$

$$\boldsymbol{O\ gráfico\ passa\ pelos\ pontos\ (1,0) e\ (2,0)}$$

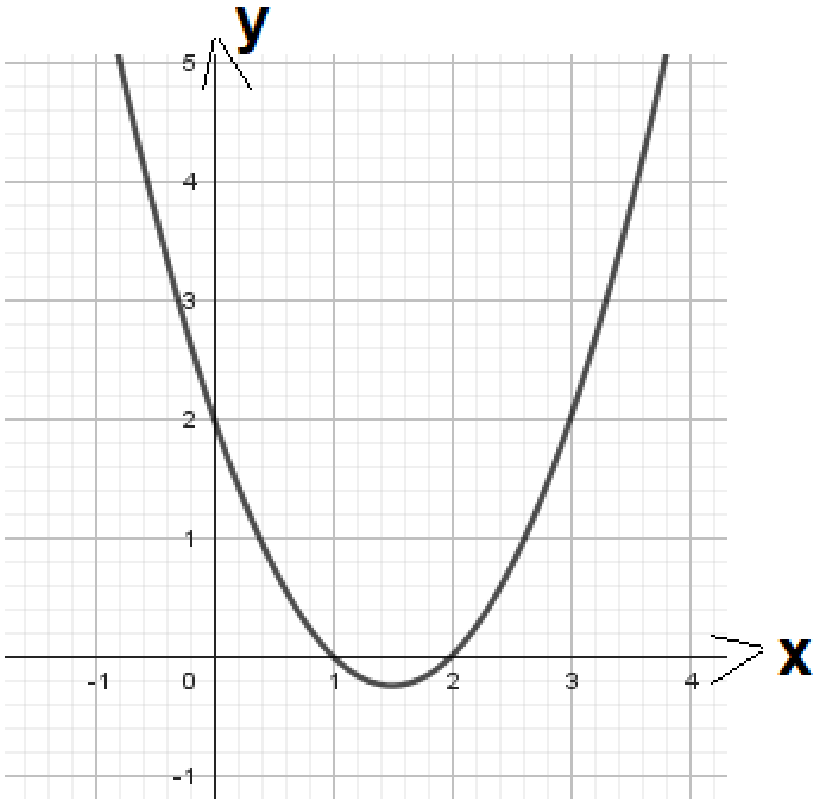
$$\boldsymbol{Como\ o\ gráfico\ corta\ o\ eixo\ x\ no\ 1\ e\ no\ 2, eles\ são\ zeros\ da\ função.}$$

$$\boldsymbol{Podemos\ escrever\ a\ função\ do\ segundo\ grau\ na\ forma\ fatorada:}$$

$$\boldsymbol{y = a.(x - x_1).(x - x_2), onde\ x_1\ e\ x_2\ são\ os\ zeros\ da\ função. Assim:}$$

$$\boldsymbol{y = a.(x - 1).(x - 2) \rightarrow O gráfico\ passa\ pelo\ ponto\ (0,2). \rightarrow 2 = a.(0 - 1).(0 - 2) \rightarrow 2 = a.(-1).(-2)}$$

$$\boldsymbol{2 = 2.a \rightarrow a = 1 \rightarrow y = 1.(x - 1).(x - 2) \rightarrow y = x^2 - 2x - x + 2 \rightarrow y = x^2 - 3x + 2}$$



Solução 2:

$$Função\ quadrática \rightarrow y = a.x^2 + b.x + c \rightarrow c = 2$$

$$y = a.x^2 + b.x + 2$$

$$O\ gráfico\ passa\ pelos\ pontos\ (1,0)\ e\ (2,0).\ Assim:$$

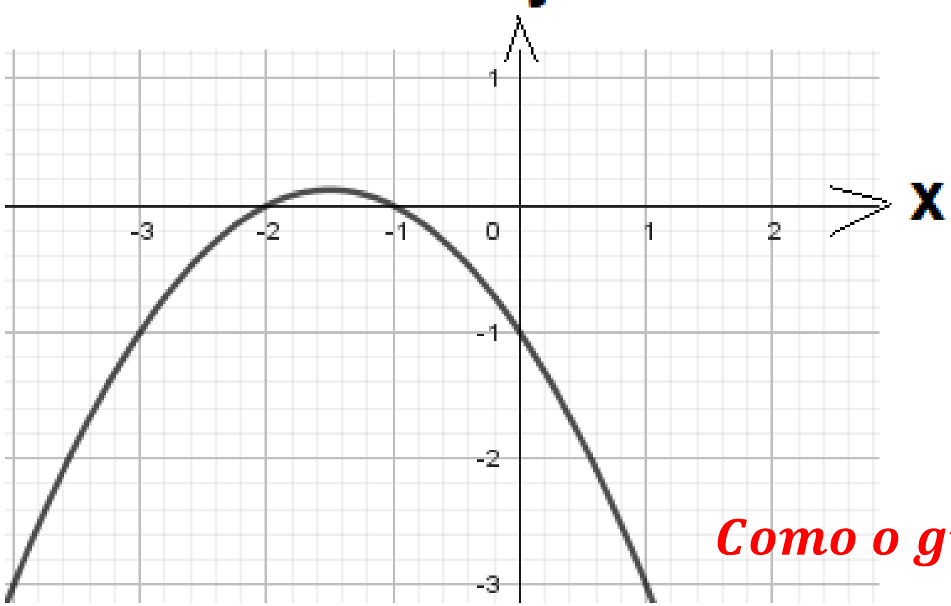
$$\begin{cases} (1,0) \rightarrow 0 = a.(1)^2 + b.(1) + 2 \\ (2,0) \rightarrow 0 = a.(2)^2 + b.2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = a + b + 2 \rightarrow a = -b - 2 \\ 0 = 4a + 2b + 2 \end{cases} \rightarrow 0 = 4.(-b - 2) + 2b + 2$$

