EXERCÍCIOS DE REVISÃO PFV - GABARITO

1) Seja **f** uma função de N em N definida por f(n) = 10 – 2n. Escreva o conjunto domínio e o conjunto imagem desta função.

GABARITO:

D(f) = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
Im(f) = {0, 2, 4, 6, 8, 10}
Sendo uma função de N em N, não pode haver imagens negativas. Logo o maior valor do domínio será 5, pois f(5) = 10 – 2(5) = 0.
Logo as respectivas imagens dos elementos do domínio são:
f(0) = 10 – 2(0) = 10; f(1) = 10 – 2(1) = 8; f(2) = 10 – 2(2) = 6; f(3) = 10 – 2(3) = 4; f(4) = 10 – 2(4) = 2 e f(5) = 10 – 2(5) =0.

2) Considere a relação $R = \{(x, y) \in A\mathbf{X}B \mid y = x^2 - x\}$ e os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} .
a) Determine o conjunto R.
b) Determine domínio e imagem da relação R.
c) R é uma função de A em B? Justifique sua resposta.

GABARITO:

Os valores de "x" serão os elementos do conjunto A. Os valores de "y" serão calculados e, se forem elementos de B, formarão o par ordenado (x,y) de R.

a) $$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - (1) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - (2) = 2 \Rightarrow R = \{(1,0);(2,2);(3,6)\} \\ x = 3 \Rightarrow y = (3)^2 - (3) = 6 \end{cases}$$

b) D(R) = {1, 2, 3} Im(R) = {0, 2, 6}

c) Como <u>todos os elementos de A</u> se relacionaram com algum elemento de B e, além disso, cada elemento de A só relacionou-se com <u>um único elemento de B</u>, R é função de A em B.

3) Considere as funções com domínio nos números reais dadas por $f(x) = 3x^2 - x + 5$ e $g(x) = -2x + 9$.

a) Calcule o valor de $\dfrac{f(0) + g(1)}{f(1)}$

b) Determine o valor de ***x*** tal que f(x) = g(x).

GABARITO:

Calculando as imagens sob as funções e igualando as imagens de "f" e "g", temos:

a) $$\begin{cases} f(0) = 3.(0)^2 - (0) + 5 = 5 \\ f(1) = 3.(1)^2 - (1) + 5 = 3 - 1 + 5 = 7 \Rightarrow \dfrac{f(0) + g(1)}{f(1)} = \dfrac{5+7}{7} = \dfrac{12}{7} \\ g(1) = -2.(1) + 9 = -2 + 9 = 7 \end{cases}$$ **.**

$$\text{b) } f(x)=g(x)\Rightarrow 3x^2-x+5=-2x+9\Rightarrow 3x^2-x+5+2x-9=0\Rightarrow 3x^2+x-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1+7}{6}=\dfrac{6}{6}=1\\ x=\dfrac{-1-7}{6}=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}\end{cases}.$$

4) Considere a função $f(x)=5+\dfrac{3}{x+2}$, definida em R– {– 2}. Determine:

a) $f(-5)$

b) o elemento do domínio cuja imagem é igual a -1.

GABARITO:

Os valores são encontrados pela substituição ora no valor de "x", ora no valor de f(x).

$$\text{a) } f(-5)=5+\frac{3}{(-5)+2}=5+\frac{3}{-3}=5-1=4$$

$$\text{b)}\begin{cases}f(x)=-1\\ f(x)=5+\dfrac{3}{x+2}\end{cases}\Rightarrow 5+\frac{3}{x+2}=-1\Rightarrow\frac{3}{x+2}=-6\Rightarrow -6x-12=3\Rightarrow -6x=15\Rightarrow x=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$$

5) Considere as funções ***f*** e ***g*** definidas por $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$ e $g(x)=\sqrt{x}$. Determine o valor de $\dfrac{f(-2)}{g(4)}$.

GABARITO:

$$\frac{f(-2)}{g(4)}=\frac{\dfrac{1-(-2)^2}{(-2)}}{\sqrt{4}}=\frac{\dfrac{1-4}{-2}}{2}=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

6) Determine o domínio da função $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-6}}{9-3x}$.

