GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DO PONTO E DA RETA

Falando de uma forma bem simplificada, em geometria analítica vamos estudar a geometria euclidiana, que todos nós conhecemos com pontos, retas e figuras geométricas como triângulos, quadriláteros, circunferências e etc, usando o plano cartesiano. Para quem não lembra, o plano cartesiano é um sistema de coordenadas formado por um par de retas perpendiculares, chamadas de eixos cartesianos OX e OY com a mesma origem O. São aqueles mesmos eixos perpendiculares (eixo dos x e eixo dos y), que estudamos juntos em funções na primeira série do ensino médio.

Esses eixos determinam um único plano, dessa forma é possível determinar a localização no sistema de coordenadas de todo os pontos e, consequentemente, de qualquer figura geométrica formada por esses pontos que estejam nesse plano.

Assim é possível representar pontos e figuras geométricas utilizando somente suas coordenadas, sem a necessidade de construir um desenho dos mesmos, bastando somente expressar suas coordenadas. Como um exemplo, vamos citar a reta que passa pelos pontos (-1,0) e (0, 1). Aprendemos na primeira série que esta reta representa a função afim $y = x + 1$ (para $x = -1$, $y = 0$ e para $x = 0$, $y = 1$). Assim, através desta equação, estamos expressando todos os pontos desta reta.

ESTUDO DO PONTO

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos, A de coordenadas (XA,YA) e B de coordenadas (XB,YB), do plano cartesiano, a distância entre os pontos A e B, representada por dAB, é definida pelo comprimento do segmento de reta que liga os pontos A e B. Demonstra-se que a distância entre A e B é dada por

$$dAB = \text{Raiz quadrada de } ((XB-XA)^2+ (YB- YA)^2),$$

Exercício resolvido

1. Calcule a distância entre os pontos P = (2,8) e Q = (6, 5).

Resolução

$dPQ=$ Raiz quadrada de$((xP-xQ)^2+(yP-yQ)^2)$

$dPQ=$ Raiz quadrada de$((6-2)^2+(5-8)^2)$

$dPQ=$ Raiz quadrada de$(4^2+(-3)^2)$

$dPQ=$ Raiz quadrada de$(16+9)$

$dPQ=$Raiz quadrada de 25

$dPQ=5$

Exercícios propostos

1) Calcule a distância entre os pontos A e B abaixo:

a) A(3, 5) e B(0, 1)

b) A(-2, 5) e B(4, -3)

c) A(1, 3) e B(-2, 1)

2) Uma formiga está sobre uma mesa e o ponto inicial que ela se encontra é o ponto P(2,3). Ela caminha em linha reta e pára no ponto Q(-6,-3). Calcular a distância que a formiga andou.

Ponto Médio

Considere o segmento de reta AB determinados pelos pontos A (XA, YA) e B(XB, YB). Seja M o ponto médio do segmento AB, então M = (A + B) / 2.

Obs. Para somar dois pares ordenados A e B basta somar o X do A com o X do B e depois o Y do A com o Y do B, ou seja, (XA, YA) + (XB, YB) = (XA + XB, YA + YB).

Exercício resolvido

1. Encontre o ponto médio do segmento AB, em que A (2, 6) e B (6, -10).

Solução.

M = [A + B] / 2.

M = [(2, 6) + (6, -10)] / 2 = (8, - 4) / 2 = (4, -2).

Exercícios propostos

Observe que o gabarito dos exercícios propostos está no final do arquivo.

3) Encontre o ponto médio dos pontos A e B abaixo:

a) A (6, -4) e B (-4, 8)

b) A (4, 3) e B (-4, 1)

c) A (2, -5) e B (1, 2)

4) Calcule o comprimento da mediana AM do triângulo ABC cujos vértices são os pontos A (0, 0), B (3, 7) e C (5, -1).

Baricentro do triângulo

Da geometria plana, sabemos que o baricentro G de um triângulo é o ponto de encontro das três medianas.

Dado um triângulo ABC em que A(XA, YA); B(XB, YA) e C(XC, YC), o baricentro G desse triângulo é dado por:

$$G = (A + B + C) / 3.$$

Exercício resolvido

1. Seja o triângulo ABC cujas coordenadas são dadas por:

A (0,1), B (6, -2) e C (4,3). Determinar as coordenadas do baricentro G.

Resolução:

G= ((xa +xb+ xc)/3; (ya+yb+yc)/3)

G= ((0+6+4)/3; (1+(-2)+3)/3)

G= (10/3; 2/3)

Exercícios propostos

5) Encontre o baricentro do triângulo de vértices A (1, 2), B (-2, 4) e C (4, -3).

6) Dois vértices de um triângulo ABC são A (0,0) e B (9,0). O baricentro é dado pelo ponto (6,1). Ache o terceiro vértice do triângulo.

ESTUDO DA RETA

Estudamos, na primeira série, a função afim que é representada pela lei de formação y = ax + b (em geometria analítica, é mais comum utilizar a expressão y = mx + h). Concluímos também que o gráfico dessa função, de domínio real, é representado por uma reta. Vamos usar esse fato, excepcionalmente para estudar reta em geometria analítica até que tenhamos o retorno das aulas presenciais.

Considere a reta y = 2x + 3. Vamos encontrar alguns pontos dessa reta, de maneira análoga que fazíamos no estudo de funções.