$$0 = -4b - 8 + 2b + 2 \rightarrow 0 = -2b - 6 \rightarrow 2b = -6 \rightarrow b = -3$$

$$a = -b - 2 \rightarrow a = -(-3) - 2 \rightarrow a = 3 - 2 \rightarrow a = 1$$

$$y = x^2 - 3.x + 2$$

b)



$\boldsymbol{Solução\ 1}$:

$\boldsymbol{Função\ quadrática \rightarrow y = a.x^2 + b.x + c}$

$\boldsymbol{O\ gráfico\ passa\ pelos\ pontos\ (-2,0)\ e\ (-1,0).}$

$\boldsymbol{Como\ o\ gráfico\ corta\ o\ eixo\ x\ no\ -2\ e\ no\ -1, eles\ são\ zeros\ da\ função}$

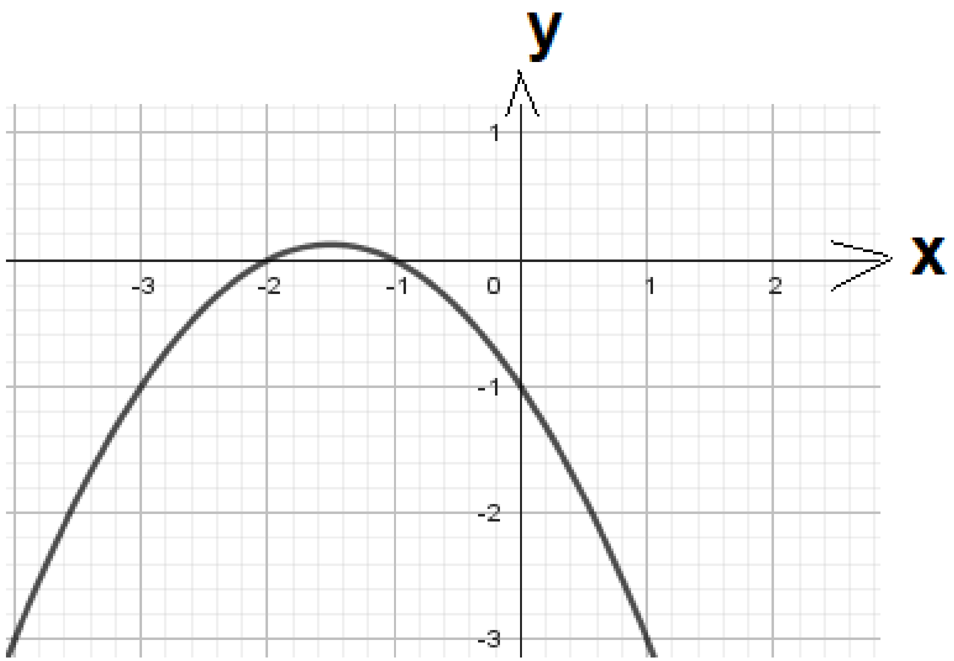
$\boldsymbol{Podemos\ escrever\ a\ função\ do\ segundo\ grau\ na\ forma\ fatorada}$:

$\boldsymbol{y = a.(x - x_1).(x - x_2), onde\ x_1\ e\ x_2\ são\ os\ zeros\ da\ função. Assim}$:

$\boldsymbol{y = a.(x+2).(x+1) \rightarrow O gráfico\ passa\ pelo\ ponto\ (0,-1). \rightarrow -1 = a.(0+2).(0+1) \rightarrow -1 = a.(2).(1}$

$$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}.\left(x^2 + 2x + x + 2\right) \rightarrow y = -\frac{1}{2}.\left(x^2 + 3x + 2\right) \rightarrow y = -\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 1}$$

b)



