GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

POLIEDROS

EXERCÍCIOS

PROFESSOR MARCOS JOSÉ

Algumas definições

Retas reversas são duas retas que não se intersectam e não são paralelas. Isso significa que elas estão em planos diferentes.

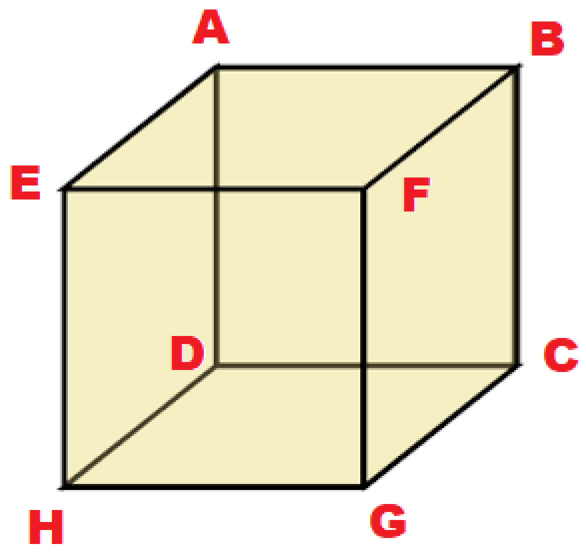
Retas paralelas são duas retas que não se intersectam e que estão no mesmo plano (coplanares).

Retas perpendiculares são duas retas coplanares, que se intersectam e que formam um ângulo de 90°.

Retas ortogonais são duas retas reversas, porém suas projeções são perpendiculares.

- Planos paralelos são dois planos que não têm pontos em comum.
- Qualquer reta de um plano paralelo é paralela ao outro.
- Se um plano intersecta dois planos paralelos, as intersecções são duas retas paralelas.

Considere o cubo abaixo:

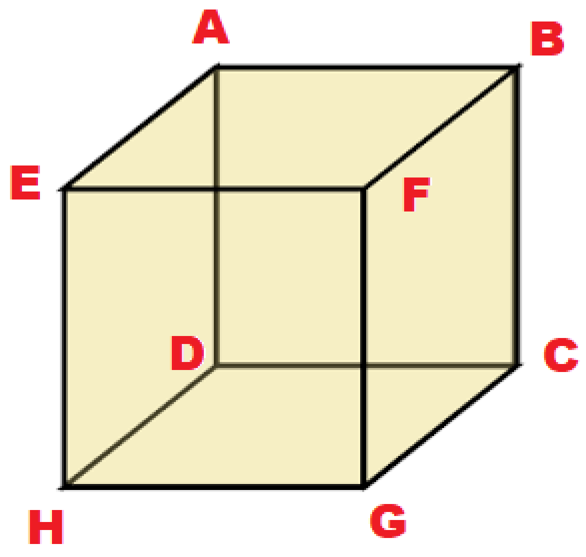


$$Pares\ de\ retas\ reversas \rightarrow \begin{cases} AB\ e\ FG \\ CD\ e\ HE \\ AF\ e\ DH \\ AD\ e\ CG \\ AE\ e\ BC \end{cases}$$

$$Pares\ de\ retas\ ortogonais \rightarrow \begin{cases} AB\ e\ FG \\ CD\ e\ HE \\ FG\ e\ DH \\ AD\ e\ CG \\ EH\ e\ CD \end{cases}$$

$$Pares\ de\ retas\ reversas\ não\ ortogonais \rightarrow \begin{cases} AF\ e\ DH \\ BE\ e\ CD \\ HC\ e\ AB \end{cases}$$

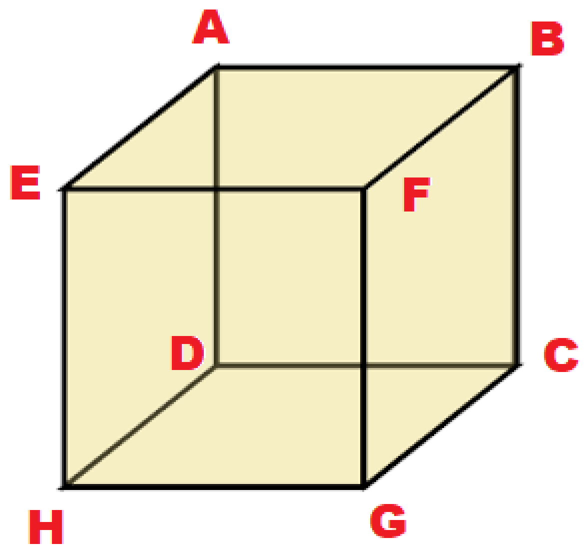
Considere o cubo abaixo:



$$Pares\ de\ retas\ paralelas \rightarrow \begin{cases} AB\ e\ EF \\ CD\ e\ HG \\ AF\ e\ DG \\ AD\ e\ FG \\ DH\ e\ CG \end{cases}$$

$$Pares\ de\ retas\ perpendiculares \rightarrow \begin{cases} AB\ e\ BF \\ AB\ e\ AE \\ AF\ e\ FG \\ AD\ e\ DH \\ DH\ e\ HG \end{cases}$$

Considere o cubo abaixo:

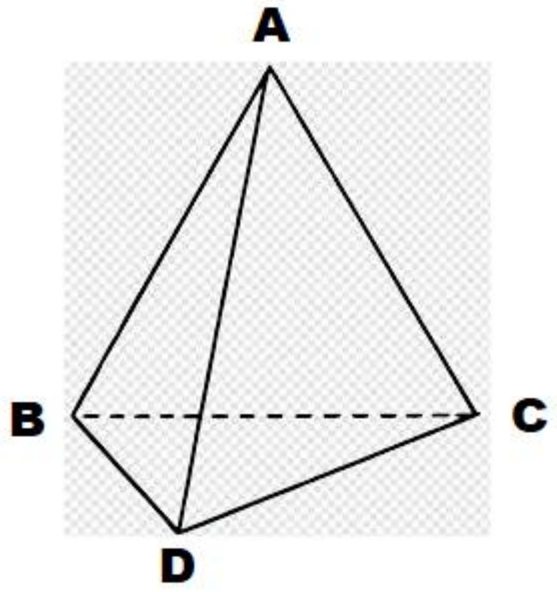


$$Pares\ de\ planos\ paralelas \rightarrow \begin{cases} ABE\ e\ DCH \\ BCG\ e\ ADH \\ EFG\ e\ ABC \end{cases}$$

$$Pares\ de\ planos\ secantes \rightarrow \begin{cases} ABE\ e\ BCG \\ DHG\ e\ AFG \\ EFG\ e\ FGB \end{cases}$$

Questão 1

Quantos e quais são os pares de retas reversas do tetraedro abaixo:



$$\textit{Pares de retas reversas} \rightarrow \begin{cases} AB\ e\ CD \\ AC\ e\ BD \\ AD\ e\ BC \end{cases}$$

Questão 2

(UEL) As retas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas do cubo, conforme figura a seguir.

Assinale a alternativa INCORRETA

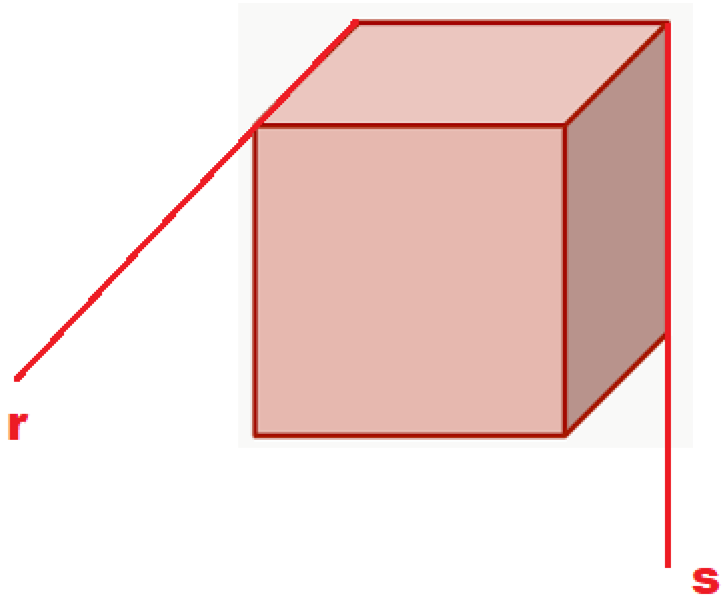
(A) r e s são retas paralelas.