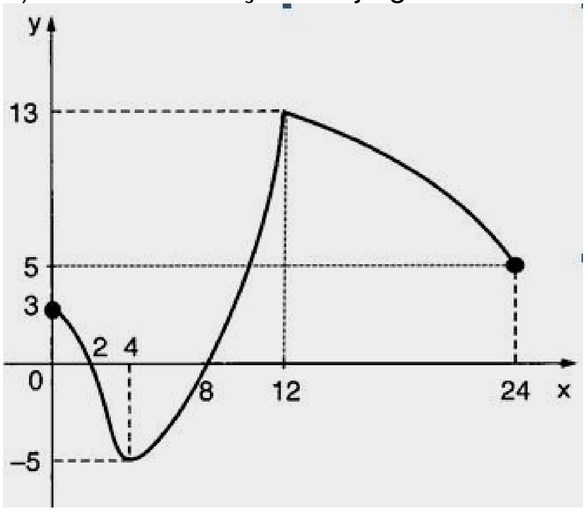
GABARITO:

Há duas restrições na função. O radicando no numerador não deve ser negativo e o denominador não deve ser nulo. Estudando os casos e uniformizando as condições, temos:

i) $2x-6\ge 0\Rightarrow 2x\ge 6\Rightarrow x\ge 3$. **ii)** $9-3x\ne 0\Rightarrow -3x\ne -9\Rightarrow x\ne 3$.

Os valores que satisfazem ambas as condições devem ser maiores que 3: D(f) =]3 +∞[.

7) Observe a função ***f*** cujo gráfico está representado abaixo.



a) indique o domínio e a imagem de **f**.
b) indique os intervalos onde **f** é crescente e decrescente.
c) indique os intervalos onde **f > 0** e **f < 0**.
d) calcule o valor de **f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(12) + f(24)**

GABARITO:

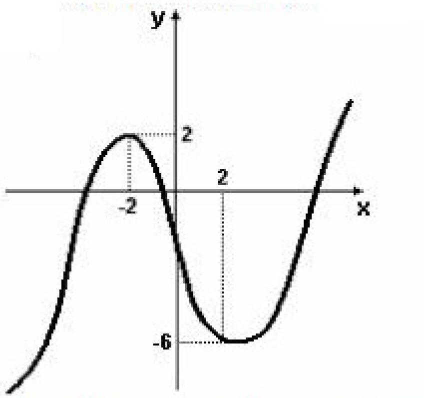
a) Os limites no eixo X vão de 0 a 24. Logo, $D(f) = [0,24]$**. O gráfico está verticalmente limitado entre os valores -5 e 13. Logo,** $\mathrm{Im}(f) = [-5,13]$**.**

b) Os valores x = 2 e x = 8 indicam locais onde o gráfico muda a direção. Temos:
i) a função é crescente no intervalo $[4,12]$
ii) decrescente nos intervalos $[0,4]$ **e** $[12,24]$**.**

c) Os pontos onde a função intercepta o eixo X representam as raízes, isto é, os pontos de ordenada nula ou ainda os pontos onde a função se anula. A função é positiva, (gráfico acima do eixo X), f > 0, ou negativa (gráfico abaixo do eixo X), f < 0. Temos:
i) f > 0 nos intervalos $]0,2[$ **e** $]8,24[$**.** **ii) f < 0 no intervalo** $]2,8[$**.**

d) Identificando os valores no gráfico, temos:
$f(0) + f(2) + f(4) + f(8) + f(12) + f(24) = 3 + 0 + (-5) + 0 + 13 + 5 = 16$**.**

8) Observe o gráfico da função polinomial $f : IR \to IR$ mostrado a seguir. Responda:



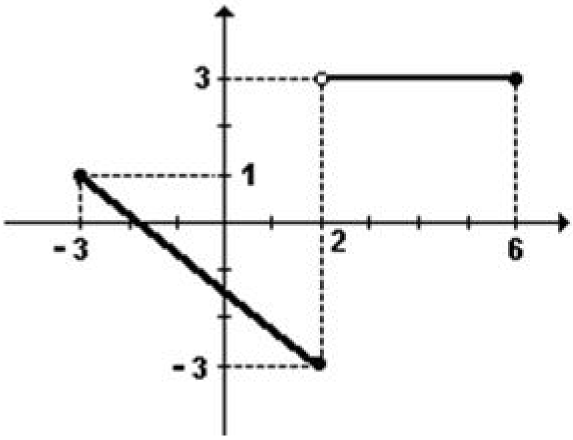
a) Qual imagem da função no intervalo [-2, 2]?
b) Determine o valor da expressão: y = f(f(-2)) + 3.f(2).

GABARITO:

a) Observando o gráfico temos que:
f(-2) = 2 e f(2) = - 6. Logo, Im(f) = [- 6, 2]
b) Identificando os valores no gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(-2) = 2 \Rightarrow f(f(-2)) = f(2) = -6 \\ 3.f(2) = 3(-6) = -18 \end{cases} \Rightarrow y = (-6) + (-18) = -24$$

9) Dado o gráfico da função **f** mostrada, responda.



a) Qual o domínio e a imagem da função?
b) Em que intervalos a função é crescente?
c) Em que intervalo a função é decrescente?
d) Qual o valor de $\dfrac{f(5)}{f(-3) - f(2)}$?

GABARITO:

Observando os valores mostrados no gráfico, temos:

a) $D(f) = [-3,6]$ **e** $\text{Im}(f) = [-3,3]$**. Repare que aparece o ponto (2,3) está aberto. Esta condição evita que x = 2 seja possua duas imagens, já que o ponto (2, -3) está no gráfico.**

b) Em nenhum intervalo a função é crescente. No intervalo]2, 6] a função é constante.

c) A função é decrescente no intervalo [-3, 2].

d) Identificando os valores no gráfico, temos: $\dfrac{f(5)}{f(-3) - f(2)} = \dfrac{3}{1 - (-3)} = \dfrac{3}{4}$**.**

10) A empresa de telefonia celular ABC oferece um plano mensal para seus clientes com as seguintes características:

- Para um total de ligações de até 50 minutos, o cliente paga um valor fixo de R$40,00;
- Se os 50 minutos forem excedidos, cada minuto de excesso será cobrado pelo valor de R$1,50 (além dos R$40,00 fixos).

a) Determine o valor pago por um cliente que utilizou o celular por 74 minutos em certo mês.
b) Em certo mês, utilizando o plano descrito acima, o valor a ser pago por um cliente foi de R$101,50. Determine quantos minutos foram utilizados.

GABARITO:

a) Se o cliente utilizou 74 minutos, então foram ultrapassados (74 – 50) = 24 minutos. Logo o cliente pagará: $\boxed{R\$40,00 + 24 \times R\$1,50 = R\$40,00 + R\$36,00 = R\$76,00}$**.**

b) Considerando "t" o número de minutos <u>além</u> dos 50 minutos, a equação que representa esta situação é R$101,50 = R$40,00 + t x R$1,50.

Resolvendo, temos: $\boxed{101,5 = 40 + 1,5.t \Rightarrow 1,5t = 101,5 - 40 \Rightarrow t = \frac{61,5}{1,5} = 41\min}$**. Logo, foram utilizados no total (50 + 41) = 91 minutos.**

11) Um grupo de amigos decidiu fazer um churrasco para comemorar seus dez anos de formatura. O local escolhido cobra um valor fixo de R$ 200,00 pelo aluguel do espaço mais R$ 30,00 por pessoas presente.
a) Determine uma expressão que dê o valor total a ser pago ***y*** em função do número ***x*** de presentes ao churrasco.
b) Todos os presentes vão dividir a conta igualmente. Determine uma expressão que relacione o valor ***m*** pago por pessoas com o número x de presentes ao churrasco.
c) Se cada pessoa presente teve que pagar R$ 38,00, calcule o número de pessoas que compareceu ao churrasco.

