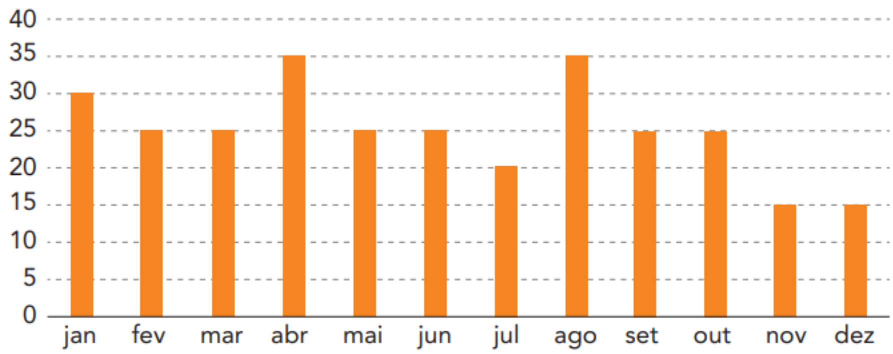
Matemática - GABARITO

1. (UERJ) O gráfico a seguir apresenta o quantitativo de mortes violentas de pessoas da comunidade LGBTQIA+, no ano de 2021, no Brasil.

MORTES VIOLENTAS DE LGBTQIA+ NO BRASIL EM 2021



Adaptado de grupogaydabahia.com, 2022.

Com base nos dados do gráfico, calcule a média aritmética mensal de mortes violentas nessa comunidade, em 2021, no Brasil.

Solução. Calculando a média aritmética de dados agrupados, temos:

$$\overline{x} = \frac{30+6.(25)+2.(35)+20+2.(15)}{1+6+2+1+2} = \frac{30+150+70+20+30}{12} = \frac{300}{12} = 25.$$

2. (UERJ) Uma nutricionista recomendou, para uma pessoa adulta, a ingestão de pão, fruta e iogurte no café da manhã. Os três alimentos, em conjunto, devem conter, exatamente, 16 g de proteínas, 124 g de carboidratos e 10 g de gorduras. Admita a seguinte quantidade de nutrientes, em gramas, em uma porção de 100 g de cada alimento:

QUANTIDADE DE NUTRIENTE (EM G)	PORÇÃO DE 100 G		
	PÃO	FRUTA	IOGURTE
proteínas	8	0	4
carboidratos	60	20	2
gorduras	4	0	3

A partir da tabela, calcule quantas porções de cada alimento essa pessoa deve ingerir de modo a consumir as quantidades de nutrientes recomendadas para seu café da manhã.

Solução. Considerando P, F e I as quantidades de porções, respectivamente, de frutas, pães e iogurtes, temos um sistema:

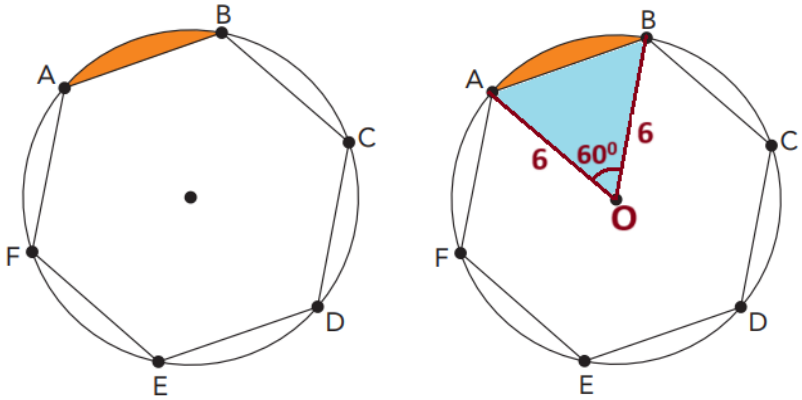
$$\begin{cases} 8P + 0F + 4I = 16 \\ 60P + 20F + 2I = 124 \\ 4P + 0F + 3I = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30P + 10F + I = 62 \\ 2P + I = 4 \rightarrow (\times -2) \\ 4P + 3I = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30P + 10F + I = 62 \\ -4P - 2I = -8 \\ 4P + 3I = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30P + 10F + I = 62 \\ I = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

=> Se I = 2, então 4P = 10 – 3.(2) => 4P = 4 => P = 1.

Dessa forma, 10F = 62 – 2 – 30.(1) => 10F = 30 => F = 3.