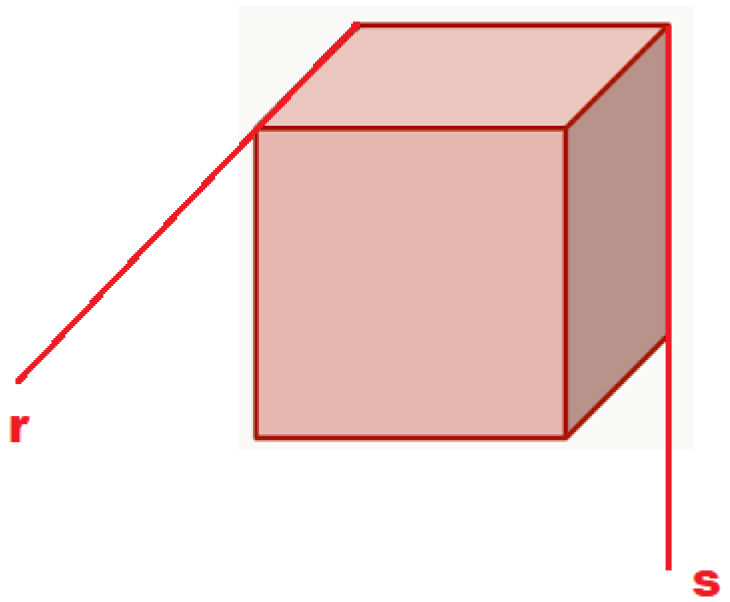
(B) r e s são retas reversas.

(C) r e s são retas ortogonais.

(D) Não existe plano contendo r e s.

(E) $r \cap s = \emptyset$.





(A) ***Falso***

(B) ***Verdadeiro***

(C) ***Verdadeiro***

(D) ***Verdadeiro***

(E) ***Verdadeiro***

GABARITO: A

Questão 3

Classifique em Verdadeira (V) ou Falsa (F) cada uma das afirmações abaixo.

a) (   ) Se uma reta é perpendicular a um plano então ela é perpendicular ou ortogonal às retas desse plano .

b) (   ) Se duas retas r e s têm um único ponto em comum e r está contida em um plano α , então s e α têm um único ponto em comum .

c) (   ) Duas retas paralelas distintas determinam um plano .

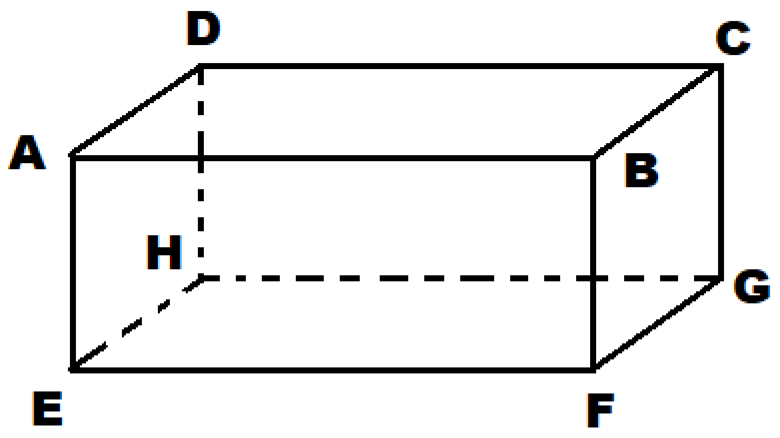
d) (   ) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si .

$\boldsymbol{a)\ Verdadeiro.}$ $\boldsymbol{b)\ Falso.}$ $\boldsymbol{c)\ Verdadeiro.}$ $\boldsymbol{d)\ Falso.}$

Questão 4

Observando a figura (paralelepípedo retângulo) , dê as posições relativas entre :

a) As retas AE e GH.
b) As retas BF e FG.
c) A reta BF e o plano ACD.
d) A reta DH e o plano ACE.
e) Os planos DBH e CGE.



$a)\ Reversas.$

$b)\ Perpendiculares.$

$c)\ Perpendiculares.$

$d)\ Paralelos.$

$e)\ Secantes.$

Questão 5

(PUC-SP) Assinale a afirmação verdadeira :

a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si .

b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si .

c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.

d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.

e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{Falso}.$

$\mathbf{b})\ \boldsymbol{Falso}.$

$\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{Verdadeiro}.$

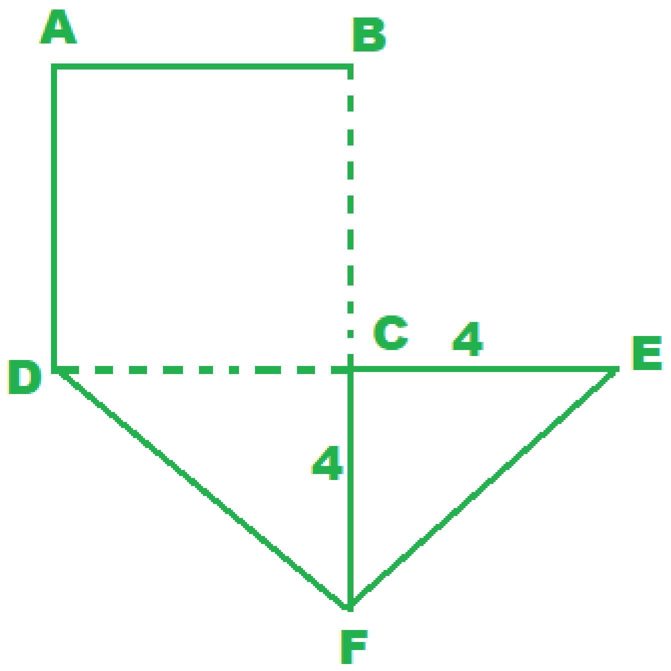
$\boldsymbol{d})\ \boldsymbol{Falso}.$

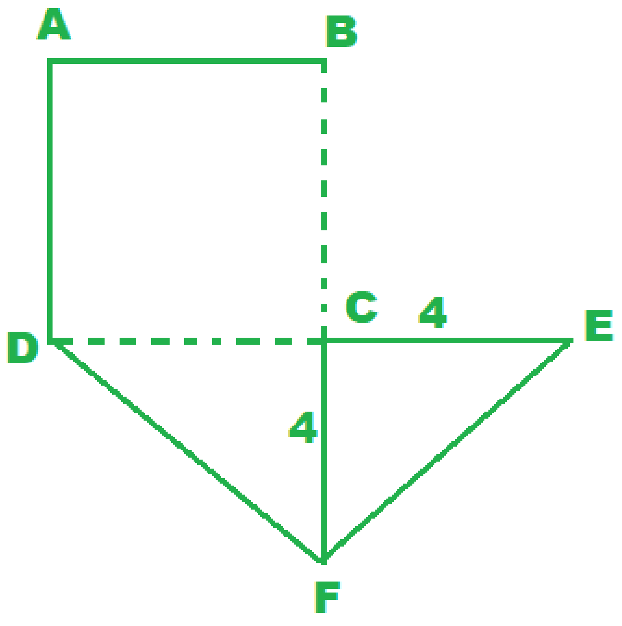
$\boldsymbol{e})\ \boldsymbol{Falso}.$

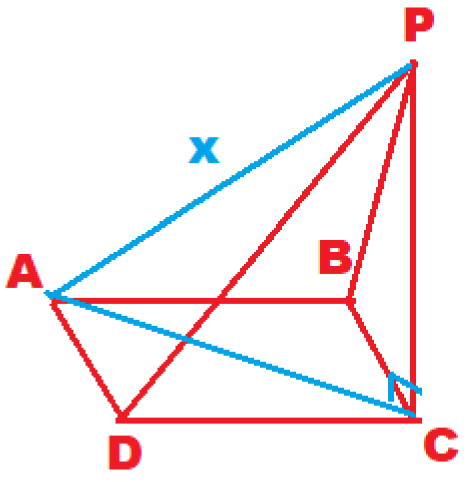
$\boldsymbol{GABARITO}: \boldsymbol{C}$

Questão 6

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de área 10 cm². Os segmentos CE e CF medem 4 cm cada um. Essa figura deverá ser dobrada nas linhas tracejadas, fazendo com que os pontos E e F coincidam com um ponto P do espaço. Determine a distância entre P e A.







$$Área = 10\ cm^2 \rightarrow L^2 = 10 \rightarrow L = \sqrt{10}$$

$$AC = L\sqrt{2} \rightarrow AC = \sqrt{10}\ x\ \sqrt{2} \rightarrow AC = \sqrt{20}$$

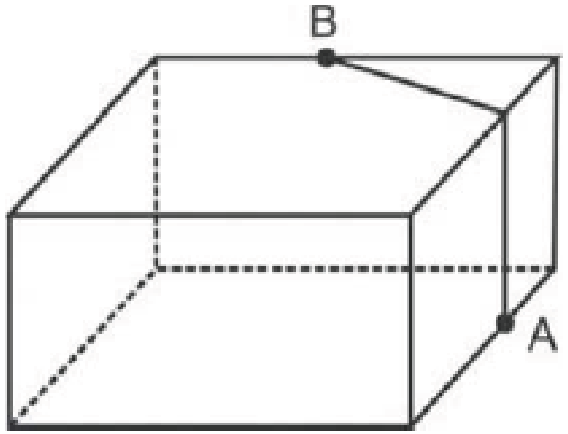
$$PC = 4$$

$$\Delta APC\ retângulo \rightarrow PA^2 = AC^2 + PC^2 \rightarrow x^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 + 4^2 \rightarrow x^2 = 20 + 16 \rightarrow x^2 = 36$$

$$PA = x = 6\ cm$$

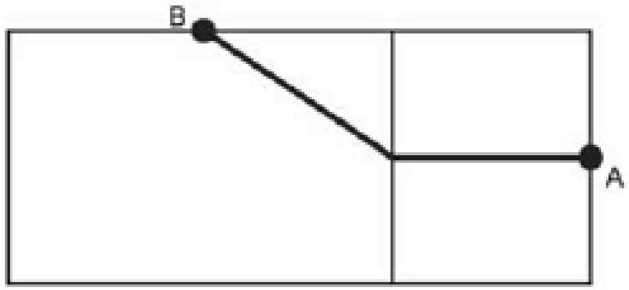
Questão 7 (ENEM)

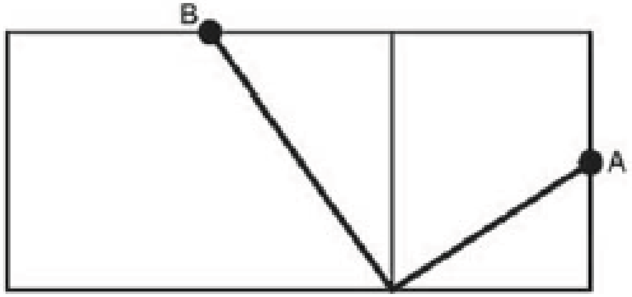
A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.

