Prof.Walter Tadeu Nogueira da Silveira
www.professorwaltertadeu.mat.br

Arranjos, Combinações e Princípio da Casa dos Pombos - Gabarito

1) De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que a primeira ganhe um carro, a segunda ganhe uma moto e a terceira ganhe um patinete?

Solução. A configuração das pessoas e os prêmios diferem em ordem. Dessa forma há 10 formas de escolher a pessoa que ganhará o carro, sobram 9 formas de escolher quem ganha a moto e, finalmente 8 formas de escolher quem ganha o patinete.

Carro	Moto	Patinete
10 pessoas	9 pessoas	8 pessoas

Dessa forma há 10 x 9 x 8 = 720 maneiras de escolher as 3 pessoas.

2) Os atletas Michael Phelps, Kōsuke Hagino, Wang Shun, Hiromasa Fujimori, Ryan Lochte, Philip Heintz, Thiago Pereira e Daniel Wallace foram classificados para a final dos 200m medley masculino nas Olimpíadas Rio 2016.

a) De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado se dois nadadores não concluírem a prova ao mesmo tempo?

Solução. Para o 1º lugar há 8 possibilidades, para o 2º lugar, 7 possibilidades e para o 3º lugar, 6 possibilidades.

Portanto, o pódio pode ser formado de 8 x 7 x 6 = 336 maneiras distintas.

b) Em quantas dessas opções Michael Phelps será o primeiro colocado?

Solução. Fixando Michael Phelps no 1º lugar, temos 7 x 6 = 42 maneiras de compor o pódio.

3) Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR cujas vogais não aparecem lado a lado?

Solução. Posicionando as consoantes primeiramente, observamos 7 lugares possíveis para que as vogais sejam colocadas.

Uma vez escolhidos os lugares das vogais, permutamos as vogais e as consoantes.

	V		S		T		B		L		R	

O número de escolhas dos lugares das vogais é C(7,4) = $\frac{7!}{4!.3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3!} =$ **7 x 5 = 35 maneiras.**

O número de permutações das consoantes é 6! = 720 e das vogais é 4! = 24.

Logo, há 35 x 720 x 24 = 604 800 anagramas.

4) De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que cada uma delas ganhe um carro (sendo os três carros idênticos)?

Solução. Como os carros são iguais, não faz diferença a ordem das escolhas.

Dessa forma há um total de C(10,3) = $\frac{10!}{7!.3!} = \frac{10.9.8.7!}{7!.3!} = \frac{10.9.8}{6}$ **= 10 x 12 = 120 maneiras.**

5) Uma loja de iogurte congelado tem 21 opções de coberturas para o cliente escolher. De quantas maneiras distintas um cliente pode montar seu iogurte congelado com 3 coberturas diferentes?

Fonte: http://www.foodographer.net/wp-content/uploads/2013/01/yogurt2.jpg

Solução. Há um total de C(21,3) = $\frac{21!}{18!.3!} = \frac{21.20.19.18!}{18!.6} = \frac{21.20.19}{6}$ = 7 x 10 x 19 = 1 330 maneiras.

6) Em uma sala de aula há 18 meninas e 10 meninos. De quantas maneiras distintas:

a) Podemos montar um grupo com 5 alunos?

Solução. O total de alunos é (18 + 10) = 28. Como não há diferença de escolha de gênero, há C(28,5) = $\frac{28!}{23!.5!} = \frac{28.27.26.25.24.23!}{23!.120} = \frac{28.27.26.25.24}{120} =$ = 28 x 27 x 26 x 5 = 98 280 maneiras.

b) Podemos montar um grupo com 5 alunos, com exatamente 3 meninas?

Solução. Escolhemos 3 meninas do grupo de 18 meninas e 2 meninos do grupo de 10 meninos.

**C(18,3) x C(10,2) = $\frac{18!}{15!3!}.\frac{10!}{8!2!} = \frac{18.17.16.15!}{15!.6}.\frac{10.9.8.!}{8!.2} = \frac{18.17.16}{6}.\frac{10.9}{2}$ = 3 x 17 x 16 x 5 x 9 =
= 36 720 maneiras.**

c) Podemos montar um grupo com 5 alunos, com pelo menos 3 meninas?

Solução. Os grupos poderão ter 3, 4 ou 5 meninas.

i) Com 3 meninas: Já feito na letra (b). Há 36 720 maneiras.

ii) Com 4 meninas: C(18,4) x C(10,1) = $\frac{18.17.16.15.14!}{14!.4!}.\frac{10.9!}{9!.1}$ = 3 x 17 x 4 x 15 x 10 = 30 600.

iii) Com 4 meninas: C(18,5) = $\frac{18.17.16.15.14.13!}{13!.5!} = \frac{18.17.16.15.14}{120}$ = 18 x 17 x 2 x 14 = 8 568.