GABARITO:

a) Ilustrando a situação:
Se forem 2 pessoas, o valor pago será 200 + 30(2) = R$260,00.
Observando que o valor pago é encontrado pela soma do valor fixo com um múltiplo de 30, a expressão é: y(x) = 200 + 30x.
b) Novamente considerando situações, temos:
i) Duas pessoas pagariam a conta, igualmente, de R$260,00, cada uma: (260/2) = R$130,00.

No caso de "m" pessoas, cada pessoa pagaria o valor de y/x ou $\boxed{m(x) = \frac{200 + 30(x)}{x}}$**.**

c) O valor de R$38,00 corresponde a m(x). Substituindo na expressão anterior, temos:

$$38=\frac{200+30(x)}{x}\Rightarrow 38x-30x=200\Rightarrow 8x=200\Rightarrow x=\frac{200}{8}=25\text{ pessoas}$$.

12) As três escalas mais usadas para medir temperaturas são Celsius (℃), Fahrenheit (℉) e Kelvin (K). As conversões podem ser feitas de acordo com as instruções da tabela abaixo.

Celsius → Fahrenheit	**Celsius → Kelvin**
Multiplicar os graus Celsius por 1,8 e somar 32	Somar 273 aos graus Celsius

a) A água entra em ebulição aos 100ºC. Qual é o valor correspondente a essa temperatura na escala Fahrenheit?
b) Escreva uma sentença que expresse uma temperatura ***y*** na escala Fahrenheit em função da temperatura ***x*** na escala Celsius.
c) Um termômetro indica uma temperatura de 68℉. Converta essa temperatura em graus Celsius e em Kelvin.

GABARITO:

a) Consultando a tabela observa-se que para representar uma temperatura medida em Celsius em Fahrenheit, basta utilizar a fórmula T_F = 1,8.T_C + 32. No caso, temos:

$$T_F=1{,}8.(100)+32=180+32=212^{\circ}F$$.

b) Observando a operação efetuada acima, temos: y(x) = 1,8x + 32.

c) Aplicando sucessivamente as operações indicadas na tabela, temos:

i) $$\begin{cases}T_F=68^{\circ}\\ T_F=1{,}8.T_C+32\end{cases}\Rightarrow 68=1{,}8T_C+32\Rightarrow 1{,}8T_C=68-32\Rightarrow T_C=\frac{36}{1{,}8}=20^{\circ}C$$.

ii) $$\begin{cases}T_K=273+T_C\\ T_C=20^{\circ}C\end{cases}\Rightarrow T_K=273+20=293^{\circ}K$$.

13) (FGV) O gráfico da função **f(x) = mx + n** passa pelos pontos (-1,3) e (2,7). Determine o valor de **m**.

GABARITO:

$$\text{i)}\begin{cases}3=m.(-1)+n\\ 7=m.(2)+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-m+n=3\rightarrow\times(2)\\ 2m+n=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2m+2n=6\\ 2m+n=7\end{cases}\Rightarrow 3n=13\Rightarrow n=\frac{13}{3}$$

$$\text{ii)}-m+\frac{13}{3}=3\Rightarrow m=\frac{13}{3}-3=\frac{13-9}{3}=\frac{4}{3}$$

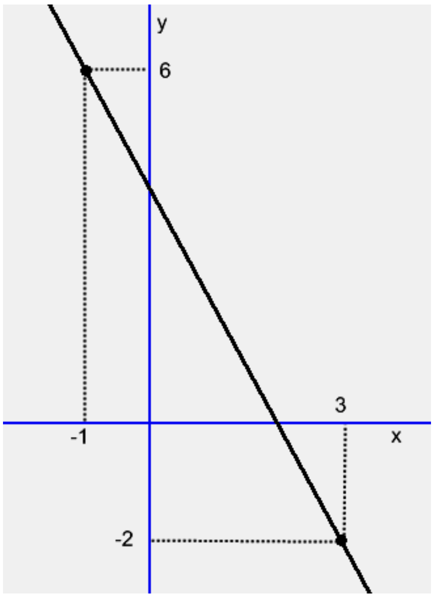
14) O gráfico da função afim ***y = ax + b*** passa pelos pontos de coordenadas $(2,3)$ e $(-4,5)$. Determine os valores de ***a*** e de ***b***.

