COLÉGIO PEDRO II - CAMPUS SÃO CRISTÓVÃO III
3ª SÉRIE – MATEMÁTICA II – PROF. MARCOS

MAT II – SISTEMAS LINEARES

Equação linear É Toda equação da forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$,onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais que recebem o nome de *coeficientes das incógnitas* $x_1, x_2, \cdots x_n$ e *b* é um número real chamado *termo independente*.

OBS: Quando *b* = 0, a equação recebe o nome de *linear homogênea*.

Exemplos:

Equações Lineares
1) 3x – 2y + 4z = 7
2) x + y –3z - t = 0 (homogênea)
3) –2x + 4z = 3t – y + 4

Equações Não-Lineares
1) xy + 3z + t = 8
2) x² - 4y = 3t - 4
3) $\sqrt{x}$ - y + z = 7

Sistema Linear

Definição: Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de *m* equações e *n* incógnitas.

Solução do Sistema Linear
Chamamos de solução do sistema a n-upla de números reais ordenados $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ que é, simplesmente, solução de todas as equações do sistema.

Classificação

Sistema Possível e Determinado (S.P.D.): solução única.

Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I.): infinitas soluções.

Sistema Impossível (S.I.): sem solução.

Exemplos:

1) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Tem solução única: o par ordenado (3,5). Portanto o sistema é possível e determinado (SPD).

2) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

Tem infinitas soluções: algumas são dadas pelos pares ordenados: (0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), ... Portanto o <u>sistema é possível e indeterminado (SPI).</u>

3) $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x - y = 10 \end{cases}$

Não tem um par ordenado que satisfaça simultaneamente as equações. Portanto o <u>sistema é impossível (SI).</u>

<u>Sistemas e matrizes</u>

Podemos escrever o sistema anterior numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A \cdot X = B,$$

onde A é a matriz dos coeficientes (ou matriz incompleta), X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

Outra matriz que podemos associar ao sistema é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que é chamada matriz ampliada (ou completa) do sistema. Cada linha desta matriz é uma representação abreviada da equação correspondente do sistema.

<u>Exemplos:</u>

1)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 7x + 8y + 9z &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ 2x - y &= 1 \\ y - z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Exercícios</u>

1) Cíntia tem de pagar uma compra de R$ 35,00 e só dispõe de notas de R$ 1,00 e R$ 5,00. De quantos modos distintos ela poderá fazer o pagamento?

SOLUÇÃO:

Considere que ela tenha x moedas de 1 real e y notas de 5 reais. Logo:

x*1 real + 5*y reais = 35 reais ou seja,

x + 5y = 35.

Como temos uma equação com duas incógnitas, temos várias soluções, lembrando que o número de moedas e notas são inteiros e positivos(ou igual a zero caso não use moedas de 1 real ou notas de 5 reais)

Isolando y na equação temos, 5y = 35 – x , ou seja, y = (35 – x) / 5.
Vamos atribuir valores para x
Para x = 1, temos y = (35 – 1) / 5 = 34/ 5 = 6,8 (INCOMPATÍVEL)
Note que o numerador, 35 – x, tem que ser divisível por 5. Logo temos que substituir x por, 0, 5, 10, 15, etc
Assim:
Para x = 0, temos y = (35 – 0) /5 = 35 /5 = 7, ou seja, nenhuma moeda de 1 real e 7 notas de 5 reais.
Para x = 5, temos y = (35 – 5) /5 = 30 /5 = 6, ou seja, 5 moedas de 1 real e 6 notas de 5 reais.
Para x = 10, temos y = (35 – 10) /5 = 25 /5 = 5, ou seja, 10 moedas de 1 real e 5 notas de 5 reais.
Para x = 15, temos y = (35 – 15) /5 = 20 /5 = 4, ou seja, 15 moedas de 1 real e 4 notas de 5 reais.
Para x = 20, temos y = (35 – 20) /5 = 15 /5 = 3, ou seja, 20 moedas de 1 real e 3 notas de 5 reais.
Para x = 25, temos y = (35 – 25) /5 = 10 /5 = 2, ou seja, 25 moedas de 1 real e 2 notas de 5 reais.
Para x = 30, temos y = (35 – 30) /5 = 5 /5 = 1, ou seja, 30 moedas de 1 real e 1 nota de 5 reais.
Para x = 35, temos y = (35 – 35) /5 = 0 /5 = 0, ou seja, 35 moedas de 1 real e nenhuma nota de 5 reais.

