MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DECEx - DEPA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)

PROCESSO SELETIVO AO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO 2024/2025
EXAME INTELECTUAL: 20 DE OUTUBRO DE 2024

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. Considere os números **C**, **M**, **R** e **J**, tal que:

$$C = \sqrt[3]{\frac{2^{28}+2^{30}}{10}};\qquad M = \frac{8^{0,666...}-16^{-1/2}}{(2,666...)^{-1}};\qquad R = \frac{4^{-2}+4^{\frac{1}{2}}.4^{-3}}{4^{-3}};\qquad J = \left(\frac{2^{\sqrt{27}}.8^{\sqrt{75}}}{16^{\sqrt{48}}}\right)^{\sqrt{3}/2}$$

A soma **C + M + R + J** é igual a:

(A) 549 (B) 548 (C) 546 (D) 538 **(E)** 536

Solução. Aplicando as propriedades das potências e desenvolvendo cada expressão, temos:

$$C = \sqrt[3]{\frac{2^{28}+2^{30}}{10}} = \sqrt[3]{\frac{2.2^{27}+2^{3}.2^{27}}{10}} = \sqrt[3]{\frac{2^{27}.(2+2^{3})}{10}} = \sqrt[3]{\frac{2^{27}.(10)}{10}} = \sqrt[3]{2^{27}} = 2^9 = 512.$$

$$M = \frac{8^{0,666...}-16^{-1/2}}{(2,666...)^{-1}} = \frac{8^{6/9}-\left(\frac{1}{16}\right)^{1/2}}{\left(\frac{26-2}{9}\right)^{-1}} = \frac{(2^3)^{2/3}-\sqrt{\frac{1}{16}}}{\frac{9}{24}} = \frac{2^2-\frac{1}{4}}{\frac{9}{24}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{9}{24}} = \frac{15}{4}.\frac{24}{9} = \frac{15}{1}.\frac{6}{9} = \frac{15}{1}.\frac{2}{3} = 10.$$

$$R = \frac{4^{-2}+4^{\frac{1}{2}}.4^{-3}}{4^{-3}} = \frac{\frac{1}{16}+\sqrt{4}.\frac{1}{4^3}}{\frac{1}{4^3}} = \frac{\frac{1}{16}+2.\frac{1}{64}}{\frac{1}{64}} = \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{1}{64}} = \frac{3}{32}.\frac{64}{1} = 6.$$

$$J = \left(\frac{2^{\sqrt{27}}.8^{\sqrt{75}}}{16^{\sqrt{48}}}\right)^{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{2^{3\sqrt{3}}.(2^3)^{5\sqrt{3}}}{(2^4)^{4\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{2^{3.(3)}.(2^3)^{5.(3)}}{(2^4)^{4.(3)}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2^9.2^{45}}{2^{48}}\right)^{1/2} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8.$$

A soma pedida é: 512 + 10 + 6 + 8 = 536.

Questão 2. Considere o número real positivo x, tal que $x = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}}$. É correto afirmar que x é um número:

(A) primo (B) par maior que 10 **(C)** quadrado perfeito

(D) compreendido entre 5 e 9 (D) compreendido entre 9 e 13

Solução. Elevando x ao quadrado e desenvolvendo, temos:

i) $x = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}} \Rightarrow x^2 = 12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}} = 12 + x.$

ii) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4).(x+3) = 0 \Rightarrow x = 4$ e $x' = -3$. Como x é positivo, x = 4. Um quadrado perfeito.

Questão 3. Classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada afirmativa abaixo. **(OBS: III modificada)**

I) Sendo a ϵ IR, temos $\frac{x^2-a^2}{x-a} = x - a$, ∀ x ϵ IR.

II) Dado que $\sqrt[3]{4} \cong 1{,}6$, o número real positivo $\sqrt{1+\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{16}}$ está compreendido entre 2,5 e 3.

