MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DECEx – DEPA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1989
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2023/2024
EXAME INTELECTUAL 29 DE OUTUBRO DE 2023

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. Considerando que a ≠ 0, b ≠ 0 e que $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 4$, assinale a alternativa abaixo que apresenta corretamente o valor do resto da divisão do número ($a^3 + b^3$) pelo número ($a^2 – b^2$).

a) 2ab b) $6b^2$ **c)** b^2 d) 1 e) 0

Solução. Desenvolvendo as informações, temos:

i) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 4 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4.ab$**. Como (a.b) ≠ 0 => (a+b).(a-b) ≠ 0;**

ii) Efetuando a divisão pedida, temos: $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} = \frac{(a+b).(a^2-ab+b^2)}{(a+b).(a-b)} = \frac{(a^2-ab+b^2)}{(a-b)}$.

a^2 - ab + b^2	a - b
$-a^2$+ab	a
b^2	

O resto, portanto, é b^2.

Questão Relacionada. Sejam a ≠ 0, b ≠ 0. Se $x = \frac{4a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $y = \frac{4b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, calcule o valor de $(x + y)^2 – 2xy$.

OBS: (a e b são números reais, não nulos simultaneamente)

a) 14 b) 15 **c)** 16 d) 17 e) 18

Solução. Desenvolvendo a expressão indicada e calculando, temos:

i) $(x + y)^2 – 2xy = x^2 + 2xy + y^2 – 2xy = x^2 + y^2$;

ii) $x^2 + y^2 = \left(\frac{4a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{4a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{16a^2}{a^2+b^2} + \frac{1ba^2}{a^2+b^2} = \frac{16(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 16.$

Questão 2. Um aluno teimos disse para um colega que tinha desenvolvido, depois de longo estudo, uma nova matemática na qual o valor do produto entre 5 (cinco) e 6 (seis) é igual a 33 (trinta e três). Dessa forma, assinale a opção abaixo que apresenta corretamente quanto será, na matemática desse aluno teimoso, o valor do número 100 (cem).

a) 72 **b)** 81 c) 96 d) 97 e) 109

Solução. O valor real de 5 x 6 é 30. Na matemática do aluno teimoso houve uma mudança na base do sistema numérico. Supondo b essa nova base, temos:

$30 = 3.b^1 + 3.b^0 \Rightarrow 3b = 30 – 3 \Rightarrow 3b = 27 \Rightarrow 3b = 9$. Logo, a base utilizada pelo aluno foi a base 9.
O 100 corresponde no sistema decimal a 10^2. Logo, na base 9 corresponderá a $9^2 = 81$.

Questão 3. A engarrafadora Thomás Coelho envasa 230 litros de água mineral por hora, operando em 1 (um) turno de 8 (oito) horas por dia durante 5 (cinco) dias na semana. A empresa recebeu uma encomenda de 150.000 litros de água mineral envasada, comprometendo-se em concluir essa produção no prazo de 12 (doze) semanas. Nesse contexto, a empresa concluiu que precisaria incrementar a quantidade de horas trabalhadas por dia e resolveu fazê-lo de maneira uniforme ao longo de todo o período necessário, continuando, porém, a operar apenas 5 (cinco) dias na semana. Com base nessas inforrmações, assinale a alternativa que apresenta a quantidade aproximada de horas adicionais de funcionamento da empresa por dia de trabalho, a fim de que ela conclua aquela encomenda no prazo combinado.

a) 2 **b)** 3 c) 4 d) 5 e) 6

Solução. De acordo com o enunciado, trabalhando 8h por dia, a engarrafadora envasa (230 x 8) = 1 840 litros por dia. Logo, em 60 dias envasará (80 x 1 840) = 110.400 litros.

Estabelecendo a regra de três, temos uma relação diretamente proporcional, pois aumentará o número de horas/dias trabalhadas e o número de litros. Temos:

$$\frac{110.400\,L}{150.000\,L} = \frac{8h/d}{x} => x = \frac{(8).(150.000)}{110.400} = \frac{(8).(375)}{276} = \frac{(2).(375)}{69} = \frac{750}{69} \cong 10,8$$

Será necessário um turno de aproximadamente 11 h por dia. O que indica um adicional de 3 horas por dia.