Ou seja, 8 modos distintos de se fazer o pagamento. Pode-se chegar a essa conclusão observando que o número de modos possíveis é a quantidade de múltiplos de 5 existentes de zero a 35, ou seja, 8 valores. (0, 5, 10, ..., 35).

2) Verifique se o par (3, -2) é solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:
O par (3, - 2) significa que x = 3 e y = -2
Substituindo esses valores no sistema, temos:
3+(-2) = 1
2*3 + 3*(-2) = 6 – 6 = 0
Logo o par (3,-2) é solução do sitema

3) Verifique se a terna (2, 1, 3) é solução do sistema abaixo: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + 2z = -5 \end{cases}$

SOLUÇÃO
O terno ordenado (2, 1, 3) significa que x = 2 e y = 1 e z = 3.
Substituindo esses valores no sistema, temos:
2 + 1 – 3 = 0
2 – 1 + 3 = 4
- 2 + 1 + 2*3 =5, ou seja, diferente de -5 (não confere)
Logo, o terno (2,1,3) não é solução do sistema.

4) Represente os sistemas abaixo na forma matricial.

a)

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = -7 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

5) Escreva o sistema associado a representação matricial abaixo.

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

6) Seja o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} 9x + y = 18 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$$

A solução é dada pelo par ordenado (a,b). Determine o valor de a + b.

1ª SOLUÇÃO

Método da Adição:

Repetindo-se a primeira equação e multiplicando-se a segunda equação por -1, temos:

9x + y = 18

-3x – y = -12

Somando-se as duas equações, temos:

6x = 6, logo, x = 1

Substituindo x = 1 na equação 9x + y = 8, temos,

9*1 + y = 18, temos, 9 + y = 18, logo y =9

Logo, o par ordenado (1, 9) é solução do sistema.

Conjunto-Solução = {(1,9)}

2ª SOLUÇÃO

Isolando y na equação 9x + y = 18, temos y = 18 – 9x

Substituindo na segunda equação temos:

3x + 18 – 9x = 12

3x – 9x = 12 – 18

-6x = - 6

x = 1

Substituindo x = 1 na equação 9x + y = 8, temos,

9*1 + y = 18, temos, 9 + y = 18, logo y =9

Logo, o par ordenado (1, 9) é solução do sistema.
Conjunto-Solução = {(1,9)}

3ª SOLUÇÃO (Pergunte ao Ian)
CRAMER: solução por detereminantes

D= 9 1
3 1 = 9*1 – 1*3 = 9 – 3 = 6

Dx= 18 1
12 1 = 18*1 – 1*12 = 6

Dy= 9 18
3 12 = 9*12 – 3*18= 108 – 54 = 54

X = Dx/D = 6/6 = 1
Y = Dy/D = 54/6 = 9

Logo, o par ordenado (1, 9) é solução do sistema.
Conjunto-Solução = {(1,9)}

7) Discuta, em função de k, os sistemas abaixo:
a)
$$\begin{cases} 3x + ky = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = -1 \end{cases}$$

Sistemas escalonados
Consideremos um sistema linear no qual, em cada equação, existe pelo menos um coeficiente não nulo. Dizemos que o sistema está na forma escalonada se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplos:
1)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \\ -z = 5 \end{cases}$$
2)
$$\begin{cases} 4x - y + 5z = 3 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases}$$
3)

$$\begin{cases} 4x + y - z - t - w = 1 \\ z + t + 2w = 0 \\ 2x = -3 \end{cases}$$

Exercícios

8) Resolva e classifique os sistemas abaixo:

a)

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ 2x - 7y + 3z = -13 \\ 3x - 9y + z = -29 \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

Por escalonamento:

1ª equação x (-2) + 2ª equação; 1ª equação x (-3) + 3ª equação, temos:

x – 4y + z = - 10
y + z = 7
3y – 2z = 1

2ª equação x (-3) + 3ª equação

x – 4y + z = - 10
y + z = 7
-5z=-20

Da 3ª equação: z = 4

Da 2ª equação: y + 4 = 7 , então y = 3

Da 1ª equação: x- 12 + 3 = -10, então x = - 2

RESPOSTA: **a) Sistema Possível Determinado, S = {(-2,3,4)}**

b)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + 5z = 18 \\ 3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Por escalonamento:

1ª equação x (-2) + 2ª equação; 1ª equação x (-3) + 3ª equação, temos:

x + y + 2z = 6
- 3y + z = 6
- y – 7z = - 20

Invertendo-se a posição da 3ª e 2ª equação:

x + y + 2z = 6
y + 7z = 20
- 3y + z = 6

1ª equação x 3 + 2ª equação

x + y + 2z = 6
y + 7z = 20
22z=66

Da 3ª equação: z = 3

Da 2ª equação: y = -1

Da 1ª equação: x = 1

RESPOSTA: Sistema Possível Determinado. S = {(1, -1, 3)}

c)

$$\begin{cases} x + y + 3z = -5 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Por escalonamento:
1ª equação x (-3) + 2ª equação; 1ª equação x (-2) + 3ª equação, temos:
x + y + 3z = -5
-5y – 5z = 15
-5y – 5y = 11
15=11(?????)
RESPOSTA: O SISTEMA É IMPOSSÍVEL; S={   }

d)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Por escalonamento:
1ª equação x (-2) + 2ª equação; 1ª equação x (-1) + 3ª equação, temos:
x + y – z = 1
y + 4z = 1
y + 4z = 1
2ª equação x (-1) + 3ª equação
x + y – z = 1
y + 4z = 1
0y + 0z =0
Da segunda equação temos que y= 1 – 4z
Substituindo na primeira equação, temos:
x + 1 – 4z + z = 1, logo x = 3z
Resposta: Sistema possível Indeterminado
S={(5z, 1-4z,z), z ∈IR},

<u>Sistemas homogêneos</u>

Dizemos que um sistema linear é homogêneo quando o termo independente de cada uma de suas equações é igual a zero, isto é, quando todas as suas equações são homogêneas.

<u>Exemplos:</u>

1)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Notemos que todo sistema homogêneo de n incógnitas admite a n-upla (0, 0, 0, ..., 0) como solução, pois essa seqüência ordenada satisfaz todas as equações do sistema. Essa solução é chamada solução trivial (ou nula).

Um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução trivial. Se o sistema só possui a solução trivial, ele é SPD. Havendo outras soluções, além da trivial, o sistema é SPI. Essas soluções recebem o nome de não triviais.

<u>Exercícios</u>

9) Resolva e classifique os sistemas abaixo:

a)

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

10) Calcular o valor de m para que o sistema abaixo tenha somente a solução trivial.

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + mz = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

<u>Exercícios de vestibular</u>

1) (UERJ) Para a realização de um baile, foi veiculada a propaganda no cartaz. Após a realização do baile, constatou-se que 480 pessoas pagaram ingressos, totalizando uma arrecadação de R$3.380,00. O número de damas e de cavalheiros que pagaram ingresso nesse baile, respectivamente, foi:

a) 160 e 200 b) 250 e 230 c) 200 e 300 d) 230 e 250

SOLUÇÃO:
Considere:
x damas pagam 6 reais: 6x reais
y cavalheiros pagam 8 reais: 8y reais
Logo:
6x + 8y = 3380
x + y = 480
Multiplicando-se a segunda equação por -6:
6x + 8y = 3380
-6x -6y = - 2880
Somando-se as duas equações temos:
2y=500, então, y= 250 cavalheiros
Como x + y = 480, temos x + 250 = 480, logo x = 230 damas
Resposta certa: letra D

2) (UERJ) Jorge quer distribuir entre seus filhos os ingressos ganhos para um show. Se cada um de seus filhos ganhar 4 ingressos, sobrarão 5 ingressos; se cada um ganhar 6 ingressos, ficarão faltando 5 ingressos.
Podemos concluir que Jorge ganhou o número total de ingressos correspondente a:
a) 15 b) 25 c) 29 d) 34
SOLUÇÃO:
Considere x filhos e y ingressos:
Se cada um de seus filhos ganhar 4 ingressos, sobrarão 5 ingressos, então: $y = 4x + 5$
Se cada um ganhar 6 ingressos, ficarão faltando 5 ingressos, então $y = 6x – 5$
Igualando-se as duas equações temos:
$6x – 5 = 4x + 5$
$6x – 4x = 5 + 5$
$2x = 10$
$x= 5$ filhos
Substituindo o valor de x na primeira equação:
$Y = 4 * 5 + 5 = 25$ ingressos.
Resposta certa: letra B

3) (UERJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7
SOLUÇÃO:
Considere:
x mesas de 4 pessoas: 4x pessoas
y mesas de 2 pessoas: 2y pessoas
Logo:
$4x + 2y = 38$
$x + y = 12$
Multiplicando-se a segunda equação por -2
$4x + 2y = 38$
$-2x – 2y = -24$
Somando-se as duas equações:
$2x = 14$, então $x = 7$
Como $x + y = 12$, temos $7 + y = 12$, então $y = 5$.
Resposta certa: letra B

4) (UERJ) Um conjunto de 100 copos descartáveis, dispostos em um suporte, será usado em uma festa.