O total de maneiras será: 36 720 + 30 600 + 8 568 = 75 888.

7) Em uma festa há 30 homens e 20 mulheres. Sabendo que todas as pessoas de mesmo sexo se cumprimentam entre si com um aperto de mão e que um homem e uma mulher se cumprimentam com um abraço, determine:

a) Quantos apertos de mão foram dados na festa?

Solução. Quando A aperta a mão de B, simultaneamente B aperta a mão de A. Logo, esse cumprimento é contado duas vezes. Observe também que cada pessoas não aperta a própria mão. Logo o número de apertos de mãos entre N pessoas é $\frac{N.(N-1)}{2}$.

Dessa forma houve $\frac{30.29}{2}$ = 435 apertos de mãos entre homens e $\frac{20.19}{2}$ = 190 apertos de mãos entre mulheres, totalizando (435 + 190) = 625 apertos de mãos.

b) Quantos abraços foram dados na festa?

Solução. Cada um dos 30 homens deu um abraço em cada uma das 20 mulheres. Logo, foram dados 30 x 20 = 600 abraços.

Observação: Considere que todas as pessoas da festa se cumprimentam exatamente uma vez.

8) Um estudante possui, em uma das gavetas do seu armário, 10 meias brancas, 6 meias pretas, 8 meias vermelhas e 4 meias amarelas. Todas são indistinguíveis ao tato. Quantas meias ele precisa retirar da gaveta, sem olhar, para garantir que pelo menos duas das meias retiradas são brancas?

Solução. Considerando que todas as outras possibilidades ocorrem primeiro, temos que todas as meias pretas, vermelhas e amarelas são retiradas antes das brancas.

Logo, são retiradas (6 + 8 + 4) = 18 meias. As duas próximas retiradas terão que ser brancas.

Dessa forma, ele precisa retirar 20 meias.

9) Manoela e Renato foram a um bar e pediram uma porção com 12 pastéis, 6 de queijo e 6 de camarão. Só é possível descobrir o sabor ao comê-lo. Quantos pastéis Renato deve comer para garantir que comerá algum de camarão?

Solução. Considerando que todas as outras possibilidades ocorrem primeiro, temos que todas os pastéis de queijo, são comidos antes dos pastéis de camarão. O próximo (sétimo) pastel comido será de camarão. Dessa forma, ele deve comer 7 pastéis.

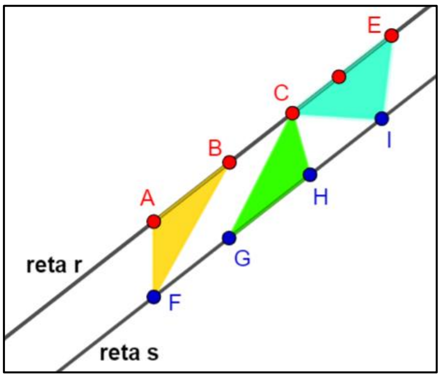
10) Quantos alunos devem fazer uma prova com 10 questões que devem ser julgadas como verdadeiras ou falsas para que possamos garantir que pelo menos dois deles a responderão da mesma maneira?

Solução. Cada uma das 10 questões pode ser respondida de 2 formas diferentes (V ou F). Logo, há um total de 2^{10} = 1 024 maneiras diferentes de responder às questões. Então, se 1 025 alunos fizerem essa prova, haverá pelo menos dois alunos com respostas idênticas.

Exercícios Propostos:

1. Em uma reta r são marcados 5 pontos distintos (A, B, C, D e E) e em outra reta s, paralela a r, são marcados outros 4 pontos (F, G, H e I). Quantos triângulos podem ser formados com vértices em 3 dos pontos descritos?

Solução. Os triângulos podem ser formados com 2 vértices em r e 1 vértice em s ou 2 vértices em r e 1 vértice em s, conforme exemplos mostrados na figura.
Há C(5,2) x C(4,1) + C(5,1) x C(4,2) = 10 x 4 + 5 x 6 = 70 triângulos.



2. Um químico possui 8 tipos de substâncias das quais duas, quando juntas, explodem. De quantas maneiras ele pode selecionar 4 dessas substâncias sem causar uma explosão?

