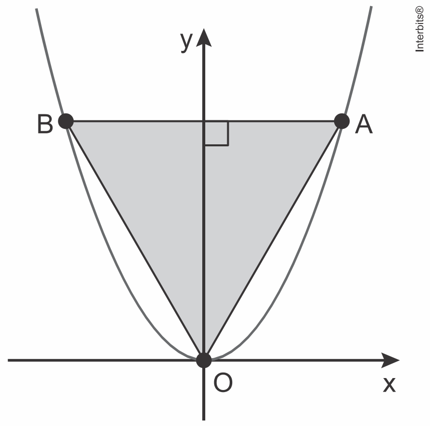
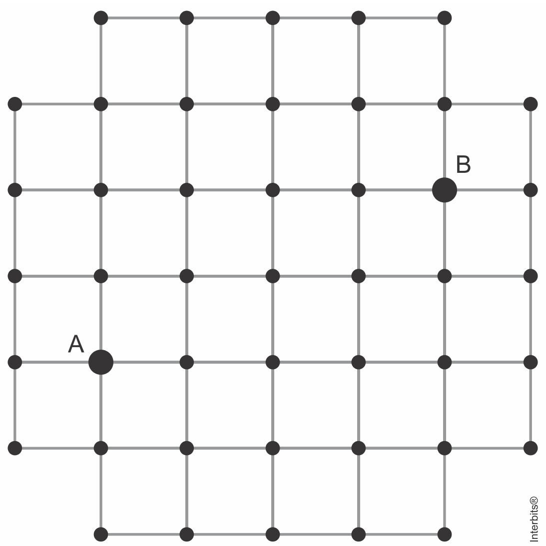
	CENTRO EDUCACIONAL ESPAÇO INTEGRADO Ensino Médio Aluno (a): ______________________ Série: Turma:_____ Data: ____________ Disciplina: Matemática Professor(a): Emanuel Jaconiano	**ESPM**

1. (Espm 2019) No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função $y = x^2$ e o triângulo equilátero OAB.



A área desse triângulo mede:
a) $2\sqrt{3}$
b) 3
c) $\sqrt{3}$
d) 2
e) $3\sqrt{3}$

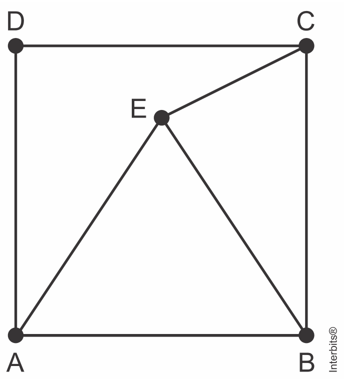
2. (Espm 2019) A figura abaixo representa uma parte de um bairro, onde os segmentos são as ruas e os pontos são as esquinas. Como só podemos caminhar pelas ruas, a distância entre os pontos A e B é de 6 quarteirões.



O número de esquinas assinaladas no mapa, que são equidistantes de A e B, é igual a:
a) 5
b) 6
c) 9
d) 8

e) 7

3. (Espm 2019) $ABCD$ é um quadrado e ABE é um triângulo isósceles de base AB, interno ao quadrado.

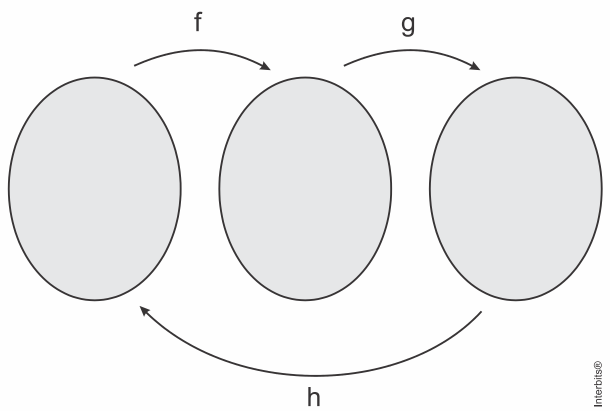


Se o ângulo $B\hat{E}C$ mede $90°$, a medida do ângulo ABE é igual a:
a) $15°$
b) $30°$
c) $45°$
d) $60°$
e) $75°$