Considere, agora, as seguintes informações:
– sempre se tenta retirar apenas 1 copo de cada vez desse suporte;
– quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 2 saem juntos, 1 deles é desperdiçado;
– quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 3 saem juntos, 2 deles são desperdiçados;
– quando se tenta retirar 1 copo, nunca saem 4 ou mais de 4 juntos;
– foram retirados todos os copos desse suporte, havendo desperdício de 35% deles.

– a razão entre o número de vezes em que foram retirados exatamente 2 copos juntos e o número de vezes em que foram retirados exatamente 3 juntos foi de $\frac{3}{2}$.

O número de vezes em que apenas 1 copo foi retirado do suporte é igual a:

a) 30
b) 35
c) 40
d) 45

SOLUÇÃO:

Quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 2 saem juntos, 1 deles é desperdiçado. Logo, se forem x retiradas de, exatamente, 2 copos juntos **são desperdiçados x copos.**

Quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 3 saem juntos, 2 deles são desperdiçados. Logo, se forem y retiradas de, exatamente, 3 copos juntos **são desperdiçados 2y copos.**

Como foram retirados todos os copos desse suporte, havendo desperdício de 35% deles, temos que x + 2y = 35% de 100, ou seja, **x + 2y = 35**

Como a razão entre o número de vezes em que foram retirados exatamente 2 copos juntos e o número de vezes em que foram retirados exatamente 3 juntos foi de $\frac{3}{2}$, temos que **x/y=3/2, ou seja, x=(3/2)y**

Logo, o sistema é formado pelas equações

x + 2y = 35

x=(3/2)y

Substituindo o valor de x da segunda equação na primeira equação;

(3/2)y + 2y = 35

Multiplicando-se toda a equação por 2, temos:

3y + 4y = 70

7y=70

y=10

como x = (3/2)y, então x =(3/2)*10= 30/2= 15

Logo, temos:

15 retiradas de exatamente 2 copos juntos = 30 copos retirados

10 retiradas de exatamente 3 copos juntos = 30 copos retirados

Logo, o número de vezes em que apenas 1 copo foi retirado do suporte é igual a:

100 – (30 + 30) = 100 – 60 = 40 copos

Resposta certa: letra C

5) (UERJ) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00.

Veja na tabela os preços da água por embalagem:

VOLUME DA EMBALAGEM (L)	PREÇO (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a ***n***. O valor de ***n*** é um divisor de:

a) 32
b) 65
c) 77
d) 81

SOLUÇÃO:

Considere:

x embalagens de 20 litros ao custo de 10 reais a unidade: 20x litros custam 10x reais

y embalagens de 10 litros ao custo de 6 reais a unidade: 10y litros custam 6y reais

n embalagens de 2 litros ao custo de 3 reais a unidade: 2n litros custam 3n reais

Total: 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00.
Logo:
20x + 10y + 2n = 94
10x + 6y + 3n = 65
Se o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, temos **y = 2x.** Substituindo o valor de y nas duas primeiras equações:
20x + 10*2x + 2n = 94 , logo 20x + 20x + 2n = 94, então 40x + 2n = 94. Dividindo-se os dois membros da equação por 2, temos: **20x + n = 47**
10x + 6*2x + 3n = 65, logo, 10x + 12x + 3n = 65, então, **22x + 3n = 65**
O sistema é formado pelas seguintes equações:
20x + n = 47
22x + 3n = 65
Multiplicando-se a primeira equação por -3, temos:
-60x – 3n = -141
22x + 3n = 65
Somando-se as duas equações:
-38x = - 76
x = 2
substituindo em **20x + n = 47, temos 20*2 + n = 47; 40 + n = 47, logo, n = 7.**
Então, o valor de ***n*** é um divisor de 77**, RESPOSTA CERTA LETRA C**

Respostas:
1) 8; 2) Sim; 3) Não;
4) a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$
5) $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$**, 6) 10; 7) a) k $\neq$ -3, SPD e k = -3, SI; b) k $\neq \pm$1, SPD, k = 1, SI e k = -1, SPI; 8) a) SPD, S = {(-2,3,4); b) SPD, S = {(1, -1, 3)}; c) SI; d) SPI, S={(5z, 1-4z,z), z $\in$IR}, 9) a) SPD, S={(0,0)}; b) SPI, S={(-z, z, z), z $\in$IR; 10) m $\neq$ 1**

Exercícios de vestibular
1) D; 2) B; 3) B; 4) C; 5) C