PROFESSORES: MARCOS JOSÉ / WALTER TADEU

1º Exame de Qualificação - 2024

MATEMÁTICA - GABARITO

Questão 2. (Interdisciplinar) Em um experimento, dois relógios idênticos e sincronizados apresentam uma diferença perceptível na medida do tempo. Um dos relógios se encontra em repouso, enquanto o outro está em movimento a uma velocidade escalar v constante, próxima à velocidade escalar c da luz. Segundo a teoria da relatividade de Albert Einstein, entre o intervalo de tempo Δt_1, medido pelo relógio em repouso, e o intervalo de tempo Δt_2, medido pelo relógio em movimento, observa-se a seguinte relação:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Considere que o deslocamento do relógio ocorre à velocidade v = $\frac{12c}{13}$ durante Δt_2 = 10 segundos. Logo, o tempo Δt_1, em segundos, decorrido no relógio em repouso, é igual a:

(A) 28 **(B)** 26 (C) 24 (D) 22

Solução. Substituindo os valores indicados, temos:

$$\Delta t_1 = \frac{10}{\sqrt{1-\frac{\left(12c/13\right)^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{1-\frac{144c^2/169}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{1-\frac{144}{169}}} = \frac{10}{\sqrt{\frac{25}{169}}} = \frac{10}{5/13} = \frac{130}{5} = 26.$$

Questão 5. (Interdisciplinar) O menor tempo medido em laboratório ocorreu na escala de zeptossegundos e corresponde ao intervalo Δt em que uma partícula de luz percorre a distância que separa os centros atômicos de uma única molécula de hidrogênio. Uma unidade de zeptossegundo equivale a 10^{-21} segundo. Admita que a velocidade da luz seja de 3×10^8 m/s e que a distância entre os centros atômicos de uma molécula de hidrogênio seja de $7,2 \times 10^{-11}$ metro. Nessas condições, no referencial da partícula de luz, o valor de Δt, em zeptossegundos, é igual a:

(A) 120 (B) 180 **(C)** 240 (D) 320

Solução. Calculando o tempo, temos:

$$\Delta t(s) = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{7,2 \times 10^{-11}}{3 \times 10^8} = \frac{7,2 \times 10^{-11} \times 10^{-8}}{3} = 2,4 \times 10^{-19} \text{ segundo.}$$

Em, zeptossegundos, será:

$$\frac{1\ zeptossegundo}{10^{-21}\ segundo} = \frac{x}{2,4 \times 10^{-19}\ segundo} \Rightarrow x = \frac{2,4 \times 10^{-19}}{10^{-21}} = 2,4 \times 10^{-19} \times 10^{21} = 2,4 \times 10^2 = 240.$$

Questão 28. A sequência (a_n) = (0, 0, 5, 5, 0, ...), em que n ∈ IN, é definida por:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \\ a_3 = 5 \\ a_n = x, \text{ sendo x o algarismo da unidade simples da soma } a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \end{cases}$$

A soma dos 100 primeiros elementos da sequência (a_n) é igual a:

(A) 125 (B) 175 (C) 200 **(D)** 250

Solução. Calculando mais dois valores, temos:

$a_6 = a_5 + a_4 + a_3 = 0 + 5 + 5 = 10 \to 0$; **$a_7 = a_6 + a_5 + a_4 = 0 + 0 + 5 = 5$;**

Dessa forma o padrão é (0055)(0055)(0055)...(0055), sendo 25 quádruplas cuja soma é 10, pois 25 x 4 = 100.

Logo a soma dos 100 elementos será (10) x 25 = 250.

Questão 29. Considere os seguintes números naturais:

$X = 3 \times 5^2 \times 2^y$

W = 120

Z = 48

Sabendo que o máximo divisor comum de X, W e Z é 24, o valor de y é:

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

Solução. Utilizando a definição de MDC como o produto dos fatores primos comuns elevados aos menores expoentes, temos:

i) $X = 3 \times 5^2 \times 2^y$ $W = 2^3 \times 3 \times 5$ $Z = 2^4 \times 3$

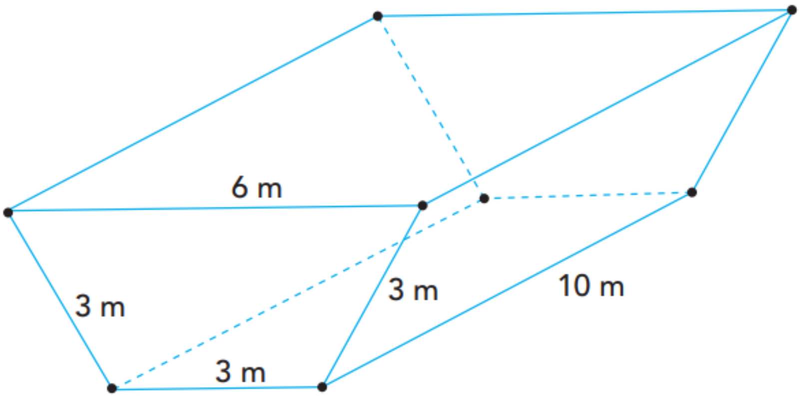
ii) MDC (X, Y, Z) = 24 = $2^3 \times 3$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

OBS: Observando as decomposições o valor de y pode ser qualquer natural maior ou igual a 3. A questão é passível de anulação.

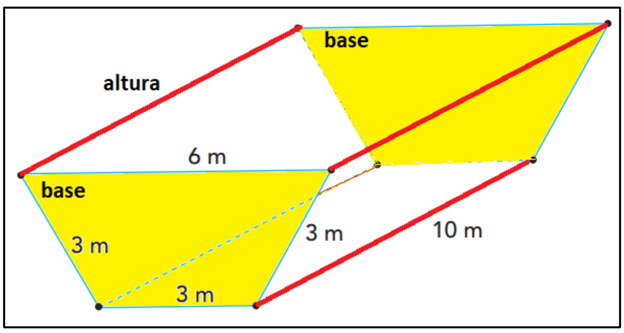
Questão 30. A figura a seguir representa um prisma reto com aresta lateral de 10 m. Sua base é um trapézio com três lados medindo 3 m e o quarto lado medindo 6 m.

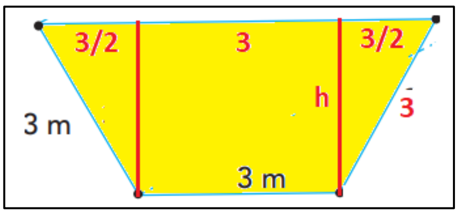


O volume do prisma, em m3 , é igual a:

(A) $\frac{135\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{155\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{175\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{195\sqrt{3}}{2}$

Solução. No prisma as bases são paralelas e as faces laterais, paralelogramos. Como o prisma é reto, as faces laterais são retângulos e, portanto, a altura do prisma será a medida da aresta lateral. As bases são trapézios isósceles.



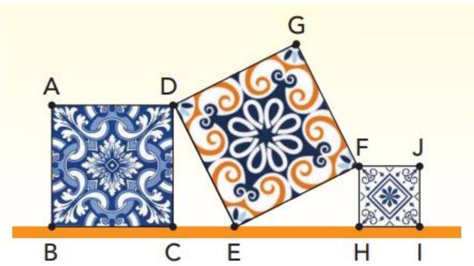


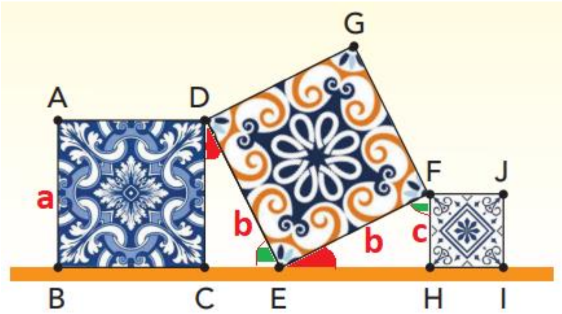
i) Altura da base: h = $\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ii) Área da base (trapézio) = $\frac{(B+b).h}{2} = \frac{(3+6).\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

iii) O volume será: Área(base) x altura (prisma) = $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ **x 10 =** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ **x 5 =** $\frac{135\sqrt{3}}{2}$ **.**

Questão 31. Os azulejos quadrados ABCD, DEFG e FHIJ foram dispostos em um mostruário, conforme ilustrado na imagem. Nesse arranjo, os vértices B, C, E, H e I são colineares.