As quantidades são: 1 porção de pão, 3 porções de frutas e 2 porções de iogurte.

3. (UERJ) Um hexágono regular convexo ABCDEF está inscrito em um círculo, como mostra a figura a seguir. Sabe-se que o raio do círculo mede 6 m.



Calcule a área da região destacada, compreendida entre o menor arco AB do círculo e o lado AB do hexágono.

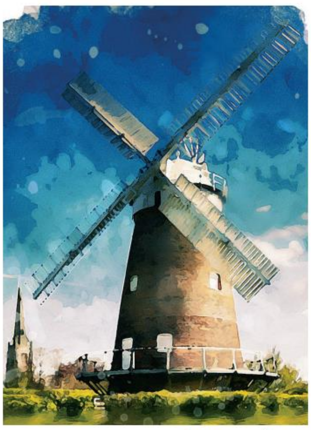
Solução. A área pedida será a diferença entre a área do setor circular de 60^0 e a área do triângulo OAB.

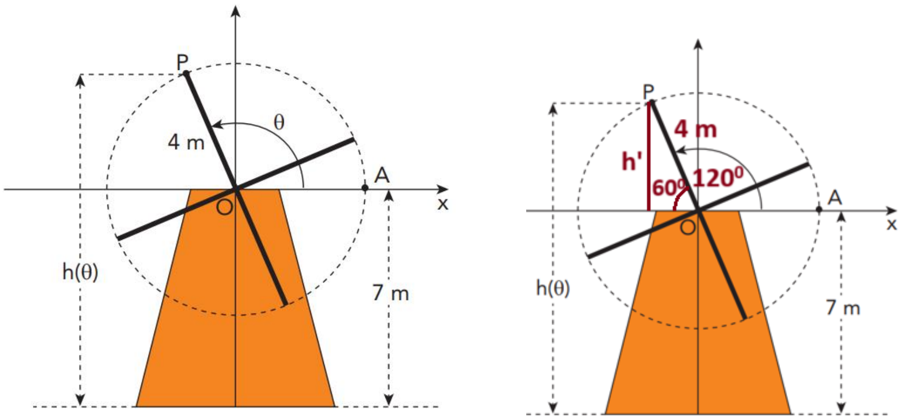
i) Área do setor circular: vale a sexta parte da área da circunferência: A(setor) = $\frac{\pi.(6)^2}{6} = \frac{36\pi}{6} = 6\pi$.

ii) Área do triângulo OAB: A(tri) = $\frac{(6).(6).sen60^\circ}{2} = \frac{36.\left(\sqrt{3}/2\right)}{2} = 9\sqrt{3}$.

iii) Área pedida: $(6\pi - 9\sqrt{3})$ m².

4. (UERJ) As imagens a seguir mostram a ilustração de um moinho de vento e seu esquema plano. Considere que a parte inferior do moinho é representada por um tronco de cone circular reto de bases paralelas e que suas quatro pás se movem no sentido anti-horário.


fonte: google.com



Admita as seguintes informações:
- o tronco possui altura de 7 m;
- cada pá mede 4 m de comprimento, sendo uma delas OP;
- a trajetória do movimento de rotação da extremidade P é a circunferência de centro O e raio de 4 m;
- o ângulo AÔP = θ é medido no sentido anti-horário a partir do eixo horizontal x;
- a altura h(θ) do ponto P é relativa ao plano horizontal que contém a base maior do tronco.

Calcule a altura h do ponto P quando θ é igual a 120°.

Solução. Observando a figura temos que a altura pedida é a soma 7 + h'.

Temos que h' = 4. Sem 60^0 = $4.\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $2.\sqrt{3}$ m. Logo, h = $(7 + 2.\sqrt{3})$ m.

5. (UERJ) Uma instituição financeira oferece os seguintes tipos de aplicação a seus clientes:

• Alfa – rendimento com juros simples, a uma taxa de 12% ao ano, durante 5 anos;

• Beta – rendimento com juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano, durante 2 anos.

Considere que um cliente fez uma aplicação Alfa no valor de R$ 2.000,00. Após 5 anos, esse cliente fez uma aplicação Beta, durante dois anos, com o montante y obtido na aplicação Alfa acrescido de x reais. Sabe-se que os juros obtidos pela aplicação Beta foram iguais a R$ 1.050,00.

Calcule o valor de x, em reais, que foi acrescentado ao montante y.