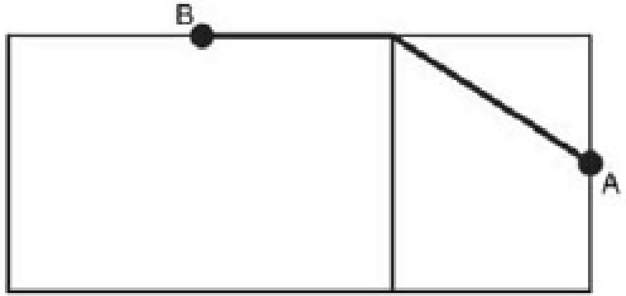


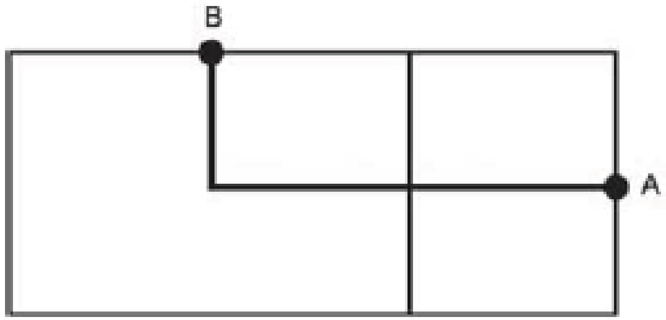
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

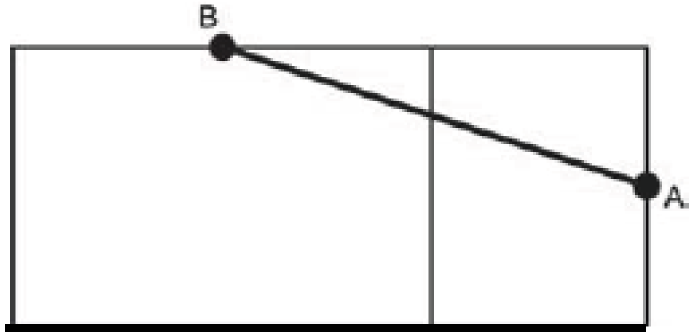
O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

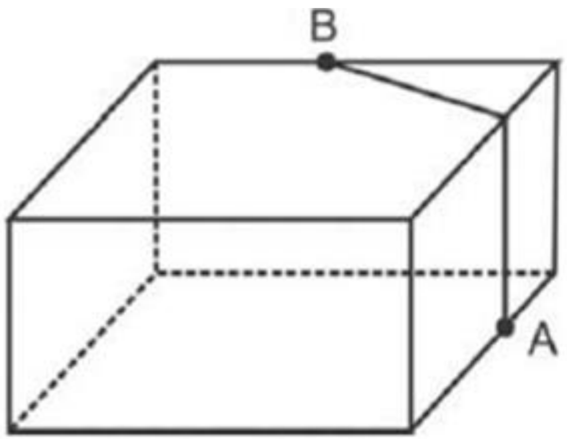
A


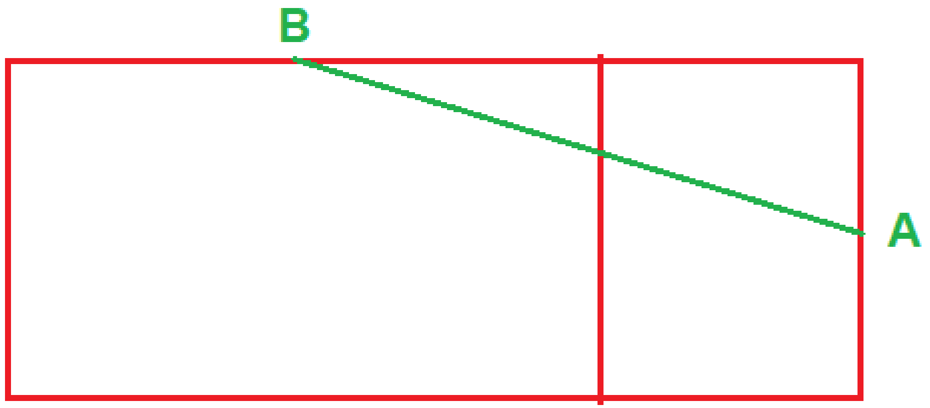
B


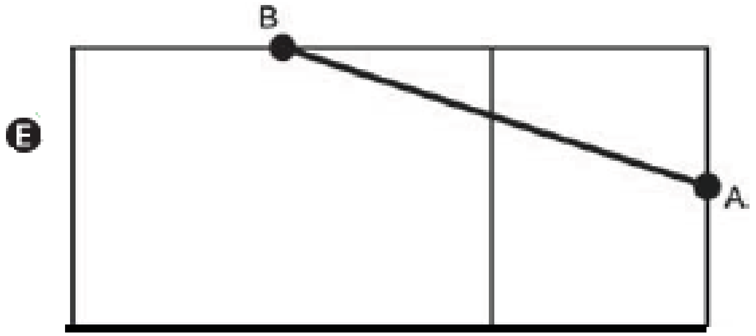
C


D


E








GABARITO: E

Questão 8 (ENEM)

O Museu do Louvre, localizado em Paris, na França, é um dos museus mais visitados do mundo. Uma de suas atrações é a Pirâmide de Vidro, construída no final da década de 1980. A seguir tem-se, na Figura 1, uma foto da Pirâmide de Vidro do Louvre e, na Figura 2, uma pirâmide reta de base quadrada que a ilustra.

Figura 1

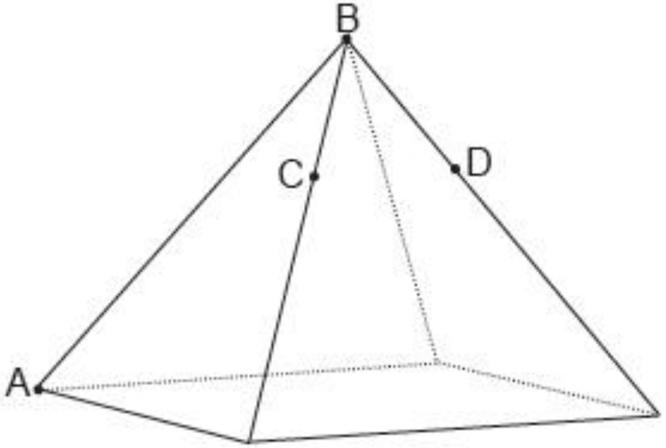


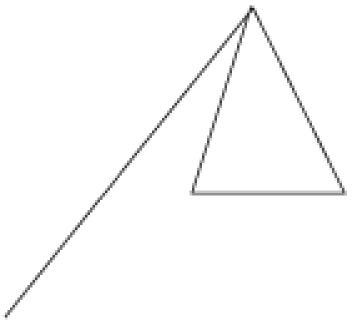
Figura 2

Considere os pontos A, B, C, D como na Figura 2. Suponha que alguns reparos devem ser efetuados na pirâmide. Para isso, uma pessoa fará o seguinte deslocamento: 1) partir do ponto A e ir até o ponto B, deslocando-se pela aresta AB; 2) ir de B até C, deslocando-se pela aresta que contém esses dois pontos; 3) ir de C até D, pelo caminho de menor comprimento; 4) deslocar-se de D até B pela aresta que contém esses dois pontos.

Disponível em: http://viagenslacoste.blogspot.com. Acesso em: 29 fev. 2012.