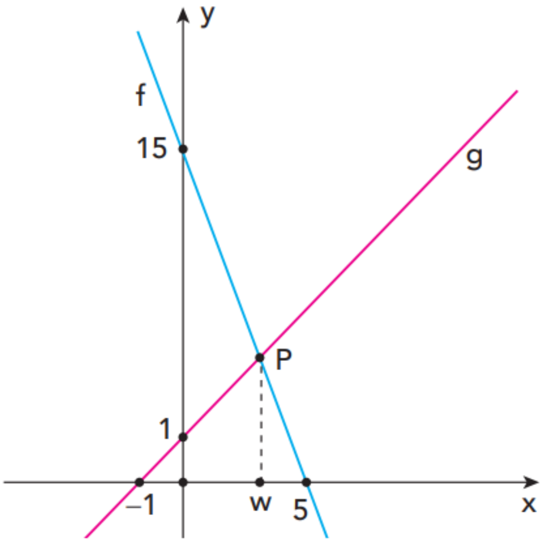
As medidas das áreas revestidas pelos azulejos ABCD, DEFG e FHIJ, em cm^2, são, respectivamente, 93, 157 e X.

O lado, em centímetros, do azulejo de menor área é igual a:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 **(D)** 8

Solução. Os triângulos DCE e EFH são congruentes, pois possuem um lado (b) e dois ângulos congruentes. O valor de CE é $b^2 - a^2 = 157 - 93 = 64$. Logo, $c^2 = 64$ e, portanto o lado menor vale 8.

Questão 32. Observe o plano cartesiano, no qual estão representadas as funções f e g:



O ponto P de interseção entre os gráficos dessas funções possui abscissa w, cujo valor é:

(A) $\frac{5}{2}$ (B) 3 **(C)** $\frac{7}{2}$ (D) 4

Solução. Encontrando as expressões das retas, temos:

i) g: y = ax + b -> $\begin{cases} 1 = a.0 + b => b = 1 \\ 0 = (-1).a + b => -a = -1 => a = 1 \end{cases}$**. Logo y = x + 1.**

ii) f: y = ax + b -> $\begin{cases} 15 = a.0 + b => b = 15 \\ 0 = (5).a + b => 5a = -15 => a = -3 \end{cases}$**. Logo y = – 3x + 15.**

iii) Encontrando a intersecção, vem: x + 1 = – 3x + 15 => 4x = 14 => x = $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$**.**

Questão 33. Os clientes de um banco podem realizar apenas duas operações financeiras:

• fazer investimentos que rendem juros compostos a uma taxa mensal de 1%; ou

• pegar empréstimos com juros compostos a uma taxa mensal de 5%.

O banco usa o dinheiro dos investimentos para conceder os empréstimos, obtendo lucro nessas transações.

Considere que um cliente X investiu R$ 1.000,00 e que o banco emprestou esse valor a um cliente Y. Após 12 meses, o cliente X recebeu o montante pela aplicação nesse período e Y quitou o empréstimo.

Admitindo $(1{,}01)^{12} = 1{,}13$ e $(1{,}05)^{12} = 1{,}80$, o lucro, em reais, obtido pelo banco com essas duas operações financeiras é igual a:

(A) 470 (B) 520 **(C)** 670 (D) 820

Solução. Analisando cada operação, temos:

i) Cliente X: Com investimento de 1000 o cliente X recebeu após 12 meses: 1000.$(1{,}01)^{12}$ = 1000.(1,13) = 1130;

ii) Cliente Y: O valor de 1000 foi pago ao fim de 12 meses ajustado em 1000.$(1{,}05)^{12}$ = 1000.(1,8) = 1800;

Dessa forma o banco retirou R$1.130,00 dos R$1.800,00 pagos pelo cliente Y para pagamento ao cliente X.

Logo, o banco lucrou (1 800 – 1 130) = R$670,00.

Questão 34. Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a:

(A) 10% (B) 20% (C) 30% (D) 40%

Solução. Para que o terceiro amigo retire a primeira bola preta, é necessário que os dois primeiros só tirem branca. Logo, os possíveis resultados são: (BBP) = $\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{5}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}$ **= 0,2 = 20%.**