Solução. Calculando os montantes, temos:

i) M(Alpha) = 2.000.[1 + 5.(0,12)] = 2.000.(1 + 0,6) = 2.000.(1,6) = R$ 3.200,00.

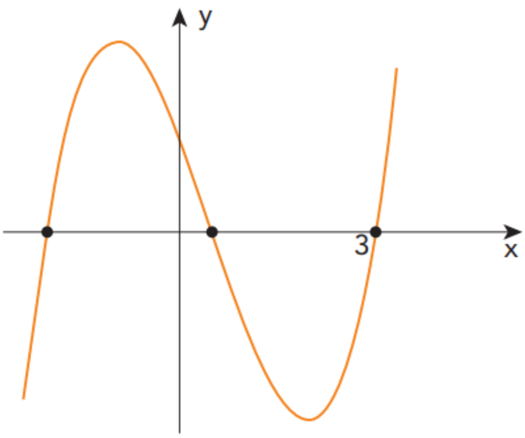
ii) M(Beta) = (3.200 + x).$(1 + 0{,}1)^2$ = (3.200 + x).$(1{,}1)^2$ = (3.200 + x).(1,21). Este valor é o montante. Subtraindo esse montante do valor aplicado, obtemos os juros.

J = 1.050 => (3.200 + x).(1,21) – (3.200 + x) = 1.050 => (3.200 + x).(1,21 – 1) = 1.050 =>

=> (3.200 + x).(0,21) = 1.050 =>3.200 + x = $\frac{1050}{0{,}21}$ => x = 5.000 – 3.200 = R$ 1.800,00

6. (UERJ) No gráfico, está representada, fora de escala, a função polinomial P de variável real x, definida por

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.



Sabe-se que uma fatoração desse polinômio é $P(x) = (x - 3) \cdot (2x^2 + 3x - 2)$. Calcule as raízes dessa função polinomial. Apresente, ainda, os valores de x que são as soluções da inequação $P(x) \geq 0$.

Solução. Como a fatoração de P(x) está com um fator (x – 3), temos que uma das raízes é x = 3 (já indicada no gráfico). As outras são as soluções da equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$. Temos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.(2).(-2)}}{2.(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-3-5}{4} = -2 \\ x'' = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Os valores de x para que P(x) ≥ 0 são: $\left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty[$.

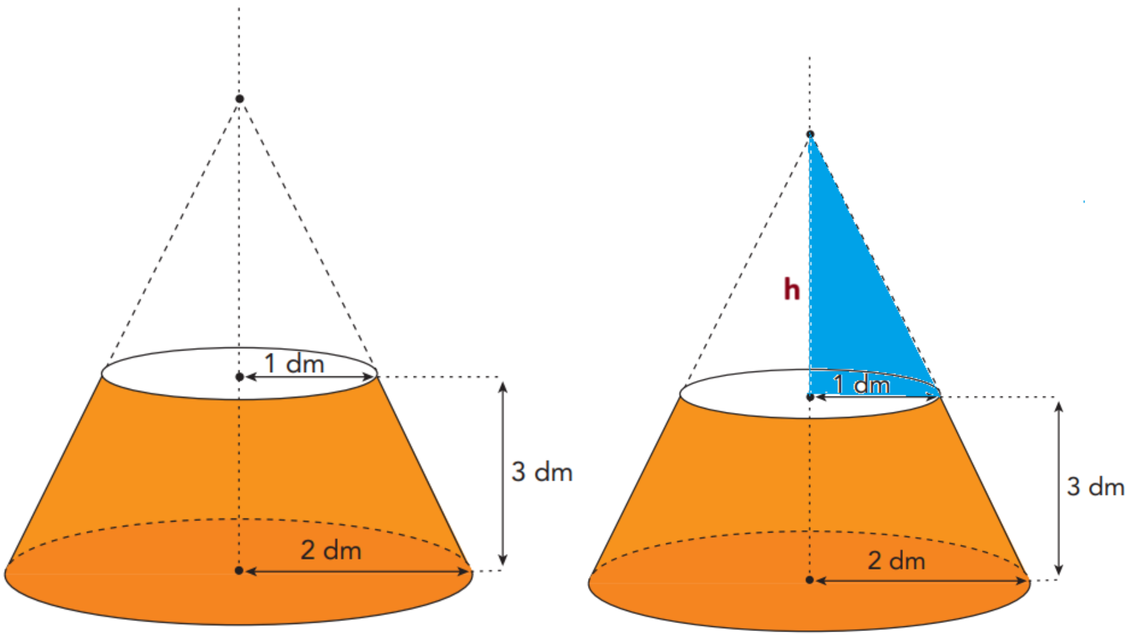
7. (UERJ) Um surto de gripe em uma escola teve início com apenas um aluno. O número total y de alunos infectados pelo vírus da gripe, até x horas depois do momento inicial da contaminação, é dado aproximadamente pela equação $y = 46 - k \cdot 3^{-0{,}1x}$, em que $0 \leq x < 20$ e k é uma constante positiva. Observando que o surto teve início com y = 1, calcule o valor de k e, também, em quantas horas, exatamente, 31 alunos foram contaminados.