Questão 4. Certa cidade decidiu trocar a totalidade de sua frota de ônibus, de uma só vez, substituindo os 600 ônibus atuais por outros novos, a fim de atender, satisfatoriamente, a demanda. A atual quantidade de ônibus foi adquirida para a demanda de 3.300.000 passageiros por dia. Ao fazer uma pesquisa para saber a quantidade de passageiros que desejam usar os ônibus, verificou-se que existe uma demanda de 7.000.000 passageiros por dia e que os novos ônibus a serem adquiridos têm uma capacidade de passageiros $\frac{1}{3}$ maior que a dos atuais. Com base nessas informações, assinale a opção abaixo que apresenta corretamente a quantidade de ônibus novos que devem ser adquiridos para atender os 7.000.000 de passageiros diariamente.

a) 950 b) 954 **c)** 955 d) 960 e) 970

Solução. Considerando C a capacidade dos ônibua antigos, temos que os novos terão capacidade $\frac{4C}{3}$, pois essa capacidade aumentou a terça parte da antiga. Temos uma regra de três composta, onde a relação da demanda e número de ônibas é diretamente proporcional, pois aumentando a demanda precisamos aumentar a frota, e a relação entre a capacidade e o número de ônibus é inversamente proporcional, pois se há mais lugares, são necessários (mantendo a demanda) menos ônibus. Temos:

Número de ônibus	Demanda	Capacidade
600	3 300 000	C
x	7 000 000	C + C/3 = 4C/3
	Diretamente Proporcional	Inversamente Proporcional

$$\frac{600}{x} = \frac{3\,300\,300}{7\,000\,000} = \frac{4C/3}{C} => x = \frac{(70).(600)}{(33).\left(4/3\right)} = \frac{(70).(600)}{(11).(4)} = \frac{(70).(15)}{4} \cong 954,5$$

Logo, a quantidade de ônibus que devem ser adquiridos é de 955.

Questão 5. Um jovem iniciou sua carreira produtiva em uma quarta-feira, em março de 2022, e se aposentará exatamente em 45 anos. Desse modo, assinale a alternativa abaixo que apresenta corretamente o dia da semana em que esse jovem se aposentará.

a) segunda-feira b) terça-feira **c)** quarta-feira d) quinta-feira e) sexta-feira

Solução. De março de 2022 a março de 2067 (45 anos depois), temos:

i) Anos bissextos (múltiplos de 4). O primeiro é 2024 e o último 2064): $\frac{2064-2024}{4} + 1 = \frac{40}{4} + 1 = 11$ **anos.**

Logo, o total de dias de anos bissextos é 11 x 366 = 4 026.

ii) Anos não bissextos: 45 – 11 = 34 anos. O total de dias é 34 x 365 = 12 410.

iii) Logo, em 45 anos há (4 026 + 12 410) = 16 436. Dividindo esse valor por 7 (ciclo da semana) encontramos quociente 2 348 e resto zero.

Logo, o dia da semana da aposentadoria será também um quarta-feira.

Questão 6. Seja A = $\left(0{,}9333\ldots + \frac{5^{-1}.[3^3+3^2.(-2)^3]}{(0{,}333\ldots)^{-3}.(-5)}\right)^{1/2}$, assinale a opção que apresenta corretamente o valor de 2A.

a) 0,333... b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução. Identificando as dízimas e resolvendo, temos:

i) 0,9333 = $\frac{933-93}{900} = \frac{840}{900} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$; ii) 0,333... = $\frac{1}{3}$;

iii) A = $\left(\frac{14}{15} + \frac{\frac{1}{5}.[27+9.(-8)]}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}.(-5)}\right)^{1/2} = \left(\frac{14}{15} + \frac{[27-72]}{(5).(27).(-5)}\right)^{1/2} = \left(\frac{14}{15} + \frac{[-45]}{(5).(27).(-5)}\right)^{1/2} =$

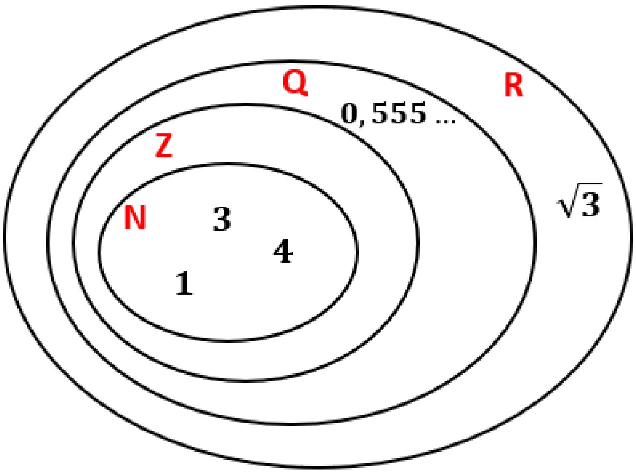
$= \left(\frac{14}{15} + \frac{1}{15}\right)^{1/2} = \left(\frac{15}{15}\right)^{1/2} = \sqrt{1} = 1.$

Logo, 2.A = 2.(1) = 2.