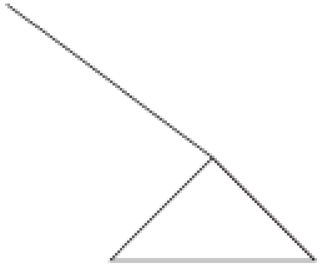
A projeção do trajeto da pessoa no plano da base da pirâmide é melhor representada por:

A

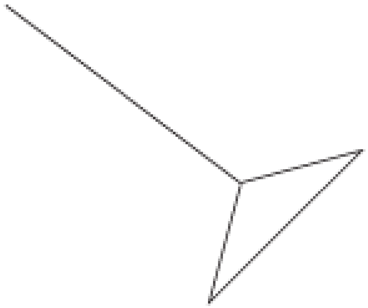


B

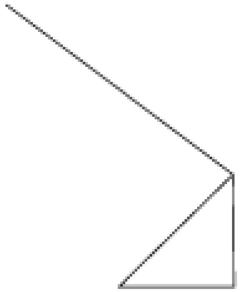
C

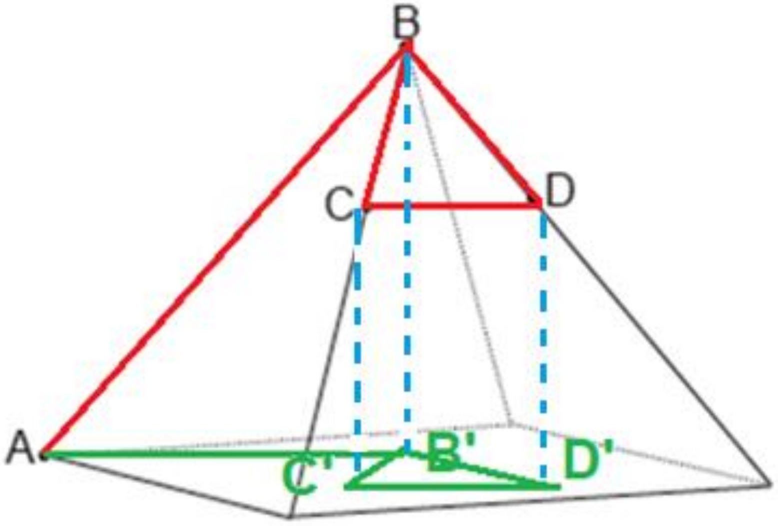


D

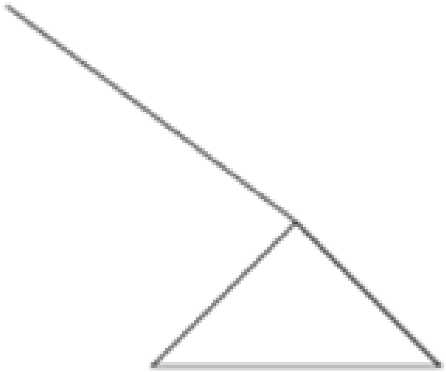


E





Ⓒ



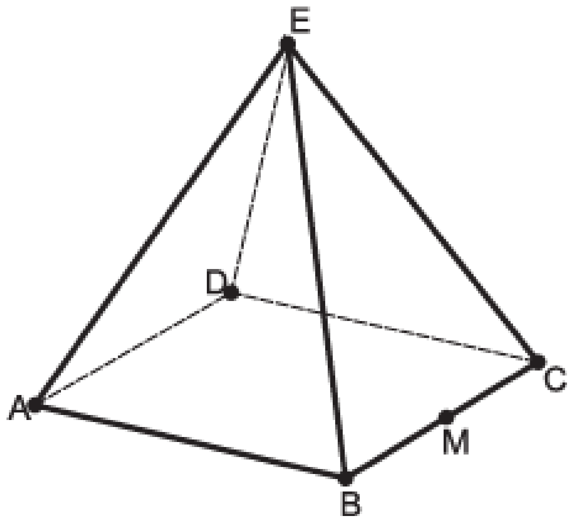
$\boldsymbol{Em\ vermelho, a\ trajetória\ percorrida.}$

$\boldsymbol{Em\ verde, a\ projeção\ ortogonal.}$

$\boldsymbol{GABARITO: C}$

QUESTÃO 9 (ENEM)

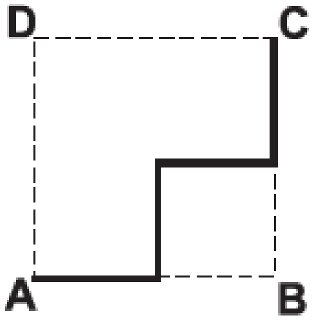
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



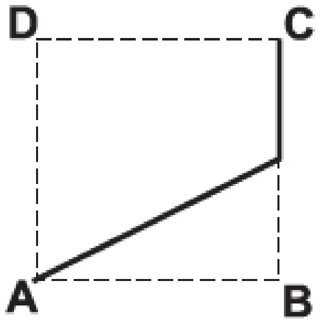
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

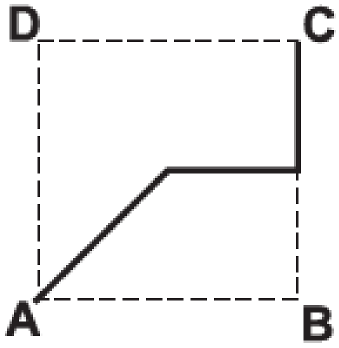
Ⓐ


D
C
A
B

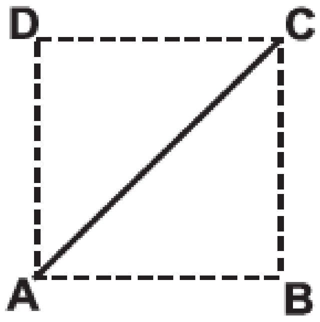
Ⓑ


D
C
A
B

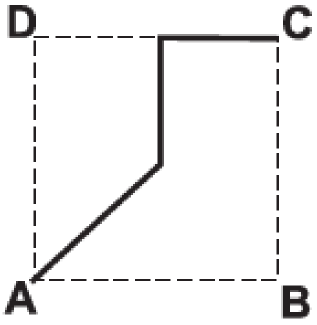
Ⓒ

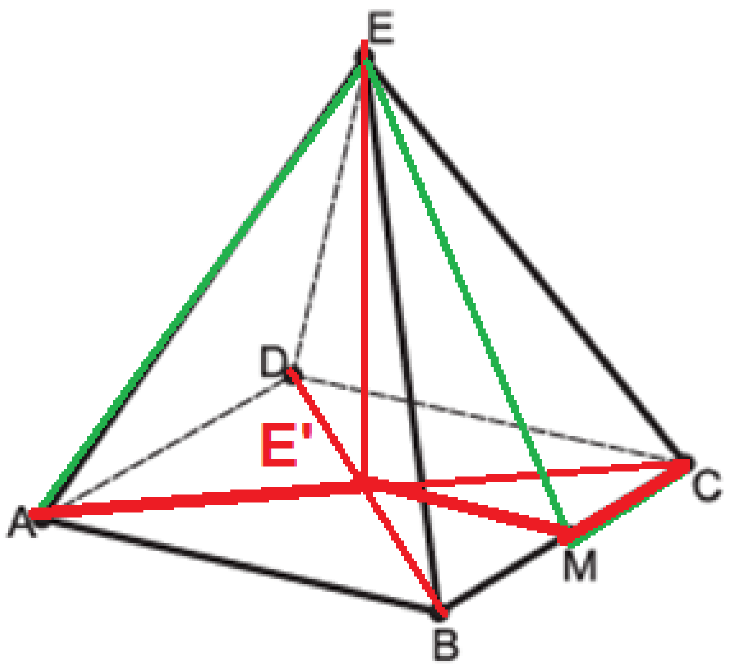

D
C
A
B

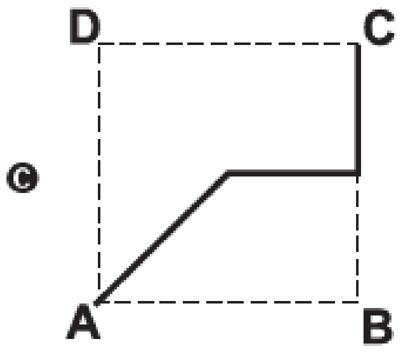
Ⓓ


D
C
A
B

Ⓔ


D
C
A
B





$Em\ verde\ o\ trajeto\ na\ pirâmide.\ O\ segmento\ MC\ coincide\ com\ a\ projeção.$

