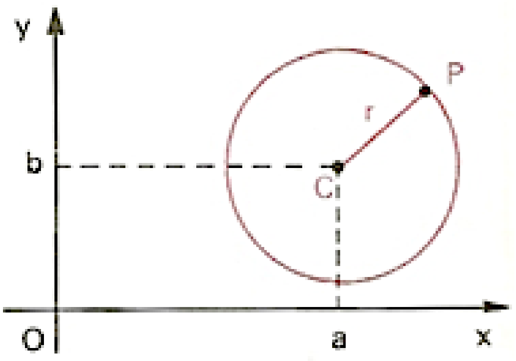
DEFINIÇÃO: Circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos do plano, cuja distância a um ponto fixo é constante. Esse ponto fixo é chamado de centro, e essa distância é chamada de raio.

Equação da Circunferência

Vamos considerar uma circunferência de centro C de coordenadas (a,b). Qualquer que seja o ponto P de coordenadas (x,y), a distância do ponto P(x,y) ao ponto C(a,b) é igual ao raio R, ou seja, $d_{PC} = R$.



A distância entre dois pontos P(x,y) e C(a,b) é dada pela fórmula $d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Logo, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$

Elevando-se os dois membros da igualdade ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

chamada equação reduzida da circunferência.

Exemplo: determine a equação reduzida da circunferência de centro C(2,-3) e raio 5.

Solução:

Temos a=2; b=-3 e R=5. Assim:

$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 5^2$, **logo**

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Obs. A equação da circunferência de centro na origem e raio R é dada por: $x^2 + y^2 = R^2$ **(por que?)**
Como a origem é o ponto (0,0) a equação da circunferência é dada por $(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2$.
Exemplo: a equação da circunferência de centro na origem e raio 13 é dada pela fórmula $x^2 + y^2 = 169$.

Equação Geral da Circunferência

Utilizando os produtos notáveis para desenvolver a equação reduzida da circunferência, obtemos a equação geral. Assim:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2.$$

Agrupando-se segundo a ordem decrescente das potências de x e y.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0,$$ **ou seja,**
$$x^2 + y^2 + (-2a)x + (-2b)y + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Fazendo, $-2a = m$, $-2b = n$ **e** $a^2 + b^2 - R^2 = k$ **, temos a equação geral:**

$$x^2 + y^2 + mx + ny + k = 0$$

No exemplo anterior, desenvolvendo a equação reduzida $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$, **temos:**

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25,$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 - 25 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Há, basicamente, dos tipos de exercícios envolvendo circunferência no R^2**: são dados, de forma direta ou indireta, as coordenadas do centro e o valor do raio e pede-se a**

equação da circunferência ou é dada a equação da circunferência e pede-se o centro e o raio.

Cálculo do centro e do raio dada a equação reduzida
Vamos mostrar o procedimento através de um exemplo: Determine o centro e o raio da circunferência de equação
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$**.**
Solução:
Comparando a equação dada com a equação reduzida da circunferência temos:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$$

-a=-2, ou seja a=2
-b=3, ou seja, b=-3
R^2=25, ou seja, R=5.
Logo temos que centro C(2,-3) e raio R=5.
(obs. O procedimento acima não precisa desses cálculos. Para achar o centro bastar trocar o sinal dos números que estão dentro dos parênteses e para achar o raio basta tirar a raiz quadrada do termo independente).
Outros exemplos:
1.$(x+1)^2+(y-7)^2=169$**, tem centro C(-1,7) e raio R=13.**
2.$(x-13)^2+(y+4)^2=81$**, tem centro C(13.-4) e raio R=9.**
3. $(x-5)^2+(y-9)^2=11$**, tem centro C(5,9) e raio R=**$\sqrt{11}$

Cálculo do centro C(a,b) e do raio R quando é dada a equação geral:
Comparando as duas equações a seguir:

$$x^2+y^2+(-2a)x+(-2b)y+a^2+b^2-R^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+mx+ny+k=0,$$ temos:

Cálculo dos valores de a e b do centro C(a,b)

$-2a = m \Rightarrow a = -\frac{m}{2}$ (na prática, para achar o valor de a, troca-se o sinal do coeficiente de x e divide-se por 2).

$-2b = n \Rightarrow b = -\frac{n}{2}$ (na prática, para achar o valor de b, troca-se o sinal do coeficiente de y e divide-se por 2).

Cálculo do valor do raio R: basta substituir os valores encontrados de a e b na fórmula a seguir.

$a^2 + b^2 - R^2 = k$.

Exemplo: determine o centro e o raio da circunferência representada pela equação:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Cálculo do centro C(a,b).

$a = -\frac{m}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$ (troca-se o sinal do coeficiente de x e divide-se por 2).

$b = -\frac{n}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ (troca-se o sinal do coeficiente de y e divide-se por 2).

Logo, C(2,-3).

Cálculo do raio: basta substituir os valores de a e b na equação $a^2 + b^2 - R^2 = k$. Assim:

$2^2 + (-3)^2 - R^2 = -12$

$4 + 9 - R^2 = -12$

$13 - R^2 = -12$

$13 + 12 = R^2$

$R^2 = 25$

$R = 5$

Outros exemplos:

Calcule o centro e o raio de cada equação a seguir:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$

Centro C(a,b)

a=1(troca o sinal do coeficiente de x e divide por 2).

b=-4(troca o sinal do coeficiente de y e divide por 2)

Logo, C(1,-4).
Raio R:
$a^2+b^2-R^2=8$
$1^2+(-4)^2-R^2=8$
$1+16-8=R^2$
$R^2=9$
$R=3$.

b) $x^2+y^2+10x=0$
Completando-se os termos que faltam:
$x^2+y^2+10x+0y+0=0$
Cálculo de centro C(a,b)
a=-5 (troca o sinal do coeficiente de x e divide por 2).
b=0 (troca o sinal do coeficiente de y e divide por 2).
Logo C(-5,0)
Raio R:
$a^2+b^2-R^2=0$
$(-5)^2+0^2-R^2=0$
$25-R^2=0$
$R^2=25$
$R=5$.

c) c) $x^2+y^2=121$
centro na origem, ou seja, C(0,0) e raio R = $\sqrt{121}$ **= 11**