III) Se $\alpha = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2}}$, então α é um número racional. **(original anulada era $\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2}}$)**

Tem-se a sequência correta em:

(A) V – F – V (B) F – V – V (C) V – F – V **(D)** F – V – F (E) V – V – V

Solução. Analisando cada afirmativa, temos:

I) Falsa. $\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x-a).(x+a)}{(x-a)}$ **= x + a, com x ≠ a.**

II) Verdadeira. $\sqrt{1+\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{16}} = \sqrt{1+\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{8}+(\sqrt[3]{4})^2} = \sqrt{1+(1,6).2+(1,6)^2} = \sqrt{1+3,2+2,56} =$

$= \sqrt{1+3,2+2,56} = \sqrt{6,76}$ **= 2,6.**

III) Falsa. $\propto = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2.2+2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{4+2\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{2.2+2.\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{4+\sqrt{4.4+4.2\sqrt{2}}} = \sqrt{4+\sqrt{16+8\sqrt{2}}}$ **que é irracional.**

Questão 4. Sendo x = $\sqrt[12]{729}$, y = $\sqrt[18]{512}$ e S = $\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}).\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{(x^2-y^2)}$, então S é equivalente a:

(A) $\sqrt{7-\sqrt{40}}$ (B) $\sqrt{13-\sqrt{120}}$ (C) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$ (D) $\sqrt{7-\sqrt{48}}$ **(E)** $\sqrt{5-\sqrt{24}}$

Solução. Utilizando as fatorações 729 = 3^6, 512 = 2^9 e (a^3 – b^3) = (a – b).(a^2 + a.b + b^2), podemos fazer analogia em S considerando a = $\sqrt[3]{x}$ e b = $\sqrt[3]{y}$. Temos:

i) S = $\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}).\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{(x^2-y^2)} = \frac{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}{(x+y).(x-y)} = \frac{(x-y)}{(x+y).(x-y)} = \frac{1}{x+y}$.

ii) x = $\sqrt[12]{3^6} = \sqrt{3}$ **e y =** $\sqrt[18]{2^9} = \sqrt{2}$**.**

iii) S = $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1.(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$**.**

iv) Observando as opções e as condições de transformações de radicais duplos, somente as letras (C), (D) e (E) satisfazem, pois, são quadrados perfeitos 6^2 – 20 = 16; 7^2 – 48 = 1 e 5^2 – 24 = 1.

Para que corresponda a S, temos somente a letra (E): S = $\sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$**.**

Questão 5. O professor Almir, professor do 9º ano do Colégio Militar do Rio de Janeiro, escreveu no quadro da sala de aula para seus alunos o seguinte desafio:

> Considere S = $\frac{(2024^2-2030).(2024^2+4048-3).(2025)}{(2021).(2023).(2026).(2027)}$. Determine o valor de S.

Sobre o valor encontrado de S, é correto afirmar que se trata de um número:

(A) múltiplo de 4 (B) múltiplo de 7 (C) múltiplo de 12 (D) múltiplo de 13 **(E)** múltiplo de 81

Solução. Escrevendo a expressão em função de 2024, temos:

i) S = $\frac{(2024^2-2024-6).(2024^2+2.(2024)-3).(2024+1)}{(2024-3).(2024-1).(2024+2).(2024+3)}$.

ii) Substituindo 2024 por x, temos: S = $\frac{(x^2-x-6).(x^2+2.x-3).(x+1)}{(x-3).(x-1).(x+2).(x+3)}$.

iii) Fatorando e simplificando, vem: S = $\frac{(x-3).(x+2).(x+3).(x-1).(x+1)}{(x-3).(x-1).(x+2).(x+3)} = \frac{(x+1)}{1} =$ **2024 + 1 = 2025.**

Como 2025 = 81 x 25, S é múltiplo de 81.

Questão 6. Isadora, aluna do CMRJ, deseja comprar um celular novo. Então, ela pensou o seguinte:

"***Se eu achar uma loja que me oferecesse um desconto de 50%, ainda me faltariam R$ 500,00. Se eu aplicasse a quantia que eu tenho a juros simples de 15% ao mês, eu juntaria, em 10 meses, o montante correspondente ao valor do celular sem desconto***".

Assim, o valor do celular e da quantia que Isadora possui somam, em Reais,

(A) 7 000,00 (B) 6 000,00 (C) 5 000,00 (D) 4 000,00 (E) 3 000,00

Solução. Organizando as informações, temos:

i) Preço do celular sem desconto = P; ii) Preço do celular com desconto = 0,5.P

iii) Quantia que Isadora possui: Q. iv) Quantia final de Isadora após a aplicação; Q' = Q + Q.(0,15).(10).