Solução. Suponha as substâncias nomeadas como A, B, C, D, E, F, G e H, com as substâncias A e B sendo as que não podem ficar juntas. Para a seleção de 4 substâncias há em 3 casos:

i) A está e B não está: Fixamos A e escolhemos 3 das 6 possíveis: 1 x C(6,3) = 20.

ii) A não está e B está: Fixamos B e escolhemos 3 das 6 possíveis: 1 x C(6,3) = 20.

iii) Nem A, nem B estão: Escolhemos as 4 das 6 possíveis: C(6,4) = 15.

Dessa forma, temos (20 + 20 + 15) = 55 maneiras de selecionar as 4 substâncias.

3. Uma livraria tem 15 livros em uma prateleira: 10 exemplares do livro "O Diário de uma Paixão" e 5 exemplares de "Amor Para Recordar". Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 15 livros na estante de modo que dois exemplares de "Amor Para Recordar" nunca estejam juntos.

Solução. Fixamos inicialmente os exemplares de “O Diário de uma Paixão” (DuP) e escolhemos os lugares para “Amor para Recordar” (AR). Como os exemplares de cada livro são indistinguíveis, não há necessidade de permutação.

	DuP		DuP		DuP		DuP		DuP		DuP		DuP		DuP		DuP		DuP	

Há C(11,5) = $\frac{11.10.9.8.7.6!}{6!.5!} = \frac{11.10.9.8.7}{120}$ = 11 x 6 x 7 = 462 maneiras diferentes.

4. Em uma circunferência são marcados 10 pontos que se ligados formam um decágono regular. Com vértices nesses pontos:

a) Quantos triângulos podem ser formados?

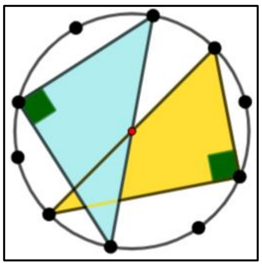
Solução. Os pontos não estão alinhados. Então basta selecionar 3 dos 10 pontos para a formação do triângulo: C(10,3) = $\frac{10.9.8.7!}{7!.3!} = \frac{10.9.8}{6}$ = 10 x 12 = 120 triângulos.

b) Quantos triângulos retângulos podem ser formados?

Solução. Numa circunferência os triângulos retângulos a hipotenusa é o diâmetro. Então selecionamos 2 pontos para diâmetros e o ponto restante dentre os 8 fora do diâmetro.

Com 10 pontos, temos 5 diâmetros.

Logo, há 5 x C(8,1) = 5 x 8 = 40 triângulos retângulos.



5. (UERJ 2012) A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição	Exemplo
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a n e no país Y igual a p. A razão n/p corresponde a:

(A) 1. **(B)** 2. (C) 3. (D) 6.

Solução. Para calcular <u>n</u> permutamos as letras (L) e algarismos (A) (LLLAAA), juntos, substituindo os valores possíveis de letras e algarismos: 26^3 x 10^3 x $\frac{6!}{3!.3!}$ = 26^3 x 10^3 x 20.

Para calcular <u>p</u> permutamos as letras (LLL) e algarismos (AAAA), separados, substituindo os valores possíveis de letras e algarismos: 26^3 x 10^4 x $\frac{3!}{3!}$ x $\frac{4!}{4!}$ = 26^3 x 10^3 x 1.

Logo, $\frac{n}{p} = \frac{26^3 \times 10^3 \times 20}{26^3 \times 10^4} = \frac{20}{10}$ = 2.

__Exercícios de Fixação:__

1. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 8 pessoas podemos sortear 3 delas para que a primeira ganhe um prêmio de R$100.000,00; a segunda ganhe um prêmio de R$50.000,00 e a terceira ganhe um prêmio de R$25.000,00?

Solução. Há 8 possibilidades de distribuir o prêmio de 100.000, 7 possibilidades para a distribuição do prêmio de 50.000 e 6 possibilidades de distribuição do prêmio de 25.000.

Dessa forma, há 8 x 7 x 6 = 336 maneiras distintas de distribuir esses três prêmios.

2. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 8 pessoas podemos sortear 3 delas para que cada uma ganhe um prêmio de R$100.000,00?

Solução. Como o prêmio é o mesmo, sem uma diferenciação, a escolha será uma combinação:

C(8,3) = $\frac{8.7.6.5!}{5!.3!} = \frac{10.9.8}{6}$ **= 56 maneiras distintas.**

3. Uma hamburgueria permite que seus clientes montem um hambúrguer da seguinte maneira:

I - Escolhem o tipo de carne: frango, alcatra ou picanha.
II - Escolhem o tipo de pão: branco ou integral.
III - Escolhem o tipo de queijo: prato, minas padrão, gorgonzola ou cheddar.
IV - Escolhem 3 adicionais diferentes entre: alface, bacon, cebola caramelizada, cogumelos, ovo frito, picles, presunto ou tomate.