Solução 2:

$$\boldsymbol{Função\ quadrática \rightarrow y = a.x^2 + b.x + c \rightarrow c = -1}$$

$$\boldsymbol{y = a.x^2 + b.x - 1}$$

$$\boldsymbol{O\ gráfico\ passa\ pelos\ pontos: (-2,0)\ e\ (-1,0). Assim:}$$

$$\begin{cases} (-2,0) \rightarrow 0 = a.(-2)^2 + b.(-2) - 1 \\ (-1,0) \rightarrow 0 = a.(-1)^2 + b.(-1) - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 4a - 2b - 1 \\ 0 = a - b - 1 \rightarrow a = b + 1 \end{cases} \rightarrow 0 = 4.(b+1) - 2b - 1$$

$$0 = 4b + 4 - 2b - 1 \rightarrow 0 = 2b + 3 \rightarrow 2b = -3 \rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$a = b + 1 \rightarrow a = -\frac{3}{2} + 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 1$$

QUESTÃO 2: Resolva as equações exponenciais abaixo:

$a)\ 4^{x+1} = 32^{x-3}$

$4^{x+1} = 32^{x-3} \rightarrow (2^2)^{x+1} = (2^5)^{x-3} \rightarrow 2^{2x+2} = 2^{5x-15}$

$2x + 2 = 5x - 15 \rightarrow 2x - 5x = -15 - 2 \rightarrow -3x = -17 \rightarrow 3x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{3}$

$b)\ 2^{x+1} + 2^{x+3} - 2^{x+2} = 48$

$2^{x+1} + 2^{x+3} - 2^{x+2} = 48 \rightarrow 2^x.2^1 + 2^x.2^3 - 2^x.2^2 = 48 \rightarrow 2^x.(2^1 + 2^3 - 2^2) = 48$

$2^x.(2 + 8 - 4) = 48 \rightarrow 2^x.(6) = 48 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$

$c)\ 2^{x+1}+2^{x-1}=20$

$$2^{x+1}+2^{x-1}=20\rightarrow 2^{x}.2^{1}+2^{x}.2^{-1}=20\rightarrow 2^{x}.\left(2+\frac{1}{2}\right)=20\rightarrow 2^{x}.\left(\frac{5}{2}\right)=20$$

$$2^{x}=20.\frac{2}{5}\rightarrow 2^{x}=8\rightarrow 2^{x}=2^{3}\rightarrow x=3$$

$d)\ 4^{x}-12.2^{x}+32=0$

$$4^{x}-12.2^{x}+32=0\rightarrow (2^{2})^{x}-12.2^{x}+32=0\rightarrow (2^{x})^{2}-12.2^{x}+32=0\rightarrow Considere\ 2^{x}=t$$

$$t^{2}-12.t+32=0\rightarrow t=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^{2}-4.1.32}}{2.1}\rightarrow t=\frac{12\pm\sqrt{144-128}}{2}\rightarrow t=\frac{12\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$t=\frac{12\pm 4}{2}\rightarrow\begin{cases}t_{1}=\dfrac{12+4}{2}=8\\ t_{2}=\dfrac{12-4}{2}=4\end{cases}\rightarrow voltando\ para\ a\ variável\ x\rightarrow\begin{cases}2^{x}=8\rightarrow 2^{x}=2^{3}\rightarrow x=3\\ 2^{x}=4\rightarrow 2^{x}=2^{2}\rightarrow x=2\end{cases}$$

$e)\ 9^x - 4.3^x + 3 = 0$

$9^x - 4.3^x + 3 = 0 \rightarrow \left(3^2\right)^x - 4.3^x + 3 = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 4.3^x + 3 = 0 \rightarrow Considere\ 3^x = t$

$$t^2 - 4.t + 3 = 0 \rightarrow t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1} \rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$t = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ t_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow voltando\ para\ a\ variável\ x \rightarrow \begin{cases} 3^x = 3^1 \rightarrow x = 1 \\ 3^x = 1 \rightarrow 3^x = 3^0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$f)\ 25^x - 7.5^x + 10 = 0$

$25^x - 7.5^x + 10 = 0 \rightarrow \left(5^2\right)^x - 7.5^x + 10 = 0 \rightarrow (5^x)^2 - 7.5^x + 10 = 0 \rightarrow considere\ 5^x = t$

$$t^2 - 7.t + 10 = 0 \rightarrow t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.10}}{2.1} \rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$t = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{7+3}{2} = 5 \\ t_2 = \dfrac{7-3}{2} = 2 \end{cases} \rightarrow voltando\ para\ a\ variável\ x \rightarrow \begin{cases} 5^x = 5^1 \rightarrow x = 1 \\ 5^x = 2 \rightarrow x = \log_5 2 \end{cases}$$