Solução. Quando iniciou em y = 1, x = 0. Logo, $1 = 46 - k \cdot 3^{-0{,}1.(0)}$ => 1 – 46 = – k => k = 45.

Quando y = 31, temos: $31 = 46 - 45 \cdot 3^{-0{,}1.x}$ => $45 \cdot 3^{-0{,}1.x} = 46 - 31$ => $45 \cdot 3^{-0{,}1.x} = 15$ => $3^{-0{,}1.x} = \frac{1}{3}$ =>

=> $3^{-0{,}1.x} = 3^{-1}$ => – 0,1x = – 1 => x = 10. Ou seja, em 10 horas havia 31 contaminados.

8. (UERJ) No tronco de cone circular reto de bases paralelas ilustrado a seguir, o raio da base menor, o raio da base maior e a altura do tronco medem, respectivamente, 1 dm, 2 dm e 3 dm.



Calcule o volume total do tronco de cone, admitindo π = $\frac{22}{7}$.

Solução. Calculando a altura do cone estabelecendo a semelhança, temos:

$\frac{h}{1} = \frac{h+3}{2} =>$. 2h = h + 3 => h = 3. Logo, a altura do cone é H = h + 3 = 6 dm.

Calculando o volume do cone maior, temos: V = $\frac{\pi.(2)^2.6}{3} = 18\pi = 8.\left(\frac{22}{7}\right)$ dm³.

Calculando o volume do cone menor, temos: V = $\frac{\pi.(1)^2.3}{3} = \pi = \left(\frac{22}{7}\right)$ dm³.

O volume do tronco será: $8.\left(\frac{22}{7}\right)$ dm³ – $\left(\frac{22}{7}\right)$ dm³ = $7.\left(\frac{22}{7}\right)$ dm³ = 22 dm³.

9. (UERJ) Um paradoxo matemático pode ser exemplificado da seguinte maneira: considere um recipiente em que caiba, exatamente, um litro. Uma pessoa tem a tarefa de encher esse recipiente que, inicialmente, está vazio. Em um primeiro momento, ela coloca água até a metade da capacidade do recipiente. Após isso, ela deve adicionar, exatamente, a metade da quantidade de água que falta para enchê-lo, e assim sucessivamente. Dessa forma, ela terá a impressão de que o recipiente nunca ficará cheio.

Sabe-se que n é o menor número de vezes que essa pessoa terá de realizar a ação de colocar água no recipiente, até que ele esteja com mais de 95% do seu volume completo. Considerando $\log_{10} 2 = 0,3$, calcule n.

Solução. A quantidade inicial considerando V o volume é V/2. As quantidades posteriores, seguindo a regra são:

- Falta V/2. Então coloca a metade que será V/4. Fica V/2 + V/4 = 3V/4.

- Falta V/4. Então coloca a metade que será V/8. Fica 3V/4 + V/8 = 7V/8.

- Falta V/8. Então coloca a metade que será V/16. E assim sucessivamente.

Como V é 1 litro, as quantidades colocadas são: 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...+ $(1/2)^n$. Isto representa a soma de uma progressão geométrica de razão q = 1/2 e primeiro elemento igual a 1/2. Temos:

S > 95% => $\frac{\left(\frac{1}{2}\right).\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{2}-1}$ > 95% => => $\frac{\left(\frac{1}{2}\right).\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{-\frac{1}{2}}$ > 95% => => $\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{-1}$ > 95% => 1 - $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ > 0,95 =>

=> - $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0{,}95 - 1$ => - $\left(\frac{1}{2}\right)^n > -0{,}05$ => $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{5}{100}$ => $2^{-n} < \frac{5}{100}$ => $\log 2^{-n} < \log\frac{5}{100}$ =>

=> – n.log 2 < log 5 – log 100 => – 0,3n < (log10 – log 2) – log 100 => – 0,3n < 1 – 0,3 – 2 =>

=> – 0,3n < – 1,3 => 0,3n > 1,3 => n > $\frac{1{,}3}{0{,}3}$ => n > 4,333.... Logo, n = 5.