De acordo com as informações temos as equações: $\begin{cases} Q + 500 = 0,5P \\ 2,5Q = P \end{cases}$. **Substituindo o valor de P da 2ª equação na 1ª equação, temos:**

Q + 500 = 0,5.(2,5Q) => 1,25Q – Q = 500 => 0,25Q = 500 => Q = $\frac{500}{0,25}$ **= R$ 2 000,00.**

O valor do celular é P = 2,5.(2.000) = R$ 5 000,00.

A soma dos valores pedidos é, portanto, 5 000 + 2 000 = R$ 7 000,00.

Questão 7. Toda equação que apresenta forma geral $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ é chamada de equação biquadrada, onde **a, b** e **c** podem assumir qualquer valor real, desde que **a** seja diferente de zero.

Se tomarmos **a = 1** e se tivermos uma equação biquadrada com duas raízes reais iguais a $\sqrt{3}$ e 4, o valor da soma **b + c** é igual a:

(A) 30 **(B)** 29 (C) 28 (D) 27 (E) 26

Solução. Se a equação é biquadrada, então $(\sqrt{3})^2 = 3$ **e** $4^2 = 16$ **são as raízes de** $y^2 + by + c = 0$**, onde** $y = x^2$**.**

Dessa forma (y – 3).(y – 16) = 0 => $y^2 - 19y + 48 = 0$ **é a equação em y.**

Como b = – 19 e c = 48, b + c = – 19 + 48 = 29.

Questão 8. A soma das raízes da equação $\sqrt{\frac{x^2+18}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+18}} = \frac{8}{3}$ é um número:

(A) primo **(B)** múltiplo de 3 (C) múltiplo de 7 (D) múltiplo de 5 (E) múltiplo de 11.

Solução. Representanto $\sqrt{\frac{x^2+18}{x}} = y$**, temos:**

i) $\sqrt{\frac{x^2+18}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+18}} = \frac{8}{3} \Rightarrow y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3} \Rightarrow 3y^2 - 3 = 8y \Rightarrow 3y^2 - 8y - 3 = 0.$

ii) $y = \frac{8 \pm \sqrt{64-4.(3).(-3)}}{2.(3)} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{8+10}{6} = 3 \\ y' = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

iii) y é positivo, pois representa umaraiz quadrada. Logo, $\sqrt{\frac{x^2+18}{x}} = 3 \Rightarrow \frac{x^2+18}{x} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$x^2 - 9x + 18 = 0$ => (x – 3).(x – 6) = 0 => x = 3 e x' = 6. A soma será 3 + 6 = 9. Múltiplo de 3.**

Questão 9. Sejam **m** e **n** raízes não nulas da equação do segundo grau $x^2 + x - 3 = 0$, o valor de $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4}$ é igual a:

(A) $\frac{11}{81}$ (B) $\frac{21}{81}$ (C) $\frac{25}{81}$ **(D)** $\frac{31}{81}$ (E) $\frac{35}{81}$

Solução. O coeficiente de x^2 é igua a 1. Dessa forma, soma das raízes é m + n = – 1 e o produto é m.n = – 3.

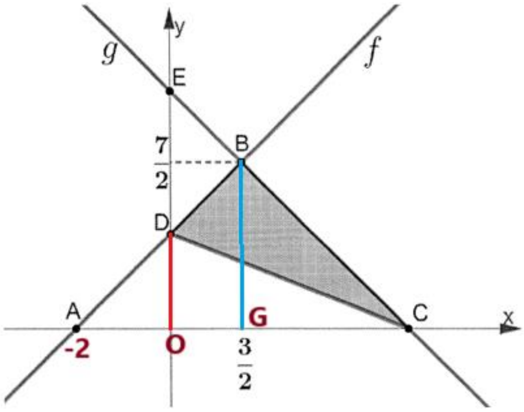
Desenvolvendo a soma das frações apresentadas e utilizando produtos notáveis, temos:

i) m² + n² = (m + n)² - 2.(m.n) = (– 1)² – 2. (– 3) = 1 + 6 = 7;

ii) $m^4 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 - 2.(m^2.n^2) = [7]^2 - 2.(-3)^2 = 49 - 2.(9) = 49 - 18 = 31.$

ii) $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4} = \frac{m^4+n^4}{m^4.n^4} = \frac{31}{(m.n)^4} = \frac{31}{(-3)^4} = \frac{31}{81}.$

Questão 10. Considere as funções f e g, representadas no gráfico abaixo.