4. (Espm 2019) O número que se deve somar a 456.788^2 para se obter 456.789^2 é:
a) 456.789
b) 1
c) 456.788
d) 913.579
e) 913.577

5. (Espm 2018) O vigésimo termo da PA $(x, 3+x, 2x+1, \dots)$ é igual a:
a) 56
b) 62
c) 69
d) 74
e) 81

6. (Espm 2018) Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3 - x$, a função $h(x)$ representada no diagrama abaixo é:



a) $h(x) = \dfrac{2-x}{2}$

b) $h(x) = \dfrac{2-x}{x}$

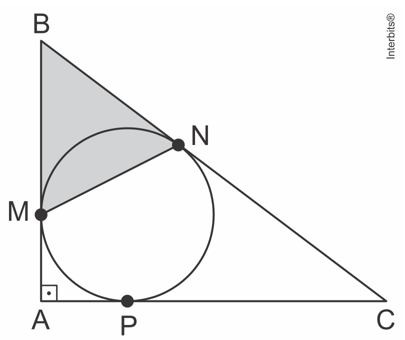
c) $h(x) = \dfrac{x}{2-x}$

d) $h(x)=\dfrac{x}{x-2}$
e) $h(x)=\dfrac{x-2}{2x}$

7**.** (Espm 2018) O número de anagramas da palavra COLEGA em que as letras *L*, *E* e *G* aparecem juntas em qualquer ordem é igual a:
a) 72
b) 144
c) 120
d) 60
e) 24

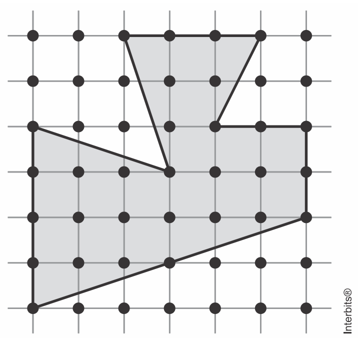
8**.** (Espm 2018) Para que o domínio da função $f(x)=\sqrt{x(x-k)+1}$ seja todo o conjunto dos reais, deve-se ter:
a) $k<0$
b) $k>-1$
c) $-1\leq k\leq 1$
d) $-2\leq k\leq 2$
e) $-1\leq k\leq 3$

9**.** (Espm 2018) Na figura abaixo, M, N e P são os pontos de tangência do triângulo retângulo ABC com sua circunferência inscrita. Se $AB=3$ e $AC=4,$ a área do triângulo BMN é igual a:



a) $1{,}2$
b) $2{,}0$
c) $1{,}8$
d) $2{,}4$
e) $1{,}6$

10**.** (Espm 2018) Considere uma malha quadriculada cujas células são quadrados de lado 1. Segundo o teorema de Pick, a área de um polígono simples cujos vértices são nós dessa malha, é igual ao número de nós da malha que se encontram no interior do polígono mais metade do número de nós que se encontram sobre o perímetro do polígono, menos uma unidade.



De acordo com esse teorema, a área do polígono representado na figura acima é igual a:
a) 21
b) 18

c) 23
d) 19
e) 22

11. (Espm 2018) Juntas, as torneiras A e B enchem um tanque em $24\,\text{min}.$ Se apenas a torneira A estiver aberta, o tempo de enchimento é de $1\,\text{h}.$ Podemos concluir que, se apenas a torneira B estiver aberta, esse tanque ficaria cheio em:
a) $30\,\text{min}.$
b) $40\,\text{min}.$
c) $20\,\text{min}.$
d) $36\,\text{min}.$
e) $42\,\text{min}.$

12. (Espm 2018) A sequência $S = (\text{sen}\,60°, 1 + \text{sen}\,30°, 3\cos 30°)$ é:
a) uma PA de razão $\text{tg}\,30°.$
b) uma PG de razão $\text{sen}\,60°.$
c) uma PA de razão $\text{tg}\,45°.$
d) uma PA de razão $1 + \text{sen}\,60°.$
e) uma PG de razão $\text{tg}\,60°.$