10. (UERJ) Quatro pessoas decidem sortear entre elas dois presentes iguais, a partir da seguinte sequência de critérios:
I - cada uma escolhe um número do conjunto {1, 2, 3, 4, 5} sem o revelar;

II - escrevem, secretamente, esse número em um cartão;

III - apresentam o cartão para que todas vejam seus números.

Se apenas duas pessoas escolherem o mesmo número, cada uma fica com um presente; caso contrário, repete-se o sorteio. Calcule a probabilidade de duas pessoas ganharem os presentes no primeiro sorteio.

Solução 1 (Cálculo direto). Como cada um pode escolher qualquer número, há 5 x 5 x 5 x 5 possibilidades de escolha. O par de pessoas que vão escolher o mesmo número pode calculado como C(4,2) = $\frac{4.3.2!}{2!.2!}$ = 6 formas distintas.
Para que ocorra no primeiro sorteio, as escolhas devem ser:

i) Caso duas escolham o 1: (1, 1) o par de iguais e os diferentes: (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3), (3,5),(5,3), (4,5) e (5,4): 12 casos.

ii) Caso duas escolham o 2: mesma quantidade acima: 12 casos.

iii) Caso duas escolham o 3: 12 casos.

iv) Caso duas escolham o 4: 12 casos.

v) Caso duas escolham o 5: 12 casos.

Logo, o total de casos no primeiro sorteio é 6 x 5 x 12 = 360. Portanto, a probabilidade é: $\frac{360}{625} = \frac{72}{125}$.

<u>Solução 2 (Cálculo pelo complementar)</u>. O espaço amostral é 5 x 5 x 5 x 5 = 125 que corresponde ao número total de escolhas possíveis pelas quatro pessoas. Vejamos quando o sorteio não acaba. Ele não acaba se:

i) Os quatro números escolhidos forem diferentes: Isto ocorre de 5 x 4 x 3 x 2 = 120 formas diferentes.

ii) Os números escolhidos forem iguais doía a dois: Isto significa formar dois conjuntos (partição não ordenada) com dois números iguais em cada um. A primeira escolha pode ser feita de C(4;2) = 6 formas e a segunda, de C(2,2) = 1. Como a ordem não importa, dividimos por 2.

A	B	C	D
5	5	4	4
5	5	3	3
5	5	2	2
5	5	1	1

A	B	C	D
4	4	5	5
4	4	3	3
4	4	2	2
4	4	1	1

A	B	C	D
3	3	5	5
3	3	4	4
3	3	2	2
3	3	1	1

A	B	C	D
2	2	5	5
2	2	4	4
2	2	3	3
2	2	1	1

A	B	C	D
1	1	5	5
1	1	4	4
1	1	3	3
1	1	2	2

C	D	A	B
5	5	4	4
5	5	3	3
5	5	2	2
5	5	1	1

Repare que cada linha da tabela ao lado aparece nas primeiras linhas das tabelas 2, 3, 4 e 5 acima. Por isso a partição é não ordenada e dividimos por 2!

Logo temos: $\frac{1}{2!} \times \left[C_4^2 \times C_2^2\right] \times (5 \times 1 \times 4 \times 1) = \frac{6 \times 1 \times 20}{2} =$ 60 formas.

iii) Os números escolhidos forem três iguais somente: Isto significa formar dois conjuntos (partição ordenada, pois o número de elementos dos conjuntos é diferente) com três números em um outro número diferente no outro. A primeira escolha pode ser feita de C(4;3) = 4 formas e a segunda, de C(1,1) = 1.
Logo temos: $\left[C_4^3 \times C_1^1\right] \times (5 \times 1 \times 1 \times 4) = 4 \times 20 =$ 80 formas.

iv) Todos os números são iguais: Isso pode acontecer de 5 x 1 x 1 x 1 = 5 formas.

Desta forma P(não acabar no 1º sorteio) = $\frac{120+60+80+5}{625} = \frac{265}{625} = \frac{53}{125}$.

A probabilidade de acabar no 1º sorteio é: 1 - $\frac{53}{125} = \frac{125-53}{125} = \frac{72}{125}$.