De quantas maneiras distintas um hambúrguer pode ser montado nessa hamburgueria?

Solução. Há 3 x 2 x 4 x C(8,3) = 3 x 2 x 4 x 56 = 1 344 maneiras distintas.

4. Em uma turma de teatro há 15 meninas e 8 meninos. De quantas maneiras distintas:

a) Podemos montar um grupo com 4 alunos?

Solução. São 23 alunos. Há C(23,4) = $\frac{23.22.21.20.19!}{19!.4!} = \frac{23.22.21.20}{24}$ **= 8 855 maneiras distintas.**

b) Podemos montar um grupo com 4 alunos, com exatamente 2 meninas?

Solução. Escolhemos 2 meninas do grupo de 15 meninas e 2 meninos do grupo de 8 meninos.

C(15,2) x C(8,2) = $\frac{15.14.13!}{13!.2!} \times \frac{8.7.6!}{6!.2!}$ **= 15 x 7 x 4 x 7 = 2 940 maneiras distintas.**

c) Podemos montar um grupo com 4 alunos, com pelo menos 2 meninas?

Solução. O grupo pode ter 2, 3 ou 4 meninas:

i) Com 2 meninas: feito na letra (b). São 2 940 grupos.

ii) Com 3 meninas: C(15,3) x C(8,1) = $\frac{15.14.13.12!}{12!.3!}$ **x 8 = 5 x 7 x 13 x 8 = 3 640 maneiras distintas.**

iii) Com 4 meninas: C(15,4) = $\frac{15.14.13.12.11!}{11!.4!}$ **= 15 x 7 x 13 = 1 365 maneiras distintas.**

O total de maneiras é (2 940 + 3 640 + 1 365) = 7 945.

5. Em um plano são marcados 10 pontos. Desses, cinco, e somente cinco, estão alinhados. De quantas maneiras distintas posso formar um triângulo com vértices nesses pontos?

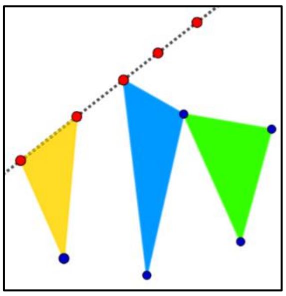
Solução. Temos 3 casos:

i) 2 vértices (alinhados) e 1 vértice (não alinhado): C(5,2) x C(5,1) = 50;

ii) 1 vértice (alinhados) e 2 vértices (não alinhados): C(5,1) x C(5,2) = 50;

iii) 3 vértices (não alinhados): C(5,3) = 10.

Total de triângulos: 50 + 50 + 10 = 110.



6. Um grupo de 10 amigos criou um campeonato de kart amador. No final de doze corridas, suas pontuações são tabeladas e caso haja empate, vence o candidato mais pesado, pois teoricamente quem é mais leve tem vantagens ao dirigir um kart. O primeiro lugar receberá uma medalha de ouro, o segundo lugar uma medalha de prata e o terceiro lugar uma medalha de bronze. De quantas maneiras distintas pode haver essa distribuição de medalhas?

Solução. Há 10 x 9 x 8 = 720 maneiras diferentes de distribuir essas medalhas.

7. Quantos são os elementos de um conjunto que possui 45 subconjuntos com exatamente dois elementos?

Solução. Considerando N o número de elementos do conjunto. O número de subconjuntos com 2 elementos é a combinação C(N,2). Temos: C(N,2) = $\frac{N!}{2!.(N-2)!} = \frac{N.(N-1).(n-2)!}{2!.(N-2)!} = \frac{N.(N-1)}{2}$.

Logo, $\frac{N.(N-1)}{2}$ = 45 => N^2 – N – 90 = 0 => (N – 10).(N + 9) = 0. Como N é positivo, N = 10.

8. Em uma reunião há o dobro de mulheres em relação ao número de homens. Sabendo que todas as pessoas se cumprimentaram uma única vez com um aperto de mão e que houve 36 apertos de mão, quantas pessoas haviam na reunião?

Solução. Considerando N o número de homens, temos que 2N será o número de mulheres. O total de pessoas é 3N e cada pessoa aperta a mão de (3N – 1) outras pessoas. Como é feito somente uma vez, temos:

$\frac{3N.(3N-1)}{2}$ = 36 => 3N.(3N – 1) = 72 => N.(3N – 1) = 24 => $3N^2$ – N – 24 = 0. Resolvendo a equação, vem: N = $\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4.(3)(-24)}}{2.3} = \frac{1\pm\sqrt{1+288}}{6} = \frac{1\pm\sqrt{289}}{6} = \frac{1\pm17}{6}$.