Dados os pontos A(– 2, 0), B$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e E(0, 5), a área do triângulo DBC, em unidades de área, é igual a:

(A) 3,0 (B) 4,74 **(C)** 5,25 (D) 8,50 (E) 12,25

Solução. Os triângulos AOD e ABG são semelhantes. Encontrando DO, temos:

i) $\frac{DO}{7/2} = \frac{0-(-2)}{3/2-(-2)} => \frac{DO}{(7/2)} = \frac{2}{(7/2)}$ **=> DO = 2. Essa medida é a altura do triângulo ADC.**

ii) Os triângulos OEC e CBG são semelhantes. Encontrando CO, temos:

$\frac{CO}{CO-3/2} = \frac{5}{7/2} => \frac{7.CO}{2} = 5CO - \frac{15}{2}$ **=> 10CO – 7CO = 15 => 3CO = 15 => CO = 5. Logo, AC = 7.**

A área pedida é a diferença entre as áreas dos triângulos ABC e ADC. Temos:

Área (DBC) = $\frac{(7)\left(\frac{7}{2}\right)}{2} - \frac{(7)(.2)}{2} = \frac{(24,5)-(.14)}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25.$

Questão 11. No ano de 2022, a Seção de Educação Física do CMRJ fez um levantamento do percentual de gordura corporal dos alunos do Ensino Médio. Na tabela abaixo, são apresentados dados referentes a uma amostra de 10 alunos.

6,04	6,02	7,30	7,04	8,89
8,91	8,19	8,91	9,40	9,60

A média, mediana e moda dos dados acima relacionados são, respectivamente:

(A) 8,13; 8,54; 8,19 **(B)** 8,03; 8,54; 8,91 (C) 8,03; 8,55; 8,91 (D) 8,13; 8,90; 8,91 (E) 8,13; 8,90; 8,19

Solução. Utilizando os conceitos de cada medida, temos:

i) Média: $\frac{6,04+6,02+7,30+7,04+8,89+8,91+8,19+8,91+9,40+9,60}{10} = \frac{80,30}{10} = 8,03.$

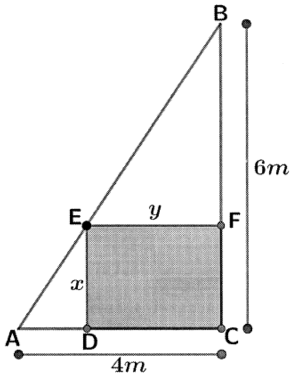
ii) Colocando em ordem crescente e calculando a média aritmética dos termos centrais, vem:

6,02	6,04	7,04	7,30	8,19	8,89	8,91	8,91	9,40	9,60

Mediana = $\frac{8,19+8,89}{2} = \frac{17,08}{2} = 8,54.$

iii) A moda é o dado que aparece commais frequência: 8,91.

Questão 12. Tenente Ludmila Freitas, professora de sociologia do Colégio Militar do Rio de Janeiro, pretende utilizar uma área no seu jardim para fazer uma horta. Ela observou que existia, em seu terreno, uma área livre, no formato de um triângulo retângulo (ABC), com catetos medindo 4m e 6 m. Ela decidiu, então, nessa área livre, fazer a sua horta na área retangular (CDEF), conforme a figura a seguir.



A lei da função, em metro quadrado, que expressa a área da horta em função da medida x, em metro, é igual a:

(A) A(x) = $-\frac{2x^2}{3} + 2x$ **(B)** A(x) = $-\frac{2x^2}{3} + 4x$ (C) A(x) = $\frac{2x^2}{3} + 4x$

(D) A(x) = $\frac{2x^2}{3} + 6x$ (E) A(x) = $-\frac{x^2}{3} + 2x$

Solução. A área da horta é dada por A(x) = x.y. Utilizando semelhança de triângulos para expressar y em função de x, temos:

i) $\frac{6}{4} = \frac{6-x}{y}$ **=> 6y = 24 – 4x => y =** $\frac{24-4x}{6}$**.** **ii) A(x) = (x).**$\left(\frac{24-4x}{6}\right) = -\frac{4x^2}{6}$ **+ 4x =** $-\frac{2x^2}{3}$ **+ 4x.**

Questão 13. Em determinado país, existem 3 torneios de futebol que são realizados periodicamente: o primeiro a cada 4 meses; o segundo, a cada 10 meses e o terceiro, a cada 14 meses. Sabendo que em 2020 eles foram realizados no mês de março, na próxima vez, na qual haverá coincidência dos campeonatos no mesmo mês, em mês ocorrerá?