GABARITO:

$$\begin{cases} 3 = a(2)+b \\ 5 = a(-4)+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=3 \rightarrow \times(-1) \\ -4a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-b=-3 \\ -4a+b=5 \end{cases} \Rightarrow -6a=2 \Rightarrow a=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

$$b=3-2a=3-2\left(-\frac{1}{3}\right)=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$$

15) Determine a lei da função afim cujo gráfico está representado abaixo.



GABARITO:

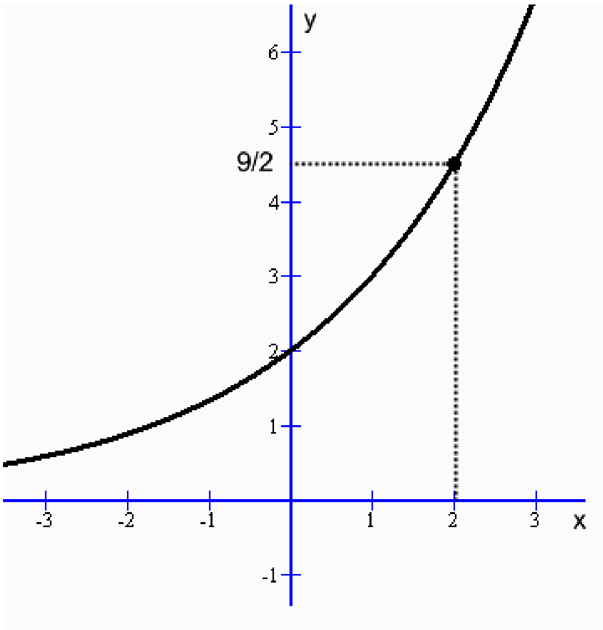
$$\begin{cases} 6 = a(-1)+b \\ -2 = a(3)+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=6 \rightarrow \times(-1) \\ 3a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-6 \\ 3a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=\frac{-8}{4}=-2.$$

$$b=6+a=6+(-2)=4$$

$$f(x)=-2x+4$$

16) O gráfico abaixo é da função de lei $f(x)=2.b^x$, onde ***b*** é um número real positivo.



a) Determine o valor de ***b***.

b) Calcule $f(-2)$.

GABARITO:

a) $\frac{9}{2} = 2.b^2 \Rightarrow 9 = 4b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

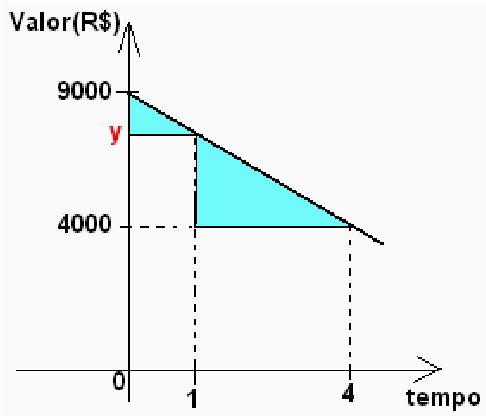
Logo, $f(x) = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^x$

b) $f(-2) = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 2.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2.\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9}$

17) O valor de um carro novo é de R$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

a) R$8.250,00
b) R$8.000,00
c) R$7.750,00
d) R$7.500,00
e) R$7.000,00

GABARITO:



A informação indica que o carro novo (tempo de uso igual a zero) vale R$9000,00 e após 4 anos (tempo de uso = 4) vale R$4000,00. A situação está representada na figura.