Como N é um número natural, N = 3. Logo, o número de pessoas é 3.(3) = 9.

9. No Campeonato Brasileiro os 20 times que participam da primeira divisão jogam entre si duas vezes (turno e returno). Quantos jogos ocorrem, ao todo, no campeonato?

Solução. Cada time joga com outros (20 – 1) = 19 times. Logo, ocorrem 20 x 19 = 380 jogos.

10. Em um grupo de 9 amigos que jogam futebol de salão, dois deles gostam de jogar sempre no gol e os outros 7 só gostam de jogar na linha. De quantas maneiras posso selecionar 5 deles para formar um time respeitando suas preferências?

Solução. Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I os jogadores com A e B os jogadores que preferem jogar no gol. Dessa forma, podemos formar os times em dois casos:

i) A no gol e quatro na linha, Escolhemos 4 dentre 7 (B não entra): C(7,4) = $\frac{7.6.5.4!!}{4!.3!} = 35$.

ii) B no gol e quatro na linha, Escolhemos 4 dentre 7 (A não entra): C(7,4) = $\frac{7.6.5.4!!}{4!.3!} = 35$.

Dessa forma há 2 x 35 = 70 maneiras diferentes.

11. Bruno, Frederico, Gabriel, João, Leonardo, Marcos e Renato são amigos de infância. Ao fazer uma viagem juntos, eles precisam se dividir em dois quartos, um com 3 deles e o outro com os outros 4. Sabendo que Bruno e Marcos brigaram e não podem ficar juntos no mesmo quarto:

a) De quantas maneiras distintas essa divisão pode ser feita?

Solução. Identificando o quarto com 3 de Q3 e o outro de Q4, há dois casos:

i) Bruno no Q3 (escolhemos 2) e Marcos no Q4 (escolhemos 3): C(5,2) x C(3,1) = 10 x 1 = 10.

ii) Marcos no Q3 (escolhemos 2) e Bruno no Q4 (escolhemos 3): C(5,2) x C(3,1) = 10 x 1 = 10.

Logo, há 10 + 10 = 20 maneiras distintas.

b) Frederico e Leonardo são primos e gostariam de ficar no mesmo quarto. Dessa forma, de quantas maneiras distintas essa divisão pode ser feita?

Solução. Mantendo a restrição de Bruno e Marcos em quartos diferentes, temos, com essa nova as situações:

i) Frederico e Leonardo no Q3 com Bruno: Só há uma possibilidade, pois os outros 4 estarão no outro quarto Q4 com Marcos.

ii) Frederico e Leonardo no Q3 com Marcos: Só há uma possibilidade, pois os outros 4 estarão no outro quarto Q4 com Bruno.

iii) Frederico e Leonardo no Q4 com Bruno: há C(3,1) = 3 possibilidades de escolher o outro companheiro, pois os outros 2 estarão no outro quarto Q3 com Marcos.

iv) Frederico e Leonardo no Q4 com Marcos: há C(3,1) = 3 possibilidades de escolher o outro companheiro, pois os outros 2 estarão no outro quarto Q3 com Bruno.

Dessa forma, há (1 + 1 + 3 + 3) = 8 maneiras distintas.

12. Quantas são as diagonais de um octógono convexo?

Solução. O número de diagonais é o número de combinações dois a dois entre os 8 vértices, retirando as ligações que correspondem aos 8 lados: D = C(8,2) – 8 = $\frac{8.7.6!}{2!.6!}$ – 8 = 28 – 8 = 20.

OBS: Se desenvolvermos para n vértices, chegamos na fórmula conhecida da Geometria Plana.

$$D = C(n,2) - n = \frac{n.(n-1).(n-2!}{2!.(n-2!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n.(n-3)}{2}.$$

13. Quantos são os anagramas da palavra PARALELEPIPEDO que não possuem duas letras E lado a lado?

Solução. Colocamos as outras letras da palavra e escolhemos as posições para as letras E. Depois permutamos as letras colocadas inicialmente. As letras E's não precisam ser permutadas, pois são iguais.

	P		A		R		A		L		L		P		Í		P		D		O	

i) Nº de escolhas para a letra E: C(12,3) = $\frac{12.11.10.9!}{3!.9!}$ = 2 x 11 x 10 = 220.

ii) Permutação das letras previamente colocadas: $P_{11}^{2,2,2} = \frac{11!}{3!.2!.2!} = \frac{11!}{3!.2!.2!}$.

Há, portanto, 220 x $\frac{11!}{3!.2!.2!}$ = 55 x $\frac{11!}{3!}$ = 55 x $\frac{11!}{6}$.