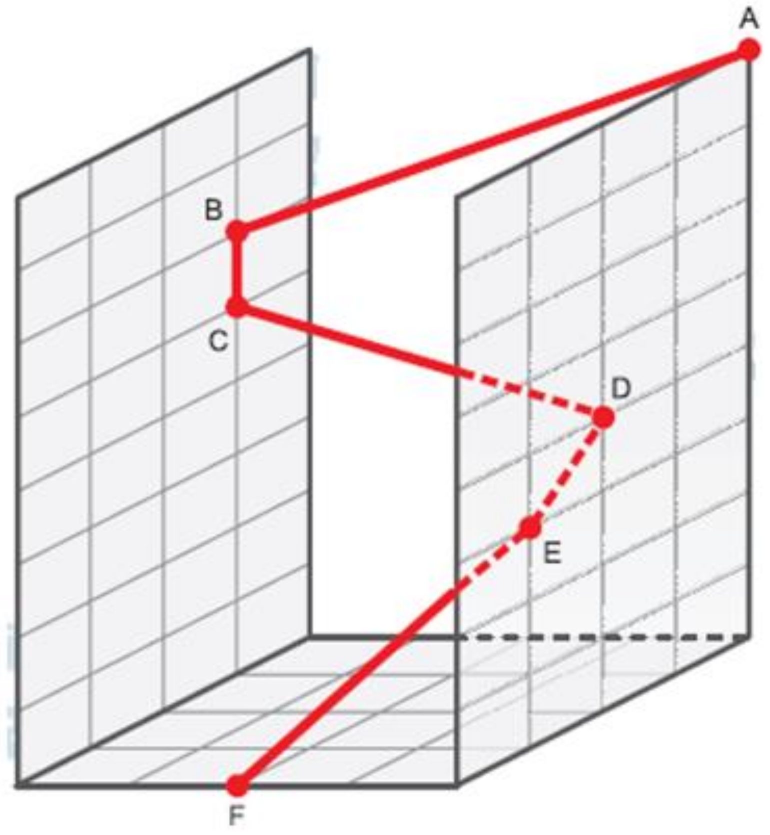
$Trajeto\ da\ projeção \rightarrow AE'MC$

$OBS.\ Esta\ resolução\ baseia-se\ na\ suposição\ de\ que\ a\ pirâmide\ é\ regular.$

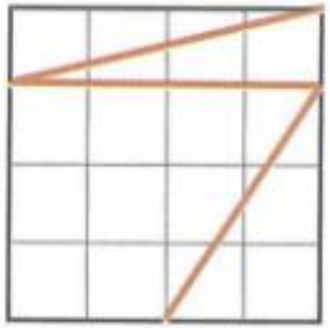
$GABARITO: C$

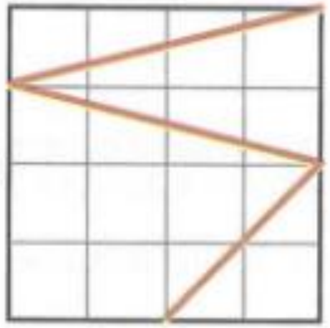
QUESTÃO 10 (ENEM)

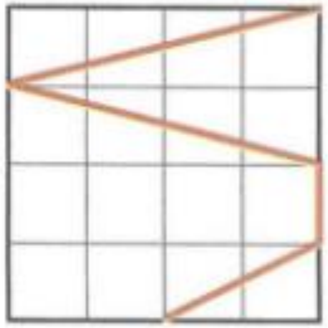
Em um jogo virtual para celular, um personagem pode percorrer trajetórias retilíneas voando ou se deslocando ao longo de paredes. Considere que o personagem descreve a trajetória ABCDEF, em que os pontos A, D e E estão em um plano paralelo ao que contém os pontos B e C, sendo esses dois planos ortogonais ao plano da base que contém o ponto F, conforme a figura.

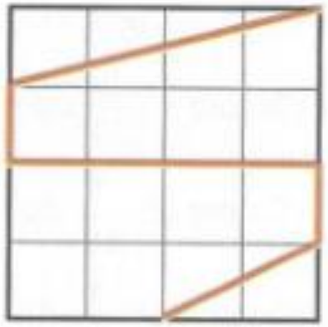


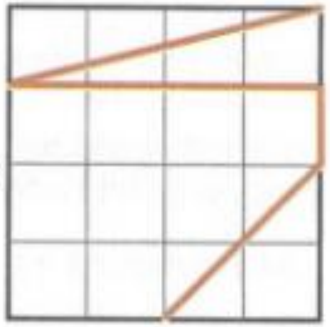
A projeção ortogonal, sobre o plano da base, da trajetória *ABCDEF* descrita pelo personagem é

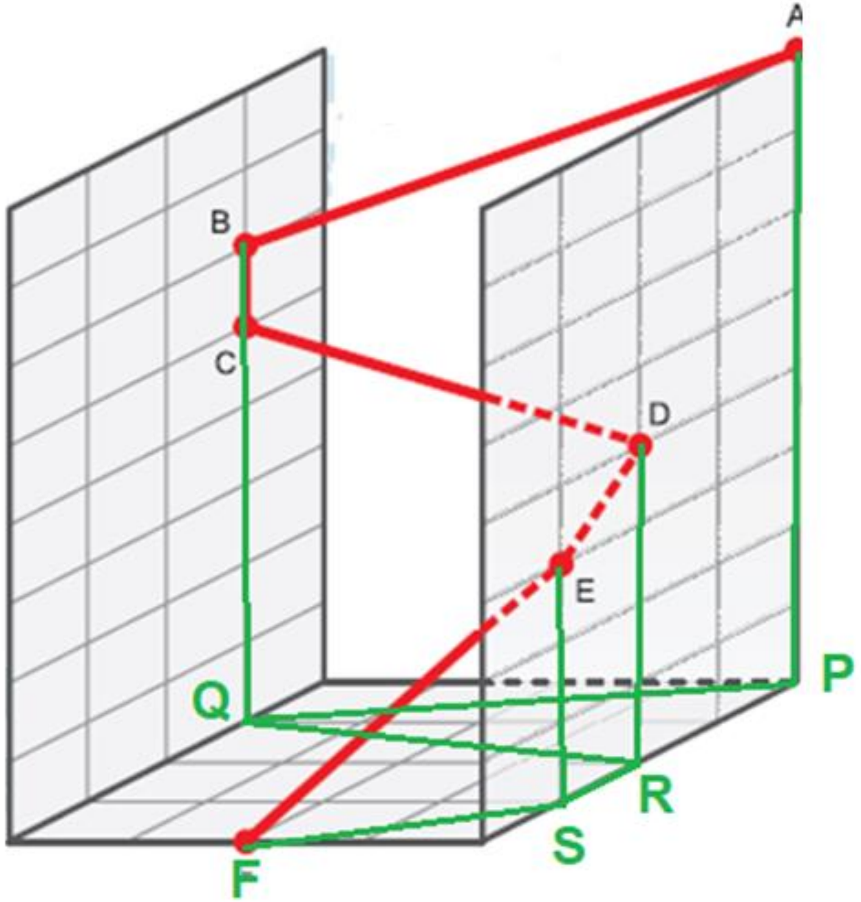
A


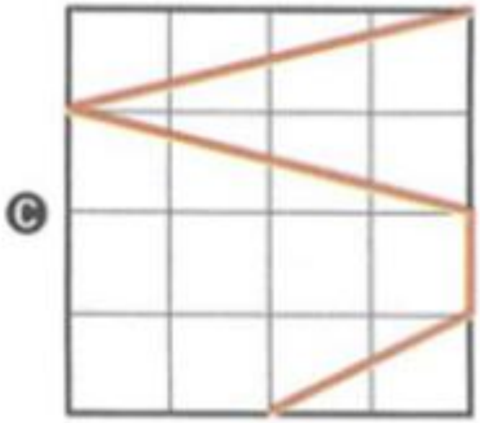
B


C


D


E






$\boldsymbol{Projeções\ ortogonais: A \to P; B\ e\ C \to Q; D \to R; E \to S \to F \to F}$

$\boldsymbol{A\ projeção\ ortogonal\ é\ o\ polígono\ PQRSF}$

$\boldsymbol{GABARITO: C}$

Poliedros

Denomina-se poliedro o sólido limitado por polígonos planos que têm, dois a dois, um lado comum. Os polígonos são denominados faces do poliedro, já os lados e vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, arestas e vértices do poliedro.

Os poliedros são classificados de acordo com o número de faces, assim temos:

Tetraedro: poliedro convexo com 4 faces

Pentaedro: poliedro convexo com 5 faces

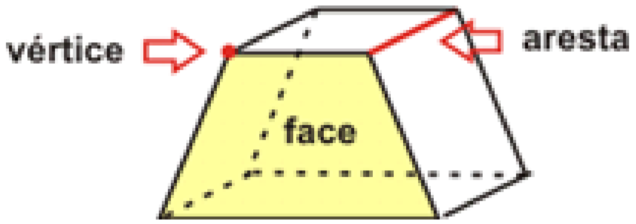
Hexaedro: poliedro convexo com seis faces

Heptaedro: poliedro convexo com 7 lados

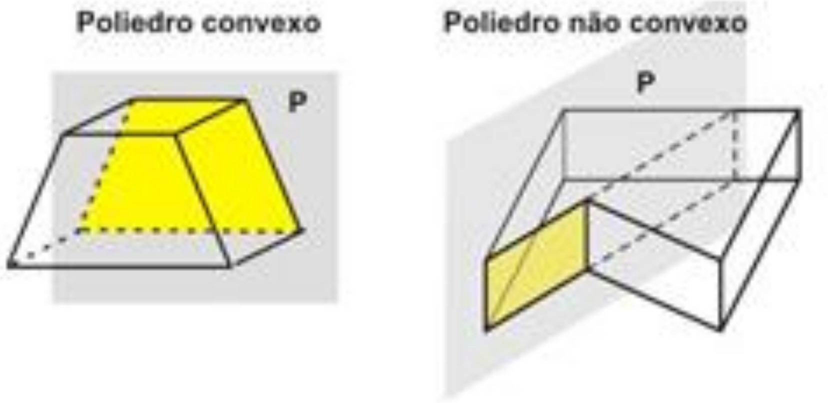
Icosaedro: poliedro convexo com 20 lados

O que são faces, arestas e vértices do poliedro?