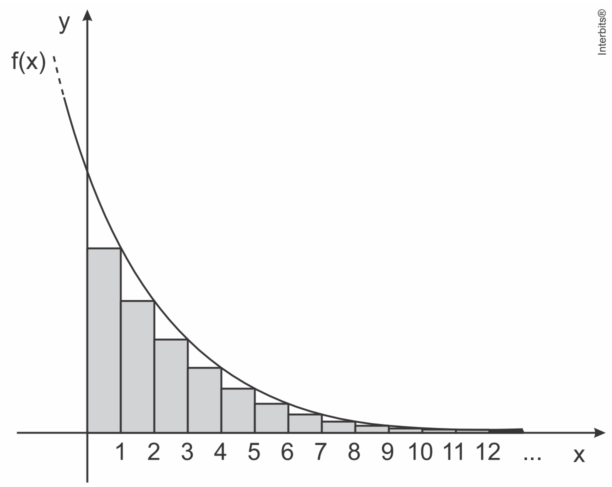
13. (Espm 2018) Para que o número 64.800 se torne um cubo perfeito, devemos:
a) multiplicá-lo por $30.$
b) dividi-lo por $60.$
c) multiplicá-lo por $90.$
d) dividi-lo por $150.$
e) multiplicá-lo por $18.$

14. (Espm 2018) Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), o Índice de Massa Corporal (IMC) ideal para um indivíduo adulto deve estar entre $18{,}5$ e $25.$ Para o cálculo, usa-se a fórmula $\text{IMC} = \dfrac{\text{peso}}{\text{altura}^2}.$

De acordo com o exposto, o peso ideal para um adulto de $1{,}70\,\text{m}$ de altura deve estar entre:
a) $54\,\text{kg}$ e $65\,\text{kg}$
b) $56\,\text{kg}$ e $70\,\text{kg}$
c) $48\,\text{kg}$ e $67\,\text{kg}$
d) $60\,\text{kg}$ e $75\,\text{kg}$
e) $54\,\text{kg}$ e $72\,\text{kg}$

15. (Espm 2017) Dada a função real $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2},$ definida para $x \neq 2,$ o valor de $f(1 + \text{sen}\,89°)$ é aproximadamente igual a:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

16. (Espm 2017) A figura abaixo representa parte do gráfico da função $f(x) = \dfrac{16}{2^x},$ fora de escala.



A soma das áreas dos infinitos retângulos assinalados é igual a:
a) 16
b) 8
c) 24
d) 32
e) 12

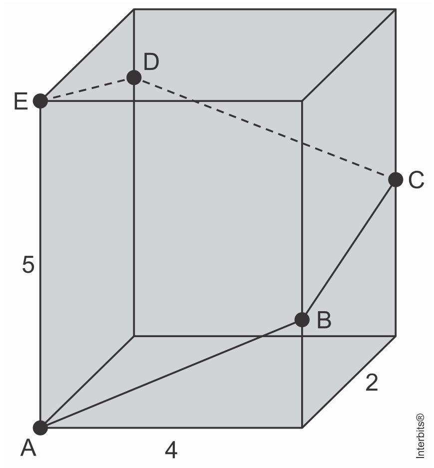
17. (Espm 2017) Considere o sistema $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} = 6 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ onde x, y e z são reais não nulos.

O valor da expressão $\dfrac{x^2z + y^2x + z^2y}{xyz}$ é:

a) $\dfrac{15}{2}$
b) $\dfrac{17}{2}$
c) $\dfrac{15}{4}$
d) $\dfrac{13}{2}$
e) $\dfrac{17}{4}$

18. (Espm 2017) Em uma competição de vôlei de praia participaram n duplas. Ao final, todos os adversários se cumprimentaram uma única vez com apertos de mãos. Sabendo-se que foram contados 180 apertos de mãos, podemos concluir que n é igual a:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

19. (Espm 2017) Em volta do paralelepípedo reto-retângulo mostrado na figura abaixo será esticada uma corda do vértice A ao vértice E, passando pelos pontos B, C e D.