14. Uma mulher tem 5 amigas e 5 amigos e seu esposo tem 2 amigas e 7 amigos. Eles querem convidar 3 mulheres e 3 homens para um jantar na casa deles. Eles fazem questão que cada um convide 3 pessoas entre seu grupo de amigos e amigas. De quantas maneiras distintas essas pessoas podem ser escolhidas?

Solução. Observando as restrições, temos 3 casos (o esposo só possui 2 amigas):

i) Esposa convida 3 amigas e esposo, 3 amigos:

C(5,3) x C(7,3) = $\frac{5.4.3!}{3!.2!} \times \frac{7.6.5.4!}{3!.4!}$ = 10 x 35 = 350.

ii) Esposa convida 2 amigas e 1 amigo e esposo, 1 amiga e 2 amigos:

C(5,2) x C(5,1) x C(2,1) x C(7,2) = $\frac{5.4.3!}{3!.2!} \times \frac{5!}{1!.4!} \times \frac{2!}{1!} \times \frac{7.6.5!}{2!.5!}$ = 10 x 5 x 2 x 21 = 2 100.

iii) Esposa convida 1 amiga e 2 amigos e esposo convida 2 amigas e 1 amigo:

C(5,1) x C(5,2) x C(2,2) x C(7,1) = 5 x 10 x 1 x 7 = 350.

No total, há (350 + 350 + 2 100) = 2 800 maneiras distintas.

15. Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de determinado refrigerante traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

Solução. Há 24 x 23 x 22 = 12 144 maneiras.

16. De quantos modos 12 alunos podem se dividir em 3 grupos de 4 alunos cada, sabendo que um dos grupos fará um trabalho sobre Pitágoras, outro sobre Tales e o terceiro sobre Hypatia?

Solução. Os grupamentos podem ser realizados, observando que os títulos dos trabalhos fazem a diferença entre os grupamentos.

C(12,4) x (8,4) x (4,4) = $\frac{12!}{8!.4!} \times \frac{8!}{4!.4!} \times \frac{4!}{4!} = \frac{12!}{4!} \times \frac{1}{4!} \times \frac{1}{4!} = \frac{12!}{(4!)^3}$ **= 34 650.**

17. De quantos modos 12 alunos podem se dividir em 3 grupos de 4 alunos cada, sabendo que todos os grupos farão um trabalho sobre Pitágoras?

Solução. Os grupamentos podem ser realizados, observando que os títulos dos trabalhos <u>não</u> fazem a diferença entre os grupamentos.

i) C(12,4) x (8,4) x (4,4) = $\frac{12!}{8!.4!} \times \frac{8!}{4!.4!} \times \frac{4!}{4!} = \frac{12!}{4!} \times \frac{1}{4!} \times \frac{1}{4!} = \frac{12!}{(4!)^3}$ **= 34 650 modos.**

ii) O resultado é dividido por 3! = 6 (permutação dos títulos): 34 650 ÷ 6 = 5 755 modos.

18. (UERJ - 2010) Ao refazer seu calendário escolar para o segundo semestre, uma escola decidiu repor algumas aulas em exatamente 4 dos 9 sábados disponíveis nos meses de outubro e novembro de 2009, com a condição de que não fossem utilizados 4 sábados consecutivos. Para atender às condições de reposição das aulas, o número total de conjuntos distintos que podem ser formados contendo 4 sábados é de:

(A) 80 (B) 96 **(C)** 120 (D) 126

Solução. Considerando os sábados S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8 e S9, os 4 de forma consecutivas são: {S1, S2, S3, S4}, {S2, S3, S4, S5}, {S3, S4, S5, S6}, {S4, S5, S6, S7}, {S5, S6, S7, S8} e {S6, S7, S8, S9}, totalizando 6 casos.

O número de formas de selecionar 4 sábados dentre 9 é C(9,4) = $\frac{9.8.7.6.5!}{5!.4!}$ **= 126.**

Logo, sem considerar os 4 consecutivos, temos 126 – 6 = 120.