Questão 7. Considere os conjuntos numéricos triviais R (reais), Z (inteiros), N (naturais), Q (racionais) e os conjuntos A = (R – Z) ∩ (N U Q) e B = $\{3; 1; 4; 0{,}555\ldots; \sqrt{3}\}$. Diante disso, dentre as alternativas abaixo, assinale a única correta.

a) A ∩ B é unitário. b) B ∩ Q é unitário. c) B ∩ Q = ϕ. d) R ∩ A = Q. e) A – B = A.

Solução. O diagrama abaixo mostra as inclusões dos conjuntos numéricos até os reais (Os elementos que pertencem aos reais, mas não são racionais são os irracionais, representado pela $\sqrt{3}$.



Analisando as opções, temos:

a) Verdadeira. Os elementos do conjunto (R – Z) são os reais sem os inteiros. Logo, racionais e irracionais. Os elementos de conjunto (N U Q) são os racionais (Z está contido em Q). Dessa forma A é a interseção entre eles que são os racionais não inteiros. Só há o elemento 0,555... .

b) Falso. A interseção de B e Q possui os elementos 1, 3, 4 e $\sqrt{3}$.

c) Falsa. Os elementos 1, 3 e 0,555... pertencem a B e Q.

d) Falsa. A interseção entre R e A é o próprio conjunto A que possui elementos reais e irracionais.

e) Falsa. Há elementos de B que pertencem a A.

OBS: A possibilidade de (b) ser falsa seria o caso de o elemento de B ser 1,4. Mas o ponto vírgula indica os naturais 1 e 4.

Questão 8. Em uma rede de restaurantes, em que todos os restaurantes abrem diariamente, os garçons podem trabalhar em qualquer filial e têm direito a 2 (duas) folgas semanais. Sabe-se que, nos domingos, trabalham 432 garçons; nas segundas-feiras, 215; nas terças-feiras, 237; nas quartas-feiras, 251; nas quintas-feiras, 303; nas sextas-feiras, 387 e, nos sábados, 480. Dessa forma, assinale a alternativa abaixo que apresenta corretamente a soma dos algarismos da quantidade de garçons que trabalham nessa rede de restaurantes.

a) 6 b) 7 c) 9 d) 10 **e)** 11

Solução. Considerando o número de garçons como N, temos que o número de garçons trabalhando ao fim de sete dias seria 7N. Como cada garçom pode folgar duas vezes, o total de folgas dos garçons é 2N.

Dessa forma a soma das presenças em sete dias, considerando as folgas, é 7N – 2N = 5N. Temos:

5N = 432 + 215 + 237 + 251 + 303 + 387 + 480 => 5N = 2 305 => N = $\frac{2\,305}{5} = 461.$

A soma dos algarismos desse número é (4 + 6 + 1) = 11.

Questão 9. Um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos:

Determinar a soma dos algarismos do décimo terceiro número de uma lista de 100 (cem) números, todos maiores que 11 e que obedecem às seguintes regras:

- Deixam resto 11 (0nze) quando divididos por 26 (vinte e seis); e
- Deixam resto 11 (onze) quando são divididos por 30 (trinta).

Considerando essas informações, assinale a alternativa que responde corretamente ao desafio proposto pelo professor.

a) 6 b) 9 c) 11 **d)** 14 e) 15

Solução. Considerando N o tipo de número procurado, temos:

i) N = 26k + 11 => (N – 11) = 26k.

ii) N = 30k' + 11 => (N – 11) = 30k'.

Logo, (N – 11) é múltiplo comum de 26 e 30.

Calculando o (MMC), encontramos 2 x 3 x 5 x 13 = 390.

Dessa forma o primeiro número satisfazendo ao desafio é 390 + 11 = 401.

Veja na tabela os próximos, obtidos adicionando 390 em sequência.

O 13º da lista é 5 081 cuja soma dos algarismos é 5 + 0 + 8 + 1 = 14.