(A) março (B) maio (C) julho (D) setembro **(E)** novembro

Solução. As coincidências ocorrerão em múltiplos comuns de 4, 10 e 14.

O MMC (4, 10, 14) = 2 x 2 x 5 x 7 = 140. Considerando o mês de março como 0, abril como 1, maio como 2, e assim sucessivamente, até janeiro como 11, temos oa restos possíveis na divisão por 12 (são 12 meses). Basta dividir 140 por 12 e procurar o resto. Na tabela abaixo.

4	10	14	2
2	5	7	2
1	5	7	5
1	1	7	7
1	1	1	

mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez	jan	fev
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Temos que 140 = 11 x 12 + 8. Logo, haverá coincidência em novembro.

Questão 14. Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado, e AF é bissetriz do ângulo DÂC. Os segmentos AC e BD são diagonais que se interceptam no ponto E. O segmento EG mede 12 cm, e G é um ponto da diagonal BD. Sabendo que F é um ponto do lado CD, a medida do segmentto CF, em centímetros, vale:

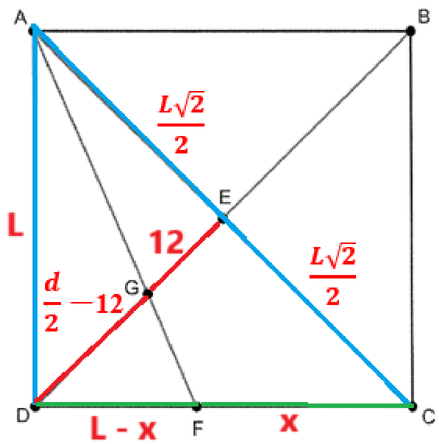
(A) 15

(B) 18

(C) 24

(D) 28

(E) 30



Solução. O segmento AG é bissetriz do ângulo DAE e o segmento AF é bissetriz do ângulo DAC. Aplicando o teorema das bissetrizes nesses dois triângulos e considerando x o segmento pedido CF, d, a diagonal do quadrado e L, a medida do lado do quadrado, temos:

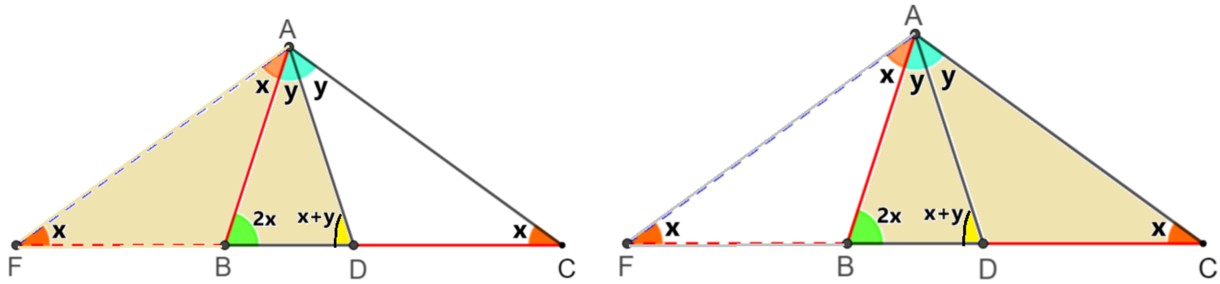
i) $\frac{L}{\frac{L\sqrt{2}}{2}-12} = \frac{L\sqrt{2}/2}{12}$ **=> 12L =** $\frac{L^2}{4} - \frac{12L\sqrt{2}}{2}$**. L é diferente de zero. Logo podemos dividir os membros por L.**

=> $\frac{L}{2} = 12 + \frac{12\sqrt{2}}{2}$ **=> L = 24 + 12.$\sqrt{2}$.**

ii) $\frac{L}{L-x} = \frac{L\sqrt{2}}{x}$ **=> Lx = L².$\sqrt{2}$ – Lx.$\sqrt{2}$. Dividindo os membros por L, vem:**

$x + x.\sqrt{2} = L\sqrt{2}. \Rightarrow x.(1+\sqrt{2}) = (24 + 12.\sqrt{2}).\sqrt{2} \Rightarrow x.(1+\sqrt{2}) = 24(1+\sqrt{2}) \Rightarrow x = 24.$

Questão 15. No triângulo ABC, o segmento AD é a bissetriz do ângulo BÂC. Sabe-se que AB = CD e que o ângulo $\widehat{ABC}$ é o dobro do ângulo $\widehat{ACB}$. A medida do ângulo BÂC, em graus, é igual a:



(A) 55 (B) 60 **(C)** 72 (D) 75 (E) 90

Solução. Prolongando o lado BC até F de forma a construir um triângulo isósceles AFC, temos que AF = AC.