De acordo com as medidas dadas, o menor comprimento que essa corda poderá ter é igual a:
a) 15
b) 13
c) 16
d) 14
e) 17

20. (Espm 2017) Os pontos do plano cartesiano que atendem às condições $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3$ e $x + y \geq 2$ simultaneamente, formam uma figura plana cuja área é igual a:
a) 14
b) 16
c) 12
d) 10
e) 8

21. (Espm 2017) A taxa de crescimento populacional de um país é de 2% ao ano. Utilizando os dados da tabela abaixo e considerando que essa taxa permanecerá constante, podemos afirmar que a população desse país dobrará em:

N	Log N
2,00	0,3010
2,02	0,3054
2,04	0,3096

a) 15 anos
b) 20 anos
c) 25 anos
d) 30 anos
e) 35 anos

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[E]

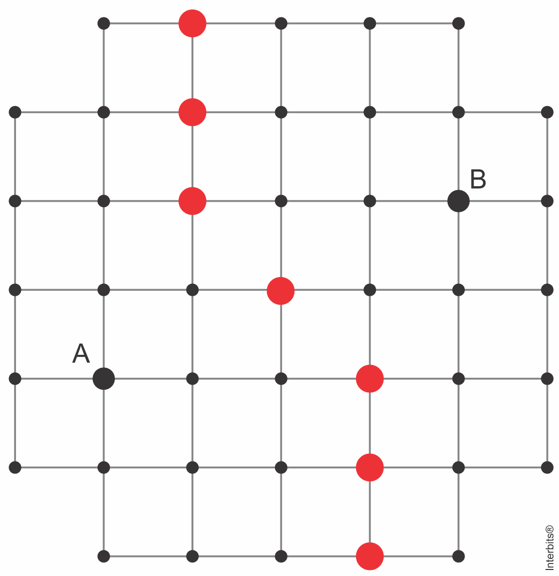
As coordenadas do ponto A são (a, a^2), pois o ponto A pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$.
A distância do ponto A até a origem do sistema cartesiano é $2a$, ou seja, o lado do triângulo equilátero.
$\sqrt{(a)^2 + (2a)^2} = 2a \Rightarrow a^2 + 4a^4 = 4a^2 \Rightarrow a = 0$ ou $a = \sqrt{3}$.

Concluímos que o lado do triângulo equilátero é $2a = 2 \cdot \sqrt{3}$.

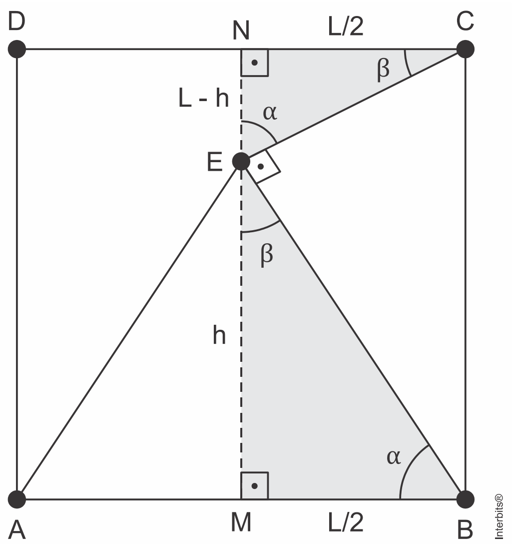
Portanto, sua área será dada por:
$$A = \frac{(2 \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

Resposta da questão 2:
[E]

Os pontos que estão a mesma distância de A e B caminhando apenas pelas ruas, estão destacados na figura abaixo.
São 7 no total.



Resposta da questão 3:
[C]



Considerando que $A\hat{B}E = \alpha$, temos:
$\Delta MBE \sim \Delta NEC$

$$\frac{L-h}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L}{2}}{h} \Rightarrow \frac{L^2}{4} = h \cdot L - h^2 \Rightarrow L^2 - 4 \cdot h \cdot L + 4h^2 = 0 \Rightarrow (L-2h)^2 = 0 \Rightarrow L = 2h$$

Portanto:
No ΔMBE, observamos que:

$$tg\alpha = \frac{h}{\frac{L}{2}} = \frac{h}{h} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$$

Resposta da questão 4:
[E]

Considerando que x seja o número procurado, temos:

$$456788^2 + x = 456789^2$$
$$x = 456789^2 - 456788^2$$
$$x = (456789 - 456788) \cdot (456789 + 456788)$$
$$x = 1 \cdot 913577 = 913577$$