- Faces - são as superfícies planas poligonais que limitam o poliedro.
- Arestas - são os lados das faces do poliedro.
- Vértices - são os vértices das faces do poliedro.



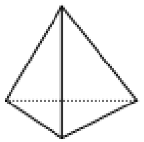
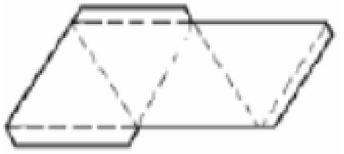
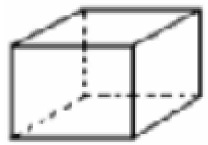
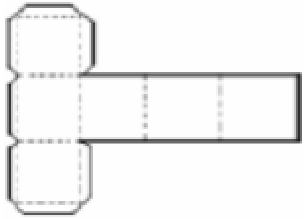
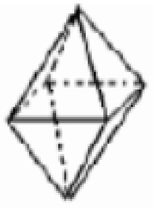
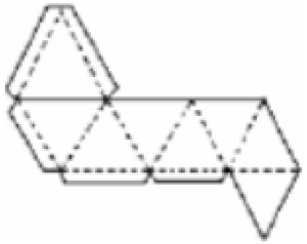
<u>Relação de Euler</u>: Em um **poliedro convexo**, vale a fórmula **V + F = A + 2**, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

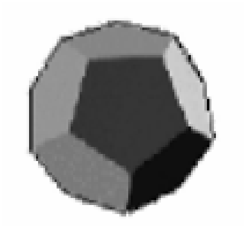
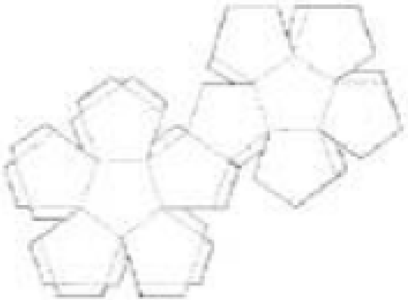
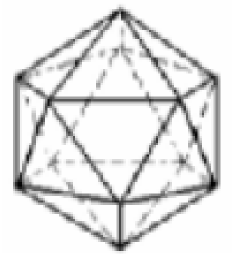
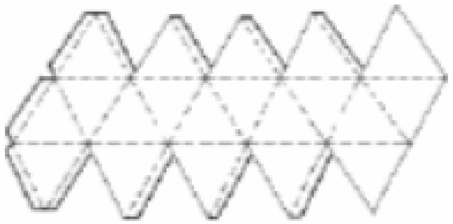


<u>Soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo</u>: **S = (V – 2).360º**.

<u>Poliedros regulares</u>: O poliedro convexo é dito regular quando as suas faces são polígonos regulares, todas com o mesmo número de lados, e se em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas.

Existem apenas cinco poliedros regulares:

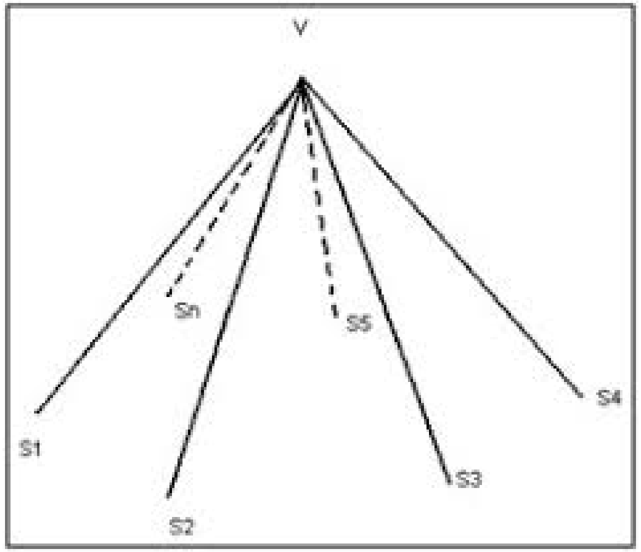
Poliedro	Planificação	Elementos
Tetraedro Regular 		4 faces triangulares equiláteras 4 vértices 6 arestas
Hexaedro Regular 		6 faces quadradas 8 vértices 12 arestas
Octaedro Regular 		8 faces triangulares equiláteras 6 vértices 12 arestas

Dodecaedro Regular 		12 faces pentagonais equiláteras 20 vértices 30 arestas
Icosaedro Regular 		20 faces triangulares equiláteras 12 vértices 30 arestas

Ângulos poliédricos.

- Diedros**:** Dois semiplanos não-coplanares, com origem numa mesma reta, determinam uma figura geométrica chamada *ângulo diédrico*, ou simplesmente diedro.
- Ângulo triédrico: Três semirretas não-coplanares, com origem num mesmo ponto, determinam três ângulos que formam uma figura geométrica chamada *ângulo triédrico*, ou simplesmente triedro:ângulo formado por 3 faces.

O mesmo conceito se aplica aos tetraédricos, pentaédricos, etc



Exercícios

1) Um poliedro convexo possui 10 faces triangulares, 10 faces quadrangulares e 1 face decagonal. Determine o número de vértices deste poliedro.

$$\begin{cases} 10FT \rightarrow 10\ x\ 3 = 30\ lados. \\ 10FQ \rightarrow 10\ x\ 4 = 40\ lados. \\ 1FD \rightarrow 1\ x\ 10 = 10\ lados \end{cases}$$

$$F = 10 + 10 + 1 \rightarrow F = 21$$

$$Total\ de\ lados = 80 \rightarrow A = \frac{total\ de\ lados}{2} \rightarrow A = \frac{80}{2} \rightarrow A = 40$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow V + 21 = 40 + 2 \rightarrow V = 21$$

2) Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. Determine o número de vértices desse poliedro.

$$\begin{cases} 4FT \rightarrow 4\ x\ 3 = 12\ lados. \\ 2FQ \rightarrow 2\ x\ 4 = 8\ lados. \\ 1FH \rightarrow 1\ x\ 6 = 6\ lados \end{cases}$$

$$F = 4 + 2 + 1 \rightarrow F = 7$$

$$Total\ de\ lados = 26 \rightarrow A = \frac{total\ de\ lados}{2} \rightarrow A = \frac{26}{2} \rightarrow A = 13$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow V + 7 = 13 + 2 \rightarrow V = 8$$

3) (CEFET - PR) Um poliedro convexo possui duas faces triangulares, duas quadrangulares e quatro pentagonais. Logo, a soma dos ângulos internos de todas as faces será:

a) 3240º b) 3640º c) 3840º d) 4000º e) 4060º

Solução 1:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2FT \to 2\ x\ 3 = 6\ lados.} \\ \boldsymbol{2FQ \to 2\ x\ 4 = 8\ lados.} \\ \boldsymbol{4FP \to 4\ x\ 5 = 20\ lados} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F = 2 + 2 + 4 \to F = 8}$$

$$\boldsymbol{V + F = A + 2 \to V + 8 = 17 + 2 \to V = 11}$$

$$\boldsymbol{S = (V - 2).360° \to S = (11 - 2).360° \to S = 9.360° \to S = 3240°}$$

Solução 2:

$\boldsymbol{A\ soma\ dos\ \hat{a}ngulos\ internos\ de\ um\ pol\acute{i}gono\ \acute{e}\ dada\ por:\ S_n = (n-2).180°.\ Assim:}$

$$\boldsymbol{2FT \rightarrow 2.(3-2).180° = 2\,.\,180° = 360°.}$$

$$\boldsymbol{2FQ \rightarrow 2.(4-2).180^{\underline{o}} = 2.2.180° = 720°.}$$

$$\boldsymbol{4FP \rightarrow 4.(5-2).180^{\underline{o}} = 4.3.180° = 2160°.}$$

$$\boldsymbol{360° + 720° + 2160° = 3240°}$$

4) (PUC-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo-se que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares?

a) 4 b) 3 c) 5 d) 6 e) 8

$$\begin{cases} xFT \rightarrow x\,.\,3 = 3x\ lados. \\ 3FP \rightarrow 3\ x\ 5 = 15\ lados. \end{cases}$$

$$Total\ de\ lados = 3x + 15 \rightarrow A = \frac{total\ de\ lados}{2} \rightarrow A = \frac{3x+15}{2}$$

$$A = 4x \rightarrow 4x = \frac{3x+15}{2} \rightarrow 8x = 3x + 15 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$$

$$Logo,\ o\ poliedro\ tem\ 3\ faces\ triangulares\ e\ 3\ faces\ pentagonais.\ F = 6$$