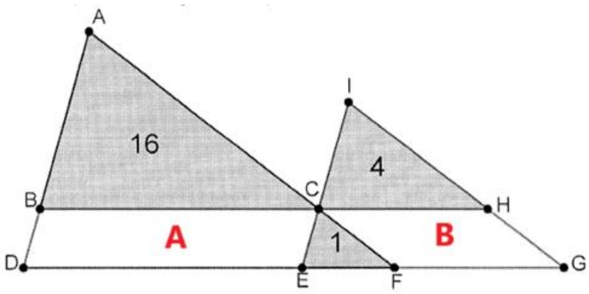
O ângulo ABD é externo do triângulo FBA. Logo, o ângulo FÂB = x. Este fato implica que o triângulo FBA é isósceles com FB = AB = DC.

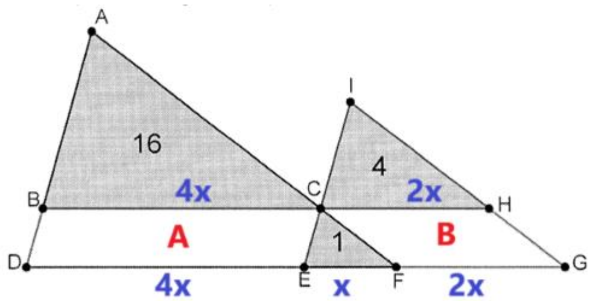
O ângulo ADB é externo do triângulo ADC. Logo, o ângulo ADB = x + y. Este fato implica que o triângulo FAD é isósceles com AF = FD.

Como BD é comum a FD e BC, temos que FD = AF = BC = AC. Então 2x = 2y => x = y. No triângulo ABC temos: 2x + 2y + x = 180º => 2y + 2y + y = 180º => 5y = 180º => y = 36º.

O ângulo BÂC = 2y = 2.(36º) = 72º

Questão 16. Os triângulos ABC, ICH e CEF têm áreas iguais a 16 cm^2, 4 cm^2 e 1 cm^2, respectivamente. Considere que AD e IE, AF e IG, BH e DG são pares de segmentos paralelos.





Qual é a área total, em cm^2, do polígono DACIGD?

(A) 32 **(B)** 33 (C) 34 (D) 35 (E) 36

Solução. Considere A e B, respectivamente as áreas dos paralelogramos BCED e CHGF. Estabelecendo as semelhanças convenientes entre os triângulos destacados, temos:

i) Os triângulos de áreas 16 e 1 são semelhantes. Logo, $\frac{16}{1} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\right)^2 => \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = 4 => \overline{BC} = 4.\overline{EF}$.

ii) Os triângulos de áreas 16 e 4 são semelhantes. Logo, $\frac{16}{4} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{CH}}\right)^2 => \frac{\overline{BC}}{\overline{CH}} = 2 => \overline{BC} = 2.\overline{CH}$.

iii) Os triângulos de áreas 4 e 1 são semelhantes. Logo, $\frac{4}{1} = \left(\frac{\overline{CH}}{\overline{EF}}\right)^2 => \frac{\overline{CH}}{\overline{EF}} = 2 => \overline{CH} = 2.\overline{EF}$.

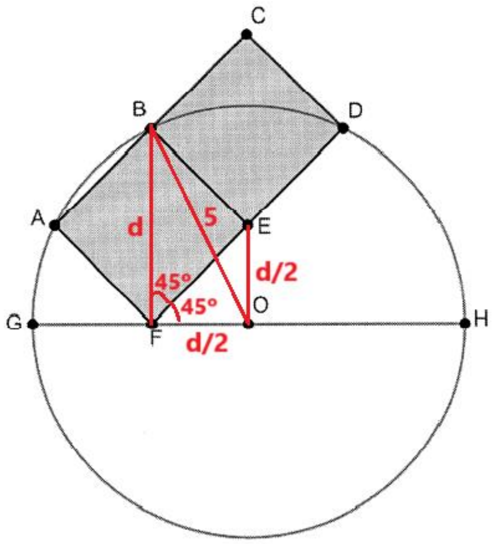
iv) Encontrando as áreas A e B de acordo com as relações entre os lados, temos:

$\frac{16}{A+17} = \left(\frac{4x}{5x}\right)^2 => \frac{16}{A+17} = \frac{16}{25}$ **=> (16).(A + 17) = (16).(25) => A + 17 = 25 => A = 25 – 17 = 8.**

$\frac{4}{B+5} = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 => \frac{4}{B+5} = \frac{4}{9}$ **=> (4).(B + 5) = (4).(9) => B + 5 = 9 => A = 9 – 5 = 4.**

v) A soma das áreas pedidas é: 16 + A + 1 + 4 + B = 16 + 8 + 1 + 4 + 4 = 33.

Questão 17. Na figura abaixo, sabendo que a circunferência tem raio de 5 cm, a área total sombreada, em cm^2, formada pelos quadrados ABEF e BCDE é igual a:

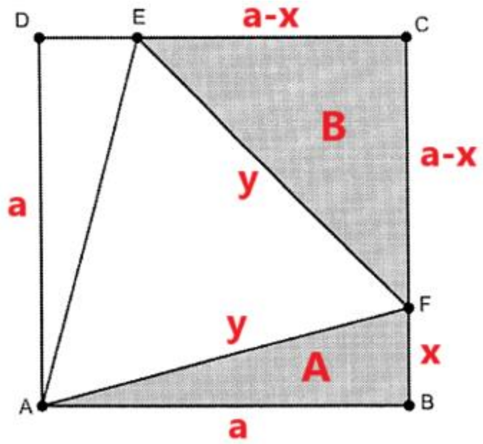


(A) 12 (B) 15 **(C)** 20 (D) 24 (E) 30

Solução. Observando as medidas indicadas na figura, considerando L o lado do quadrado e d a diagonal do quadrado, temos: $(d)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 5^2 => 5d^2 = 4.(25) => d^2 = 20$**. Como** $d = L.\sqrt{2}$**, temos:**

$(L\sqrt{2})^2 = 20 => 2L^2 = 20 => L^2 = 10$**. Como são dois quadrados de mesma área, o total é 2.(10) = 20** cm^2**.**

Questão 18. Considere o quadrado ABCD e o triângulo equilátero AEF. A razão entre as áreas dos triângulos ABF e ECF, nesta ordem, é igual a:



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 2

Solução. Considerando a o lado do quadrado, y, o lado do triângulo equilátero e x, o cateo FB, temos:

i) Os triângulos AED e ABF são congruentes pq possuem lados iguais (AD = AB e AE = AF.

ii) No triângulo EFC temos: $y = (x - a).\sqrt{2}$. Logo, $y^2 = 2.(x - a)^2 = 2x^2 - 4ax + 2a^2$.

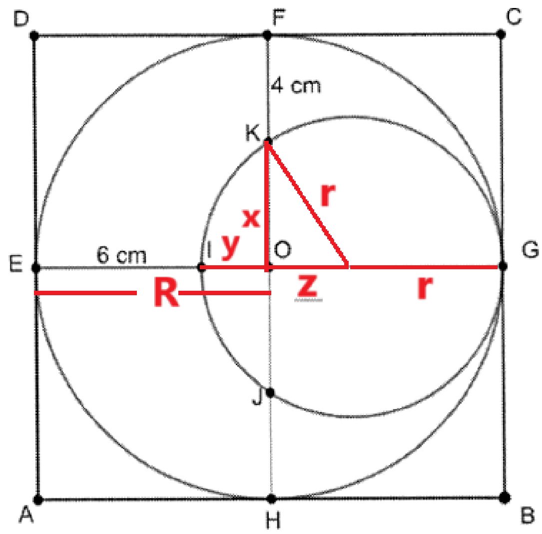
iii) No triângulo AFB temos: $y^2 = a^2 + x^2$.

iv) Substituindo (iii) em (ii), temos: $2x^2 - 4ax + 2a^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + a^2 = 4ax$.

v) A área do triângulo ABF vale: $A = \frac{a.x}{2}$. A área do triângulo ECF vale: $B = \frac{(a-x)^2}{2}$.

vi) A razão pedida é: $\frac{A}{B} = \frac{ax/2}{(a^2-2ax+x^2)/2} = \frac{ax}{(a^2+x^2)-2ax} = \frac{ax}{4ax-2ax} = \frac{ax}{2ax} = \frac{1}{2}$.