Resposta da questão 5:
[B]

Da PA $(x, x+3, 2x+1, \ldots)$, temos:

$$2 \cdot (3+x) = x + 2x + 1$$
$$6 + 2x = 3x + 1$$
$$x = 5$$

Assim, temos:
PA $(5, 8, 11, \ldots)$; razão: $r = 3$.

$$a_{20} = 5 + 19 \cdot 3$$
$$a_{20} = 62$$

Resposta da questão 6:
[A]

Calculando:

$$g(f(x)) = 3 - (2x + 1) = 2 - 2x$$

$$g^{-1}(f(x)) \Rightarrow x = 2 - 2x \Rightarrow y = \frac{2 - x}{2}$$

Resposta da questão 7:
[B]

Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} LEG \Rightarrow 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \\ LGE \Rightarrow 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \\ ELG \Rightarrow 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \\ EGL \Rightarrow 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \\ GLE \Rightarrow 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \\ GEL \Rightarrow 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \cdot 24 = 144$$

Resposta da questão 8:
[D]

Calculando:

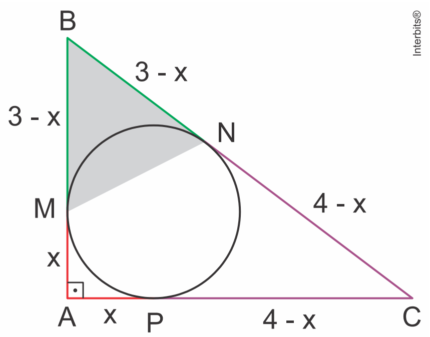
$$f(x) = \sqrt{x \cdot (x - k) + 1}$$

$$x \cdot (x - k) + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - xk + 1 = 0$$

$$\Delta = k^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 2$$

Resposta da questão 9:
[E]

Do enunciado e da figura, temos:



No triângulo ABC,

$$(BC)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5$$

Daí,

$$3 - x + 4 - x = 5 \Rightarrow x = 1$$

Ainda no triângulo ABC,

$$\text{sen}\left(A\hat{B}C\right) = \frac{4}{5}$$

Assim, sendo S a medida da área do triângulo BMN, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow S = 1{,}6$$

Resposta da questão 10:
[A]

Do enunciado e da figura, a área do polígono representado na figura é $14+\frac{16}{2}-1=21.$

Resposta da questão 11:
[B]

Seja x litros a capacidade do tanque. Do enunciado, temos:
A torneira A gasta 60 minutos para encher x litros, logo, em 1 minuto, ela enche $\frac{x}{60}$ litros.

As torneiras A e B juntas gastam 24 minutos para encher x litros, logo, em 1 minuto, enchem $\frac{x}{24}$ litros.

Daí, em 1 minuto, a torneira B enche $\frac{x}{24}-\frac{x}{60}=\frac{x}{40}$ litros.
Assim, em 40 minutos a torneira B, sozinha, encheria o tanque.

Resposta da questão 12:
[E]

$$S=\left(\operatorname{sen}60^\circ, 1+\operatorname{sen}30^\circ, 3\cos 30^\circ\right)$$
$$S=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Note que:
$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3} \text{ e } \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}$$

Assim, S é uma PG de razão $\sqrt{3}=\operatorname{tg}60^\circ.$

Resposta da questão 13:
[C]

Calculando:
$$64800=2^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 3\cdot 5^2$$
$$\underbrace{2^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 3\cdot 5^2}_{64800}\cdot\underbrace{2\cdot 3^2\cdot 5}_{90}=2^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 3^3\cdot 5^3\Rightarrow\sqrt[3]{2^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 3^3\cdot 5^3}\Rightarrow \text{cubo perfeito}$$

Resposta da questão 14:
[E]

Calculando:
$$18{,}5=\frac{\text{peso}}{1{,}7^2}\Rightarrow \text{peso}_{\text{mín}}=53{,}465\text{ kg}$$
$$25=\frac{\text{peso}}{1{,}7^2}\Rightarrow \text{peso}_{\text{máx}}=72{,}25\text{ kg}$$

Resposta da questão 15:
[E]