5) Determine o número de faces de um poliedro convexo e fechado que tem 5 ângulos tetraédricos e 6 ângulos triédricos.

$$\begin{cases} 5\ \hat{A}ngulos\ Tetra\acute{e}dricos \rightarrow 5\ x\ 4 = 20\ arestas. \\ 6\ \hat{A}ngulos\ Tri\acute{e}dricos \rightarrow 6\ x\ 3 = 18\ arestas. \end{cases}$$

$$V = 5 + 6 \rightarrow V = 11$$

$$Mas\ as\ arestas\ est\tilde{a}o\ sendo\ contadas\ duas\ vezes.\ Logo,\ A = \frac{20 + 18}{2}.\ A = 19.$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow 11 + F = 19 + 2 \rightarrow F = 10$$

6) Um poliedro apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces é igual a 2160°. Determine o número de faces de cada espécie desse poliedro, sabendo que ele tem 15 arestas.

$$\begin{cases} xFT \to x\,.\,3 = 3x \text{ lados} \\ yFQ \to y \; x \; 4 = 4y \text{ lados} \end{cases}$$

$$\text{Total de lados} = 3x + 4y \to A = \frac{\text{total de lados}}{2} \to A = \frac{3x+4y}{2}$$

$$\text{Mas, } A = 15 \to 15 = \frac{3x+4y}{2} \to 3x + 4y = 30(I)$$

$$S = (V-2).360° \to 2160° = (V-2).360° \to 6 = V - 2 \to V = 8.$$

$$V + F = A + 2 \to 8 + x + y = 15 + 2 \to x + y = 9(II).$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ x + y = 9 \end{cases} \to \begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ -3x - 3y = -27 \end{cases} \to \text{Somando vem}: y = 3 \to x + 3 = 9 \to x = 6$$

7) Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é cinco.

$$\begin{cases} FT \rightarrow x\,.\,3 = 3x\ lados. \\ 5FQ \rightarrow 5\ x\ 4 = 20\ lados. \end{cases}$$

$$Total\ de\ lados = 3x + 20 \rightarrow A = \frac{total\ de\ lados}{2} \rightarrow A = \frac{3x + 20}{2}$$

$$Mas,\ A = 4x \rightarrow 4x = \frac{3x + 20}{2} \rightarrow 8x = 3x + 20 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

$$Logo, são\ 4FT\ e\ 5FQ.\ F = 9.$$

8) (AFA) Um poliedro convexo tem 16 faces. De um dos seus vértices partem 5 arestas; de cinco outros vértices partem 4 arestas e, de cada um dos vértices restantes, partem 3 arestas. Qual o número total de arestas desse poliedro?

$$\begin{cases} 1 \text{ vértice partem } 5 \text{ arestas} \rightarrow 1\, x\, 5 = 5 \text{ arestas} \\ 5 \text{ vértices partem } 4 \text{ arestas} \rightarrow 5\, x\, 4 = 20 \text{ arestas} \\ x \text{ vértices partem } 3 \text{ arestas} \rightarrow x\, .\, 3 = 3x \text{ arestas} \end{cases}$$

$$\text{Total de arestas} = 25 + 3x.\ \text{Mas, cada aresta está sendo contada duas vezes.}$$

$$\text{Logo, } A = \frac{25+3x}{2}.$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow (6 + x) + 16 = \frac{25+3x}{2} + 2 \rightarrow 20 + x = \frac{25+3x}{2} \rightarrow 40 + 2x = 25 + 3x \rightarrow x = 15$$

$$A = \frac{25+3x}{2} \rightarrow A = \frac{25+3.15}{2} \rightarrow A = \frac{25+45}{2} \rightarrow A = 35$$

9) Um poliedro convexo de faces triangulares é tal que o número de vértices é $\frac{3}{5}$ do número de faces. Determine o número de arestas desse poliedro.

$$x\ FT \rightarrow 3\ .\ x\ lados \qquad V = \frac{3}{5}.\ x$$

$$Aresta = \frac{total\ de\ lados}{2} \rightarrow A = \frac{3x}{2}$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow \frac{3}{5}.\ x + x = \frac{3x}{2} + 2 \rightarrow 6x + 10x = 15x + 20 \rightarrow x = 20$$

$$A = \frac{3x}{2} = \frac{3.\ 20}{2} = 30$$

10) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. o numero de faces desse poliedro é igual a:

a) 16

b) 18

c) 24

d) 30

e) 44

$$\boldsymbol{V = 14 \rightarrow \begin{cases} 6\ x\ 4 = 24\ arestas \\ 4\ x\ 3 = 12\ arestas \\ 4\ x\ 5 = 20\ arestas \end{cases} \rightarrow A = \frac{24 + 12 + 20}{2} \rightarrow A = \frac{56}{2} = 28}$$

$$\boldsymbol{V + F + A + 2 \rightarrow 14 + F = 28 + 2 \rightarrow F = 16}$$

11) Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

a) 100

b) 120

c) 90

d) 80

$$x\ FT \rightarrow 3\ .\ x\ lados$$

$$A = \frac{total\ de\ lados}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow 32 + x = \frac{3x}{2} + 2 \rightarrow 64 + 2x = 3x + 4 \rightarrow x = 60$$

$$A = \frac{3.x}{2} = \frac{3.60}{2} = 90$$

12) A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo vale 720°. Sabendo que o número de faces vale $\frac{2}{3}$ do número de arestas, pode-se dizer que o número de faces vale:

a) 6. b) 4. c) 5. d) 12. e) 9.

$$\boldsymbol{S = (V-2).360° \rightarrow 720° = (V-2).360° \rightarrow 2 = (V-2) \rightarrow V = 4}$$

$$\boldsymbol{F = \frac{2}{3}A \rightarrow A = \frac{3F}{2}}$$

$$\boldsymbol{V + F = A + 2 \rightarrow 4 + F = \frac{3F}{2} + 2 \rightarrow 8 + 2F = 3F + 4 \rightarrow F = 4}$$

$\boldsymbol{GABARITO: B}$

13) A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas formam os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera. O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente, Pode ser utilizado o Teorema de Descartes-Euler, V+F=A+2

a) 80 e 60

b) 80 e 50

c) 70 e 40

d) 90 e 60

e) 90 e 50

$$F = 32 \rightarrow \begin{cases} FP = 12 \rightarrow 12\ x\ 5 = 60\ lados \\ FH = 20 \rightarrow 20\ x\ 6 = 120\ lados \end{cases}$$

$$A = \frac{total\ de\ lados}{2} = \frac{60 + 120}{2} = 90$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow V + 32 = 90 + 2 \rightarrow V = 60$$

14) (ENEM) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

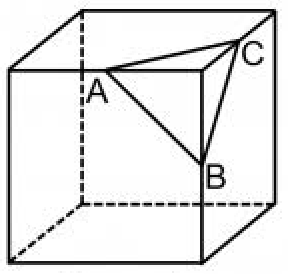
(A) 6.

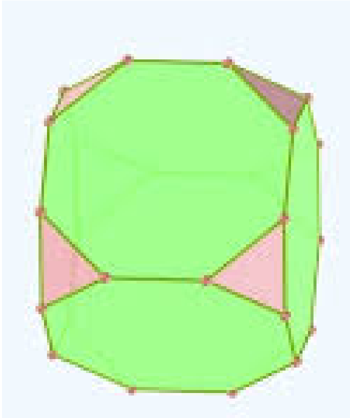
(B) 8.

(C) 14.

(D) 24.

(E) 30.





$Cubo\ tem\ 8\ vértices.$

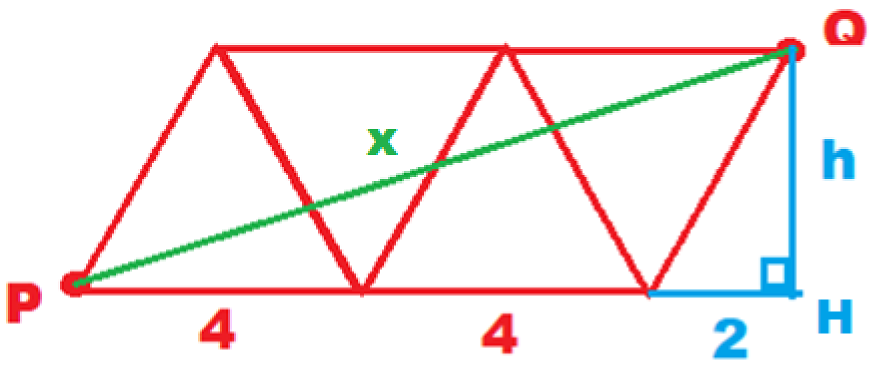
$Cada\ vértice\ vira\ uma\ face\ triangular.$

$Faces = 6FH + 8FT = 14\ faces$

$14\ cores$

$GABARITO: C$

15) Uma formiga encontra-se no vértice P e pretende chegar ao vértice Q pela superfície do icosaedro regular da figura a seguir. Esse icosaedro regular possui aresta 4 cm. Determine o menor caminho para ir de P para Q sobre a superfície do sólido.