19. (UERJ 2010)

O Globo, 18/03/2009

Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar n grupos, não vazios, que apresentam um número igual de meninos e de meninas. O maior valor de n é equivalente a:

(A) 45 (B) 56 **(C)** 69 (D) 81

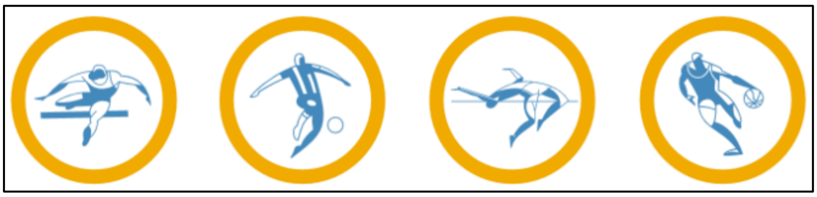
Solução. Os conjuntos podem ser:

i) 1 menino e 1 menina: C(4,1) x C(4,1) = 4 x 4 = 16;
ii) 2 meninos e 2 meninas: C(4,2) x C(4,2) = 6 x 6 = 36;
iii) 3 meninos e 3 meninas: C(4,3) x C(4,3) = 4 x 4 = 16;
iv) 4 meninos e 4 meninas: 1 x 1 = 1

Logo, n = 2 x 16 + 36 + 1 = 32 + 36 + 1 = 69

20. (UERJ 2007)

Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.



Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

(A) 24 **(B)** 35 (C) 70 (D) 140

Solução. Serão selecionadas 4 figuras de 7 figuras para a formação dos grupos:

Há, portanto, C(7,4) = $\frac{7.6.5.4!}{3!.4!}$ **= 35 grupos distintos.**

21. (UFF 2007) A administração de determinado condomínio é feita por uma comissão colegiada formada de 8 membros: síndico, subsíndico e um conselho consultivo composto de seis pessoas. Note que há distinção na escolha de síndico e subsíndico enquanto não há esta distinção entre os membros do conselho consultivo. Sabendo que 10 pessoas se dispõem a fazer parte de tal comissão, determine o número total de comissões colegiadas distintas que poderão ser formadas com essas 10 pessoas.

Solução. O síndico e o subsíndico podem ser escolhidos de 10 x 9 = 90 modos distintos.

Os 6 membros restantes da comissão podem ser escolhidos de C(8,6) = 28 modos distintos.

Logo, há 90 x 28 = 2 520 no total.

22. Quantas são as senhas de 5 dígitos, nas quais exatamente dois dos dígitos são o algarismo 1, e os outros são distintos?

Solução. Há C(5,2) = 10 formas de escolher os lugares do algarismo 1. Os 3 lugares restantes podem ser ocupados de 9 x 8 x 7 = 504 formas diferentes. No total, há 10 x 504 = 5 040 senhas.

23. Quantos são os números naturais de 7 algarismos, nos quais exatamente dois deles são o algarismo 8, exatamente dois deles são o número 1 e os outros algarismos são distintos?

Solução. Há 2 casos a considerar:

I) O algarismo da unidade de milhão é 1 ou 8:

2 x [C(6,1) x C(5,2) x 8 x 7 x 6] = 2 x [6 x 10 x 336] = 40 320.

u.M.	c.m	d.m	u.m	c.s	d.s	u.s
1 ou 8	1	8 poss.	7 poss.	8	6 poss.	8
Exemplo de preenchimento	Escolhemos mais 1 lugar para o outro algarismo 1 (ou 8), dois para os dois 8's (ou 1's) e os restantes são escolhidos de 8 x 7 x 6 formas diferentes.					

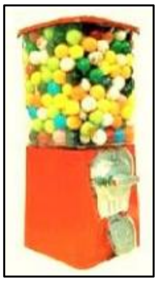
ii) O algarismo das dezenas de milhar não é 1, nem 8, nem 0:

7 x C(6,2) x C(4,2) x 7 x 6 x = 7 x 15 x 6 x 7 x 6 = 26 460.

u.M.	c.m	d.m	u.m	c.s	d.s	u.s
7 poss.	1	7 poss.	6 poss.	8	1	8
Exemplo de preenchimento	Escolhemos 2 lugares para o algarismo 1, 2 lugares para o algarismo 8 e os restantes são escolhidos de 7 x 6 formas diferentes (o zero volta a fazer parte)					

No total, há 40 320 + 26 460 = 66 780 números naturais.

24. (UERJ 2011) Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor, o menor número de moedas a serem inseridas na máquina corresponde a:



(A) 5 (B) 13 **(C)** 31 (D) 40

Solução. Considerando que não saem, a princípio duas bolas de mesma cor, podemos simular a observação de 10 em 10:

i) saem 10 bolas todas de cores diferentes; ii) saem mais 10 bolas de cores diferentes; iii) saem mais 10 bolas de cores diferentes;

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10

Cor da 31ª bola retirada

Nesse momento temos 30 bolas expelidas. A 31ª terá que ter uma das cores de três anteriores. Logo, são necessárias 31 moedas.

25. Quantos amigos devem fazer parte de um grupo para garantir que pelo menos dois deles façam aniversário no mesmo mês?

Solução. Como há 12 meses no ano, são necessários 13 amigos no mínimo.