26	30	2
13	15	3
13	5	5
13	1	13
1		

k	N
1	401
2	791
3	1181
4	1571
5	1961
6	2351
7	2741
8	3131
9	3521
10	3911
11	4301
12	4691
13	5081

Questão 10.. O dono de uma loja que vende artigos esportivos decidiu fazer uma promoção no mês de abril e aplicou um desconto de 23% no preço de todos os produtos. A promoção foi um sucesso e em pouco tempo foram vendidos mais da metade dos itens disponíveis. Por conta do ocorrido, o proprietário da loja resolveu encerrar a promoção e aumentar o preço dos produtos que ainda não haviam sido vendidos. O novo preço será 37% maior do que o preço antes do desconto concedido em abril. Se determinada camisa, com o desconto concedido em abril, custava R$97,79, qual será o novo valor dessa mercadoria?

a) R$133,97. b) R$164,59. c) R$181,39. d) R$178,17. **e)** R$173,99.

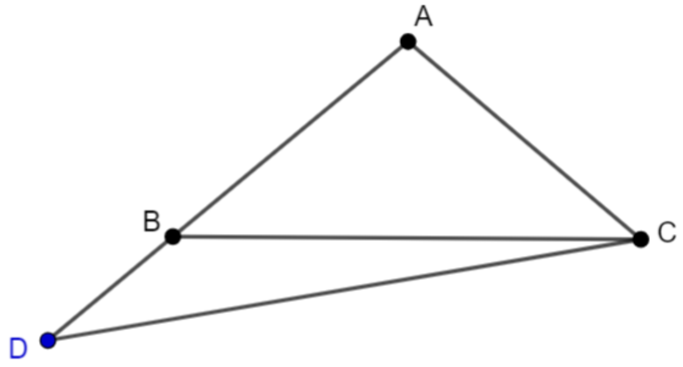
Solução. Considerando P o preço antes do desconto, temos que P(desconto) = P.(0,77), pois se o desconto foi de 23%, ele ficou 67% mais barato. Calculando o valor antes, temos:

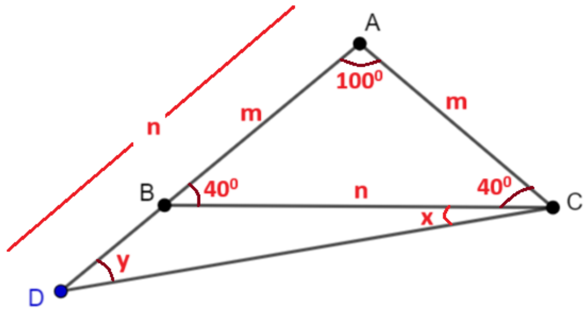
0,77.P = 97,79 => P = $\frac{97{,}79}{0{,}77} = \frac{9779}{77} =$**R$127,00.**

O aumento 37% será sobre esse valor de R$127,00.

Logo o novo valor será (1,37).(127,00) = R$173,99.

Questão 11. Na figura abaixo, está representado o triângulo isósceles ABC com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sabe-se que a medida do ângulo $\widehat{BAC}$ = 100º e que o lado $\overline{AB}$ foi prolongado até o ponto D, de modo que $\overline{AD} = \overline{BC}$.





Desse modo, assinale a alternativa que contém a medida correta do ângulo $\widehat{BCD}$.

a) 8º | **b)** 10º | c) 12º | d) 15º | e) 20º

Solução 1. Identificando as medidas na figura acima e aplicando a lei dos senos e identidades trigonométricas, temos:

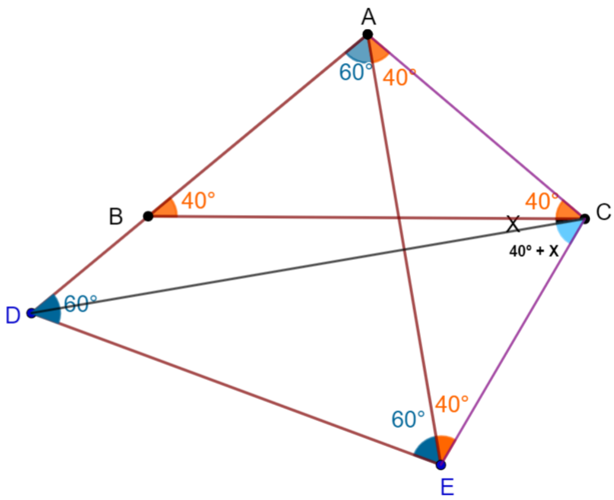
i) Triângulo ABC: $\frac{n}{sen100°} = \frac{m}{sen40°} => \frac{n}{sen(180°-100°)} = \frac{m}{sen40°} => \frac{n}{sen80°} = \frac{m}{sen40°} =>$