Solução 1. Estabelecendo a semelhança entre os triângulos assinalados, temos:

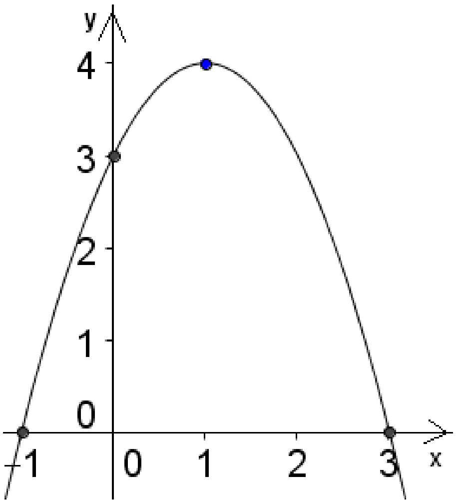
$$\frac{9000-y}{0-1}=\frac{y-4000}{1-4}\Rightarrow\frac{9000-y}{-1}=\frac{y-4000}{-3}\Rightarrow$$
$$-27000+3y=-y+4000\Rightarrow 4y=31000\Rightarrow y=\frac{31000}{4}=7750.$$

18) Construa um esboço dos gráficos das funções quadráticas a seguir e indique o domínio e a imagem:

a) **f(x) = – x² + 2x + 3**

GABARITO:

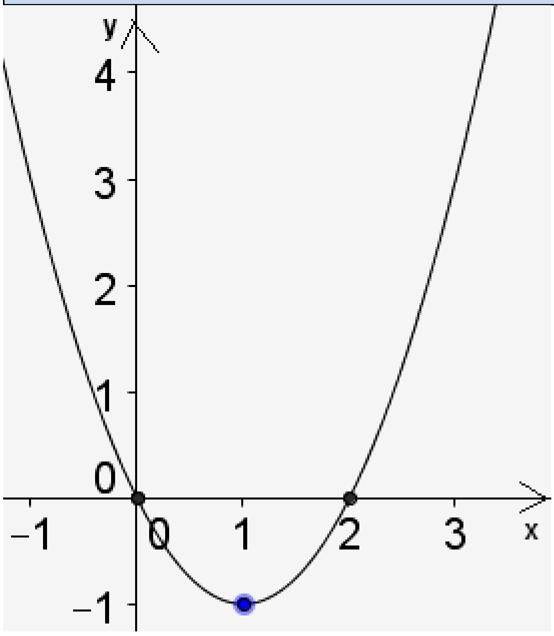
$$f(x)=-x^2+2x+3:\begin{cases} f(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(-1)(3)}}{-2}=\dfrac{-2\pm 4}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\end{cases}\\ f(0)=-(0)^2+2(0)+3=3\\ V=\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{(2)}{2(-1)};-\dfrac{16}{4(-1)}\right)=(1;4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(f)=IR\\ IM(f)=]-\infty,4]\end{cases}$$



b) **f(x) = x^2 – 2x**

GABARITO:

$$f(x)=x^2-2x:\begin{cases} f(x)=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=2\end{cases}\\ f(0)=(0)^2-2(0)=0\\ V=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\frac{(-2)}{2(1)};-\frac{4}{4(1)}\right)=(1;-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(f)=IR\\ IM(f)=[-1,+\infty[\end{cases}$$



19) (PUC) Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é **x – 10**, sendo **x** o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a **70 – x**. Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é, aproximadamente, uma função quadrática de **x**, cujo valor máximo, na unidade monetária usada, é:

a) 1200 b) 1000 c) 900 d) 800 e) 600

GABARITO:

De acordo com as informações, o custo total da produção é C(x) = 10.(70 – x), pois 10 é o preço unitário e (70 – x) a quantidade produzida. O total obtido pela venda do produto será V(x) = x.(70 – x). Sendo o lucro a diferença entre o valor arrecadado na venda e o custo, temos:

$$L(x)=x.(70-x)-10.(70-x)=70x-x^2-700+10x=-x^2+80x-700$$

$$L(\text{máximo})=y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{[6400-4(-1)(-700)]}{4(-1)}=-\frac{[6400-2800]}{-4}=\frac{3600}{4}=900.$$

20) O número de jogos de uma competição com ***n*** participantes, onde cada participante joga contra cada um dos demais uma vez, é dada pela função $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

a) Determine o número de jogos de um campeonato com 10 participantes.

b) Se um campeonato disputado nesses moldes teve 21 jogos, qual foi o seu número de participantes?