Usaremos * para representar a operação de multiplicação entre números reais.

Para x = -1, y = 2*(-1) + 3 ou seja y = 1. Temos o ponto (-1, 1).

Para x = 0, y = 2*0 + 3 ou seja y = 3. Temos o ponto (0, 3).

Para x = 1, y = 2*1 + 3 ou seja y = 5. Temos o ponto (1, 5).

Para x = 2, y = 2*2+ 3 ou seja y = 7. Temos o ponto (2, 7).

Para x = 3, y = 2*3 + 3 ou seja y = 9. Temos o ponto (3, 9).

Note que, nessa "reta", para um aumento de uma unidade do valor de x, há um acréscimo de duas unidades no valor de y. Chamamos esse acréscimo de "taxa de variação" e ele é exatamente o coeficiente de x, representado pela letra m, na equação da reta y = mx + h e é calculado da seguinte maneira:

Dados dois pontos (x1,y1) e (x2,y2) de uma reta de equação y= mx + h, a taxa de variação m é dada por m = (y2-y1)/(x2-x1), ou seja m é igual a diferença entre os valores de y sobre a diferença entre o valores de x. Esse valor é chamado de taxa de variação da função afim que representa a reta. Em geometria analítica, é chamado de coeficiente angular da reta (no retorno presencial mostraremos que esse valor de m é chamado de coeficiente angular porque representa a tangente de um ângulo que a reta faz com o eixo dos x, no plano cartesiano).

Assim, no exemplo anterior se tomarmos, por exemplo, os pontos (1, 5) e (2, 7), o coeficiente angular m é calculado da seguinte maneira:

$m = (7-5) / (2-1) = 2 / 1 = 2 / 1 = 2$.

Isso vale para quaisquer dois pontos. Se tomarmos, por exemplo, (-1, 1) e (3, 9) temos

$m = (9-1) /(3-(-1)) = 8 / 4 = 2$.

Obs. O valor de h na equação $y = mx + h$ é chamado de coeficiente linear.

Exercícios resolvidos:

1. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos A(2, 7) e B(4, 13).

Resolução

A equação da reta é dada pela expressão $y = mx + h$, em que m é calculado da seguinte maneira:

$m = (13 - 7) / (4 - 2) = 6 / 2 = 3$.

Substituindo $m = 3$ na equação da reta temos $y = 3x + h$.

Para acharmos o valor de h basta escolher um ponto e substituir os valores de x e y na equação $y = 3x + h$.

Vamos tomar o ponto A(2, 7). As coordenadas desse ponto indicam que $x = 2$; $y = 7$. Substituindo x e y por 2 e 7, respectivamente, na equação $y = 3x + h$ temos:

$7 = 3*2 + h$

$7 = 6 + h$

$7-6 = h$

$h = 1$.

Assim a equação da reta é $y = 3x + 1$.

Observação 1. Se quisermos fazer uma verificação, basta substituirmos os valores de x e y dos pontos dados na equação, ou seja:

Ponto A(2, 7): para $x = 2$ então $y = 3*2 +1 = 7$. (O.K)

Ponto B(4, 13): para $x = 4$ então $y = 3*4 +1 = 13$. (O.K)

Observação 2. Essa forma de apresentação da equação da reta $y = mx + h$ é chamada de equação reduzida da reta. Se passarmos todos os termos para um mesmo membro da igualdade, teremos a equação geral da reta. Assim, no exercício anterior, temos a equação reduzida $y = 3x + 1$.

Passando o valor de y para o segundo membro temos $0 = 3x-y + 1$ ou $3x-y + 1 = 0$.

Logo, a equação geral da reta é $3x-y + 1 = 0$.

2. Determine as equações reduzida e geral da reta que contém os pontos A(-1, 5) e B(1, -1).

Resolução

A equação reduzida da reta é da forma $y = mx + h$.

Como m é igual a variação de y sobre a variação de x, temos:

$m = (-1-5)/(1-(-1))$

$m = -6/2$

$m= -3$.

Substituindo o ponto A(-1, 5), ou seja, fazendo $x = -1$ e $y = 5$ na equaçãoy $= -3x + h$, temos:

$5 = -3*(-1) + h$

$5 = 3 + h$

$h = 2$.

Logo, $y = -3x + 2$ é a equação reduzida.

Passando-se todos os termos para o primeiro membro da igualdade, temos, a equação geral da reta:

$3x + y - 2 = 0$

Exercícios propostos

7) Encontrar a equação geral da reta que passa pelos pontos (2,1) e (3,-1).

8) Encontrar a equação geral da reta que passa pelos pontos (0,-1) e (1,0).

Exercícios propostos

9) Encontrar a equação reduzida e a equação geral da reta que passa pelos pontos abaixo:

a) A (0, 0) e B (1, 3)

b) B (1,3) e C (4, 0)

c) P (4, 6) e B (1, 3)

Respostas dos exercícios propostos:

1) a) 5; b) 10; c) Raiz de13);

2) 10;

3) a) M (1, 2), b) M (0, 2), c) M(3/2, -3/2);

4) AM = 5;

5) G (1, 1);

6) C (9, 3

7) $2x + y - 5 = 0$;

8) $x - y - 1 = 0$;

9) a) $y = 3x$ e $3x - y = 0$; b) $y = -x + 4$ e $x + y - 4 = 0$; c) $y = x + 2$ e $x - y + 2 = 0$