$g)\ 2^x.4^{x+1}.8^{x+2} = 256^{x+1}$

$2^x.4^{x+1}.8^{x+2} = 256^{x+1} \rightarrow 2^x.\left(2^2\right)^{x+1}.\left(2^3\right)^{x+2} = \left(2^8\right)^{x+1} \rightarrow 2^x.2^{2x+2}.2^{3x+6} = 2^{8x+8}$

$2^{x+2x+2+3x+6} = 2^{8x+8} \rightarrow 2^{6x+8} = 2^{8x+8} \rightarrow 6x+8 = 8x+8 \rightarrow 6x-8x = 8-8$

$-2x = 0 \rightarrow x = 0$

QUESTÃO 3: Uma bola é chutada e segue a trajetória H(t)= - t^2+20.t (H em metros e t em segundos)

a) Após quanto tempo a bola retorna ao solo?

b) Após quanto tempo a bola atingirá a altura máxima?

c) Qual a altura máxima?

d) Qual a altura após dois minutos?

$$a)\ retorna\ ao\ solo \rightarrow H = 0 \rightarrow -t^2 + 20t = 0 \rightarrow t(-t+20) = 0 \rightarrow t = 0\ ou\ -t + 20 = 0 \rightarrow t = 20s$$

$$b)\ t_{máxima} = -\frac{b}{2.a} = -\frac{20}{2.(-1)} = -\frac{20}{-2} = 10s$$

$$c)\ H_{máxima} = -\frac{\Delta}{4.a} = -\frac{(b^2 - 4.a.c)}{4.a} = -\frac{(20^2 - 4.(-1).0)}{4.(-1)} = -\frac{400}{-4} = 100\ m$$

$$d)\ H(2) = -2^2 + 20.2 \rightarrow H(2) = -4 + 40 = 36\ m$$

QUESTÃO 4: Uma bactéria se reproduz segundo a função $f(t) = A.2^{B.t}$. No início da pesquisa haviam 10 bactérias e 2 minutos depois já eram 40. Quantas bactérias teremos em três minutos?

$$t = 0 \rightarrow f(0) = 10 \rightarrow 10 = A.2^{B.0} \rightarrow 10 = A.1 \rightarrow A = 10$$

$$f(t) = 10.2^{B.t}$$

$$t = 2 \rightarrow f(2) = 40 \rightarrow 10.2^{B.2} = 40 \rightarrow 2^{B.2} = 4 \rightarrow 2^{B.2} = 2^2 \rightarrow 2.B = 2 \rightarrow B = 1$$

$$f(t) = 10.2^{1.t} \rightarrow f(t) = 10.2^t$$

$$f(3) = 10.2^3 = 10.8 = 80\ bactérias$$

QUESTÃO 5: Um grupo de pessoas irá dividir um custo de R$ 28,00. No dia do pagamento, 3 pessoas faltaram e cada um dos presentes teve que pagar R$ 3,00 a mais. Quantas pessoas estavam no grupo original?

$\boldsymbol{Grupo\ inicial: x\ pessoas}$ $\boldsymbol{Cada\ um\ iria\ pagar: \frac{28}{x}}$

$\boldsymbol{Pessoas\ presentes: x-3}$ $\boldsymbol{Cada\ um\ pagou: \frac{28}{x-3}}$

$$\frac{28}{x-3} = \frac{28}{x} + 3 \rightarrow \frac{28x}{x.(x-3)} = \frac{28.(x-3)}{x.(x-3)} + \frac{3.x.(x-3)}{x.(x-3)}$$

$$28x = 28x - 84 + 3x^2 - 9x \rightarrow 3x^2 - 9x - 84 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-28)}}{2.1} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+112}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm 11}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3+11}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{3-11}{2} = -4\ (\text{não tem sentido}) \end{cases} \rightarrow \textit{Portanto, o grupo inicial tinha sete pessoas.}$$

QUESTÃO 6: Uma empresa estima que seu lucro, em reais, é calculado por L(q) = 2.q² -8.q + 16, onde q é a quantidade de peças vendidas.

a) Qual o lucro inicial?

b) Quantas peças devem ser vendidas para que o lucro seja mínimo?

c) Qual o lucro mínimo?

$$\boldsymbol{a)\ Lucro\ inicial \rightarrow q = 0 \rightarrow L(0) = 2.0^2 - 8.0 + 16 \rightarrow L(0) = 16\ reais}$$

$$\boldsymbol{b)\ q_{mínimo} = -\frac{b}{2.a} = -\frac{-8}{2.2} = -\frac{-8}{4} = 2\ peças}$$

$$\boldsymbol{c)\ L_{mínimo} = -\frac{\Delta}{4.a} = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4.a} = -\frac{(-8)^2 - 4.2.16}{4.2} = -\frac{64 - 256}{8} = -\frac{-192}{8} = 24\ reais}$$