26. Carolina faz coleção de havaianas. Ela possui em uma sapateira 5 pares de havaianas brancas, 4 pares de havaianas douradas, 3 pares de havaianas rosas, 4 pares de havaianas azuis e 10 pares de havaianas estampadas. Todas elas são indistinguíveis ao toque e as havaianas de mesma cor são idênticas. Quantas havaianas ela precisa retirar da sapateira, sem olhar, para garantir que pelo menos duas das havaianas retiradas são brancas, sendo pelo menos uma própria para o pé esquerdo e pelo menos uma própria para o pé direito?

Solução. Há (4 x 2 + 3 x 2 + 4 x 2 + 10 x 2) = 42 havaianas de cores diferentes da branca. Retirando essas 42, sobram 10 brancas. Retirando 6 dessas 10 restantes, garantimos que 1 par esquerda-direita estará formado. Logo, basta retirar 48 havaianas.

Esquerdo	Direito
Dourada	Dourada
Dourada	Dourada
Dourada	Dourada
Dourada	Dourada
Total:	8

Esquerdo	Direito
Rosa	Rosa
Rosa	Rosa
Rosa	Rosa
Total:	6

Esquerdo	Direito
Azul	Azul
Azul	Azul
Azul	Azul
Azul	Azul
Total:	8

Esquerdo	Direito
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Estampada	Estampada
Total:	20

Esquerdo	Direito
Branca	Branca
Branca	
Branca	
Branca	
Branca	
Total:	6

27. Uma urna possui 20 bolas com mesmo peso e formato, sendo 10 delas douradas, 5 prateadas e 5 pretas. Quantas bolas preciso retirar da urna para garantir

a) que pelo menos duas delas serão pretas;

Solução. Basta retirar (10 + 5) (não pretas) + 2 (serão pretas) = 17 bolas.

b) que pelo menos duas delas serão de mesma cor;

Solução. O número de cores é 3. Se retirarmos 3 bolas e todas saírem de cores diferentes, a 4ª bola terá uma das cores anteriores. Logo retirando 4 bolas, duas serão de mesma cor (qualquer delas é suficiente).

c) que pelo menos duas delas serão de cores distintas.

Solução. A situação limite que não satisfaz seria retirar as 10 bolas douradas. Então a 11ª com certeza seria prateada ou preta. Logo, basta retirar 11 bolas.

28. Leonar e Nathália foram a um restaurante asiático e pediram uma porção de 9 harumakis (3 de camarão, 3 de legumes e 3 de salmão). Só é possível descobrir o sabor ao comer cada um deles. Quantos harumakis Nathália deve comer para garantir que comerá pelo menos um de camarão?

Solução. Se Nathália comer os 3 de legumes e os 3 de salmão, o 7º harumaki será de camarão. Logo, no mínimo 7.

29. Uma aluna entediada resolveu listar todos os anagramas que conseguisse da palavra DIRICHLET. Quantos ela deve escrever para garantir que pelo menos dois desses anagramas sejam iguais?

Solução. O número de anagramas diferentes é $\frac{9!}{2!}$. Logo, se ela escrever $\frac{9!}{2!}$ + 1 anagramas este último será igual a um dos anteriores.

30. Uma loja vende empadas de frango, frango com queijo cremoso, camarão, camarão com queijo cremoso, palmito, queijo, carne seca e carne seca com queijo cremoso.

a) De quantas maneiras distintas posso escolher 3 empadas de sabores diferentes nessa loja?

Solução. A escolha pode ser feita de C(8,3) = $\frac{8.7.6.5!}{5!.3!} =$ 56 maneiras distintas.

b) De quantas maneiras diferentes posso escolher 3 empadas nessa loja?

Solução. Essa escolha permite repetir o tipo de empada. Representando como 3 bolas pretas e 7 sinais de adição.

Exemplo: 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 indica a compra de 1 empada de frango, 1 de palmito e 1 de queijo.

No total, temos: $P_{10}^{7,3}$ = $\frac{10.9.8.7!}{7!.3!} =$ 120 maneiras diferentes.

c) Comprei 4 empadas de cada para levar para casa e minha mãe pediu para que eu reservasse pelo menos uma de palmito para ela. Quantas eu precisarei reservar para garantir que pelo menos uma seja de palmito? Considere as empadas indistinguíveis visualmente.

Solução. Comprando 4 empadas dos outros 7 sabores, temos 4 x 7 = 28 empadas. Comprando a 29ª garantimos que será de um sabor diferente. Logo, palmito. Basta comprar 29 empadas.