Tem-se que
$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Portanto, como $\operatorname{sen}89^\circ\cong\operatorname{sen}90^\circ=1,$ vem
$$f(1+\operatorname{sen}89^\circ)=1+\operatorname{sen}89^\circ+2\cong 4.$$

Resposta da questão 16:
[A]

Desde que todos os retângulos têm bases congruentes e de medida igual a 1, segue que o resultado é dado por

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+f(3)+\ldots &= 8+4+2+\ldots \\ &= \frac{8}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 16. \end{aligned}$$

Resposta da questão 17:
[D]

Somando as equações, temos

$$\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}=13 \Leftrightarrow \frac{x^2z+xy^2+yz^2}{xyz}=\frac{13}{2}.$$

Resposta da questão 18:
[C]

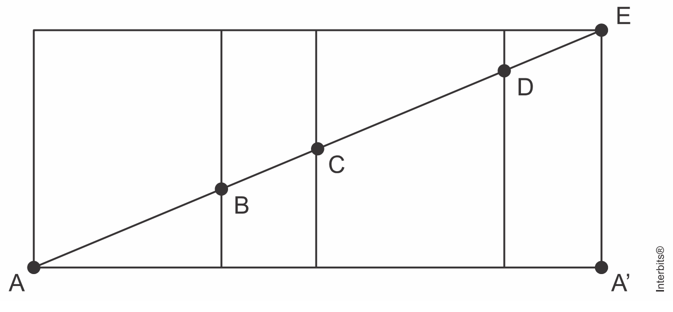
Se todos os atletas se cumprimentassem, então o número de apertos de mãos seria igual a $\binom{2n}{2}$. Mas, como apenas adversários se cumprimentam, devemos descontar desse total o número de apertos de mãos trocados entre atletas de uma mesma dupla, qual seja n.

Portanto, segue que o resultado é tal que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{2}-n=180 &\Rightarrow \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}-n=180 \\ &\Rightarrow n^2-n-90=0 \\ &\Rightarrow n=10. \end{aligned}$$

Resposta da questão 19:
[B]

Considere a planificação da superfície lateral do paralelepípedo, na qual está indicado o comprimento mínimo, AE, da corda.

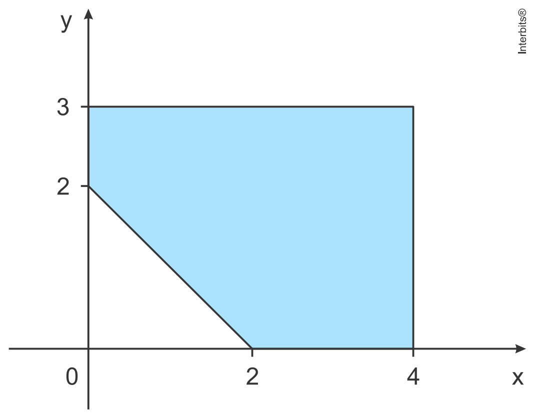


Portanto, sendo $\overline{AA'}=12$ e $\overline{A'E}=5$, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned} \overline{AE}^2=\overline{AA'}^2+\overline{A'E}^2 &\Rightarrow \overline{AE}^2=12^2+5^2 \\ &\Rightarrow \overline{AE}=13. \end{aligned}$$

Resposta da questão 20:
[D]

Considere a figura, em que está representada a região do plano que satisfaz $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 3$ e $y \ge -x+2$.



A área da região é dada por

$$4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 10 \text{ u.a.}$$

Resposta da questão 21:
[E]

Seja a função $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $p(t) = p_0 \cdot (1{,}02)^t$, com $p(t)$ sendo a população do país após t anos. Logo, como queremos calcular t para o qual se tem $p(t) = 2 \cdot p_0$, vem

$$\begin{aligned} 2 \cdot p_0 = p_0 \cdot (1{,}02)^t &\Leftrightarrow \log(1{,}02)^t = \log 2 \\ &\Leftrightarrow t \cdot \log(1{,}02) = \log 2 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \\ &\Rightarrow t \cong \frac{0{,}301}{0{,}0086} \\ &\Leftrightarrow t = 35. \end{aligned}$$