Questão 19. O quadrado ABCD contém dois círculos. O maior tem centro em O e é tangente aos lados do quadrado ABCD nos pontos E, F, G e H. As medidas dos segmentos FK e EI são, respectivamente, 4 cm e 6 cm. Considere que o centro do círculo menos pertence ao segmento GI, sendo GI o seu diâmetro. A área do quadrado ABCD, em cm^2, é igual a:



(A) 64 (B) 100 (C) 121 (D) 144 **(E)** 256

Solução. Considerando R o raio do círculo maior e r, o da menor, temos de acordo com a figura as seguintes medidas:

i) $x = R - 4$; $y = R - 6$ e $y + z = r \Rightarrow R - 6 + z = r \Rightarrow z = 6 - R + r \Rightarrow z = 6 - (R - r)$;

ii) $y + R = 2r \Rightarrow R - 6 + R = 2r \Rightarrow 2R - 2r = 6 \Rightarrow R - r = 3$.

Logo, substituindo em (i), z = 6 – 3 = 3.

iii) Como R – r = 3, então x = r + 3 – 4 => x = r – 1.

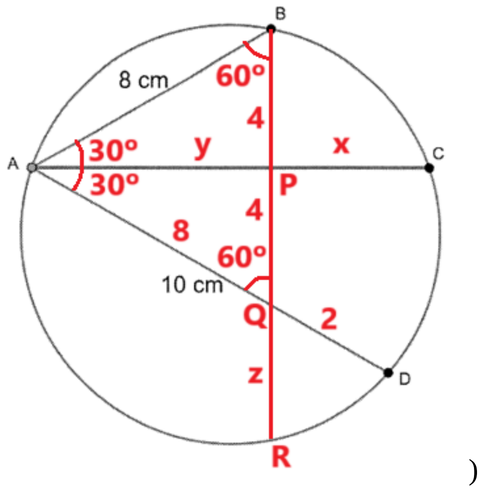
iv) Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo de lados x, r e z, temos:

$r^2 = (r-1)^2 + 3^2 \Rightarrow r^2 = r^2 - 2r + 1 + 9 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$.

v) R = 5 + 3 = 8. O lado do quadrado vale 2R = 2.(8) = 16.

Logo a área será $A = (16)^2 = 256$ cm^2.

Questão 20. Na figura abaixo, AB = 8 cm, AD = 10 cm, e o ângulo BÂD = 60º. O segmento AC é a bissetriz do ângulo BÂD. O valor do segmento AC, em cm, vale:



)

(A) $5\sqrt{2}$ (B) $5\sqrt{3}$ (C) $6\sqrt{2}$ **(D)** $6\sqrt{3}$ (E) $7\sqrt{3}$

Solução 1. Traçando o segmento BR de forma a construir o triângulo equilátero ABQ, temos que o segmento AC será a soma dos segmentos y e x.

i) y é a altura do triângulo equilátero de lado 8 cm. Logo, $y = \frac{8.\sqrt{3}}{2} = 4.\sqrt{3}$ cm.

ii) Aplicando a potência de ponto em relação a Q, temos: 8 x 2 = 8 x z => z = 2.

iii) Aplicando a potência de ponto em relação a P, temos:

$(4).(4+z) = (y).(x) \Rightarrow (4).(6) = (4.\sqrt{3}).(x) \Rightarrow x = \frac{24}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{6.\sqrt{3}}{3} = 2.\sqrt{3}$ cm.

iv) A medida $AC = x + y = 2.\sqrt{3} + 4.\sqrt{3} = 6.\sqrt{3}$ cm.

Solução 2. (Proposta pelo Prof. Mario Lima do canal Intermat)

i) $\widehat{BC} = \widehat{CD} = 60° \Rightarrow \overline{BC} = \overline{BC}$ = lado do hexágono (R);

ii) $\widehat{BCD} = 120° \Rightarrow \overline{BD}$ = lado do triângulo equilátero inscrito $(R\sqrt{3})$;

iii) Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos:

$$10.R + 8.R = x.R\sqrt{3} \quad (\div R)$$

$$10 + 8 = x.\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$