GABARITO:

a) Com 10 participantes, n = 10. Substituindo na função e calculando f(10), temos:

$\boxed{f(10) = \frac{10(10-1)}{2} = \frac{10(9)}{2} = \frac{90}{2} = 45}$**. Logo haverá 45 jogos.**

b) Se há 21 jogos, então f(n) = 21. Substituindo, temos:

$$\begin{cases} f(n) = \frac{n(n-1)}{2} \\ f(n) = 21 \end{cases} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 21 \Rightarrow n^2 - n = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0 \Rightarrow n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-42)}}{2(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{1+13}{2} = 7 \\ n = \frac{1-13}{2} = -6 < 0 \end{cases}.$$

O número de participantes deve ser um número inteiro e positivo. Logo havia 7 participantes.

21) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve a altura de sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ ($t \geq 0$), onde ***t*** é o tempo medido em segundos e ***h(t)*** é a altura da bola, em metros, no instante ***t***. Determine, após o chute:

a) a altura máxima atingida pela bola;

b) o tempo que a bola leva para retornar ao solo.

GABARITO:

a) A trajetória é uma parábola de concavidade para baixo. A altura máxima será a ordenada do vértice: $\boxed{h_{Max} = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4(-2)(0)}{4(-2)} = -\frac{64}{-8} = 8m}$**.**

b) O tempo total é o dobro do tempo levado até atingir a altura máxima. Logo, esse tempo é a distância entre as raízes:

$$\boxed{\begin{array}{l} -2t^2 + 8t = 0 \Longrightarrow -2t(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \\ \text{Tempo total}: d(x_1, x_2) = |4 - 0| = 4s \end{array}}$$**.**

22) O lucro mensal de uma empresa é dado pela lei: $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x representa a quantidade de peças a serem produzidas e ***L*** o valor do lucro, em milhares de reais.
a) Qual a quantidade ideal de peças a serem produzidas, para gerar o maior lucro possível?
b) Qual o valor máximo possível para esse lucro?

GABARITO:

a) O gráfico da lei do lucro é uma parábola de concavidade para baixo. A quantidade de peças que gera o lucro máximo será a abscissa do vértice:

$$x_{Max} = x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2(-1)} = 15 \text{ peças}$$.

b) O lucro máximo será a ordenada do vértice:

$$\Delta = (30)^2 - 4(-1)(-5) = 900 - 20 = 880$$
$$L_{Max} = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{880}{4(-1)} = R\$220.000,00$$.

23) Resolva as inequações abaixo:

a) $(2x-1).(-5x+10) \leq 0$

GABARITO:

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow zeros: 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$g(x) = -5x + 10 \Rightarrow zeros: -5x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$$

	1/2	2	
f(x) = 2x – 1	-	+	+
g(x) = – 5x + 10	+	+	-
$(2x-1).(-5x+10)$	-	+	-

Solução:]-∞, 1/2] ∪ [2, +∞[.

b) $\frac{(x+1).(x-2)}{x^2 - 6x - 16} > 0$

GABARITO:

$$f(x) = (x+1).(x-2) \Rightarrow zeros: (x+1).(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$
$$g(x) = x^2 - 6x - 16 = (x-8).(x+2) \Rightarrow zeros: (x-8).(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -2 \end{cases}$$

	-2	-1	2	8	
$f(x) = (x + 1).(x - 2)$	+	+	-	+	+
$g(x) = x^2 - 6x - 16$	+	-	-	-	+
$\dfrac{(x+1).(x-2)}{x^2 - 6x - 16}$	+	-	+	-	+

Solução:]-∞, -2[∪]-1, 2[∪]8, +∞[.