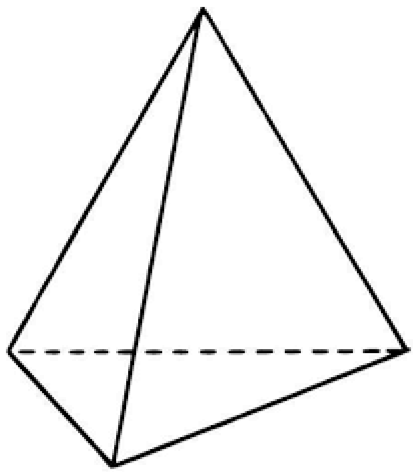


$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta PHQ \rightarrow x^2 = 10^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow x^2 = 100 + 12 \rightarrow x = \sqrt{112} \rightarrow x = 4\sqrt{7}$$

16) Um tetraedro regular é um tipo particular de pirâmide regular no qual qualquer uma de suas faces pode ser considerada base, haja vista ser formado por 4 regiões triangulares congruentes e equiláteras. Considerando essa informação, a área total de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm é, em centímetros quadrados igual a:

a) 27,2 cm
b) 42,5 cm
c) 61,2 cm
d) 83,3 cm



$$A_{Total} = 4\ x\ \frac{L^2 x\sqrt{3}}{4} = 6^2 x\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \cong 36\ x\ 1,7 = 61,2\ cm^2$$

$$GABARITO: C$$

17) (UERJ) O poliedro abaixo, com exatamente trinta faces quadrangulares numeradas de 1 a 30, é usado como um dado, em um jogo.

Admita que esse dado seja perfeitamente equilibrado e que, ao ser lançado, cada face tenha a mesma probabilidade de ser sorteada.

Calcule:

a) a probabilidade de obter um número primo ou múltiplo de 5, ao lançar esse dado uma única vez;

b) o número de vértices do poliedro.

$a)$

$Primos = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23\ 29\}$ $Múltiplos\ de\ 5 = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$

$(Primos) + (Múltiplos\ de\ 5) = 15\ (O\ 5\ é\ comum\ e\ conta\ apenas\ uma\ vez)$

$$p = \frac{15}{30} \rightarrow p = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$b)$

$30FQ \rightarrow 30\ x\ 4 = 120\ lados$

$$A = \frac{total\ de\ lados}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow V + 30 = 60 + 2 \rightarrow V = 32$$

18) O fulereno é uma molécula de carbono descoberta em 1985, e sua utilização tem sido proposta em muitas áreas, como medicina, bioquímica e física, devido à sua grande estabilidade. O modelo tridimensional da molécula do fulereno C_{60} é um poliedro convexo de faces regulares, que possui 12 faces pentagonais, 20 faces hexagonais e três arestas se encontrando em cada vértice, formando ângulos triédricos. Em cada vértice, está situado um átomo de carbono. Baseando-se nessas informações, verifique se é verdadeiro ou falso.

( ) O poliedro que representa a molécula possui 120 arestas.

( ) Se A é o número de arestas do poliedro e V o número de vértices do poliedro que representa a molécula, então 3A = 2V.

( ) A soma dos ângulos internos de todas as faces é 58π rad.

( ) O poliedro que representa a molécula possui 60 vértices.

$$\begin{cases} 12\ FP \rightarrow 12\ x\ 5 = 60\ lados \\ 20\ FH \rightarrow 20\ x\ 6 = 120\ lados \end{cases} \rightarrow A = \frac{60 + 120}{2} = 90$$

$$V + F = A + 2 \rightarrow V + 32 = 90 + 2 \rightarrow V = 60$$

$$S = (V - 2).360° = (60 - 2).2\pi = 58.2\pi = 116\pi$$

( ) O poliedro que representa a molécula possui 120 arestas.
( ) Se A é o número de arestas do poliedro e V o número de vértices do poliedro que representa a molécula, então 3A = 2V.
( ) A soma dos ângulos internos de todas as faces é 58π rad.
( ) O poliedro que representa a molécula possui 60 vértices.

$Falso.$

$Falso.$

$Falso.$

$Verdadeiro$

19) Sejam M e N dois poliedros convexos tais que: M tem 18 arestas, 8 vértices e m faces; e N tem 20 arestas, 10 vértices e n faces. Então é correto afirmar que ___________.

a) m = n

b) m = n + 2

c) n = m + 2

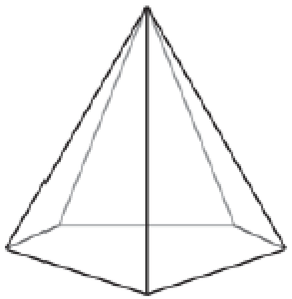
d) m + n = 22

$$\boldsymbol{M \rightarrow V + F = A + 2 \rightarrow 8 + m = 18 + 2 \rightarrow m = 12}$$

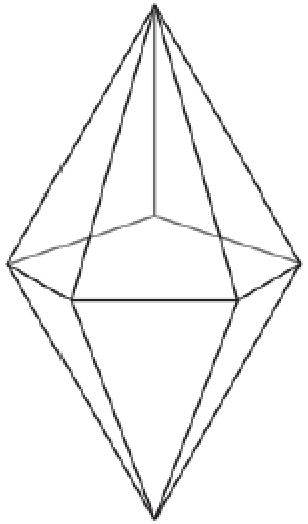
$$\boldsymbol{N \rightarrow V + F = A + 2 \rightarrow 10 + n = 20 + 2 \rightarrow n = 12}$$

$$\boldsymbol{m = n}$$

20) A figura a seguir ilustra uma pirâmide de base pentagonal.



Duas dessas pirâmides idênticas foram coladas pelas bases formando um novo sólido com 7 vértices e 10 faces.



Nas proximidades de cada um desses 7 vértices, são feitos cortes no sólido produzindo 7 pequenas pirâmides que serão, posteriormente, removidas. A esse processo se chama truncamento.

Após o truncamento descrito, o sólido passará a ter

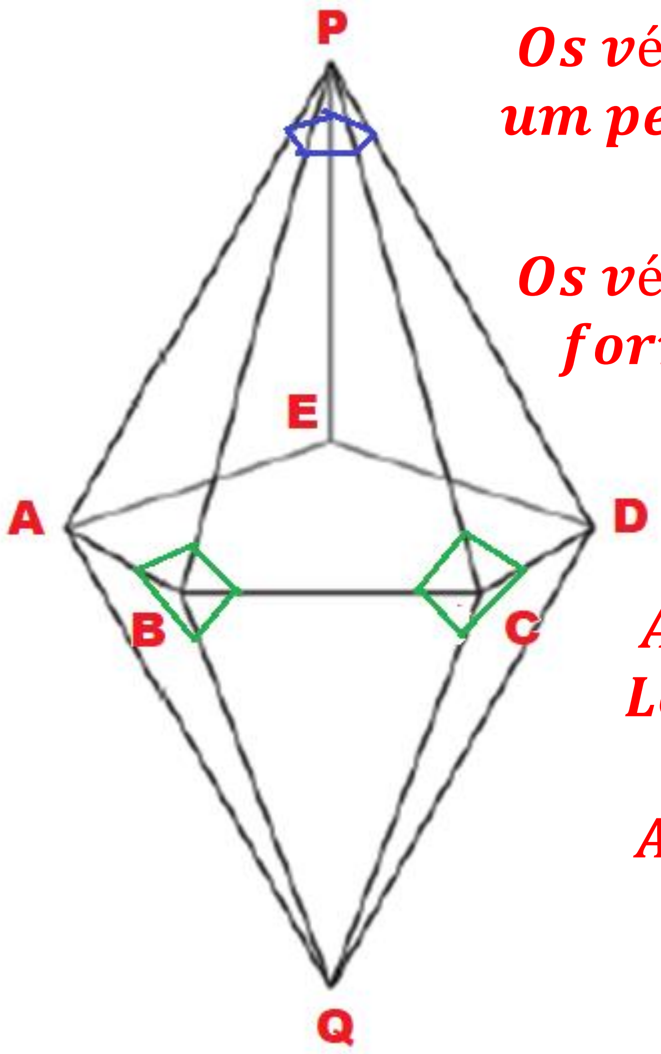
(A) 5 faces quadrangulares, 2 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.

(B) 5 faces quadrangulares, 7 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.

(C) 10 faces triangulares, 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais.

(D) 10 faces triangulares e 7 faces quadrangulares.

(E) 10 faces triangulares e 7 faces pentagonais.



Os vértices P e Q são pentaédricos. Portanto, quando corta, forma um pentágono. Logo, temos 2 faces pentagonais.

Os vértices A, B, C, D e E são tetraédricos. Portanto, quando corta, forma um quadrilátero. Logo, temos 5 faces quadrangulares.

As 10 faces laterais, que eram triângulos, viram hexágonos. Logo, temos 10 faces hexagonais.

Assim: 2 FP, 5 FQ e 10 FH.

GABARITO: A