$=> \frac{n}{2sen40°.cos40°} = \frac{m}{sen40°} => \frac{n}{2cos40°} = \frac{m}{1} => \frac{m}{n} = \frac{1}{2cos40°} => \frac{m}{n} = \frac{1/2}{sen50°} = \frac{sen30°}{sen50°}.$

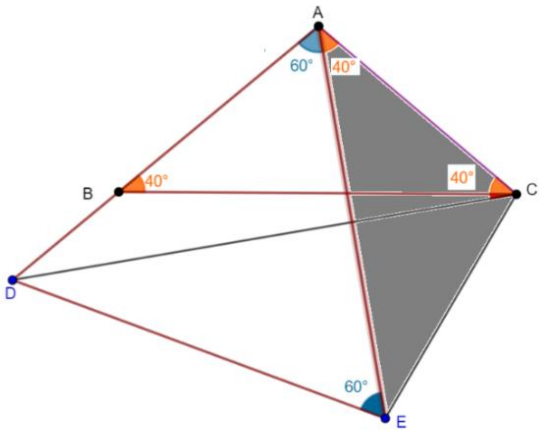
ii) Triângulo ADC: $\frac{n}{sen(40°+x)} = \frac{m}{y} => \frac{n}{sen(40°+x)} = \frac{m}{sen(40°-x)} => \frac{m}{n} = \frac{sen(40°-x)}{sen(40°+x)}.$

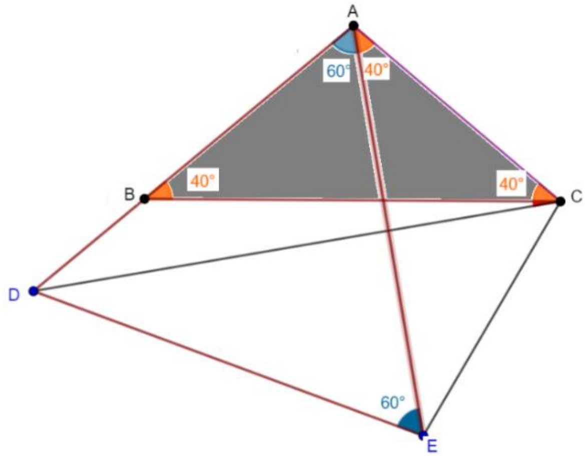
iii) Comparando (i) e (ii), temos que: (40^0 – x) = 30^0 e (40^0 + x) = 50^0. Logo, x = 10º

Solução 2. Essa solução utiliza um traçado auxiliar. Observe a figura.
i) Foi traçado um segmento de reta (AE) de mesma medida de AD, formando com o lado AD um ângulo de 60º;



ii) Dessa forma encontramos dois triângulos congruentes pelo critério LAL, com CE = AC. Os triângulos ADC e DCE também são congruentes.



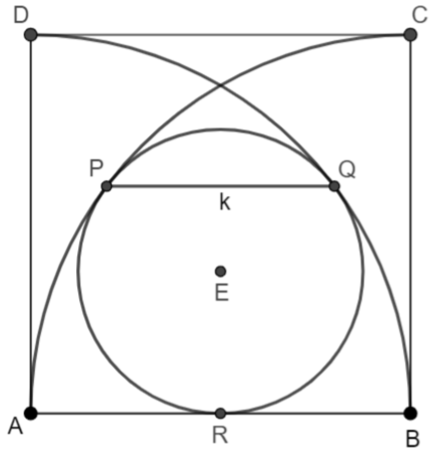


Logo, a soma dos ângulos ACB + BCD é igual ao ângulo DCE.

O ãngulo AEC também vale 40º. Logo, 40º + 40º + x + 40 + x + 40 = 180º => 2x = 180º - 160º =>

=> 2x = 20º => x = 10º. O ângulo pedido, $\widehat{BCD}$, mede 10º.

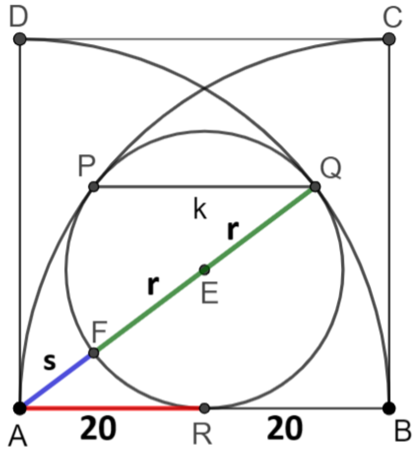
Questão 12. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado cujo lado AB mede 40 cm. Os arcos AC e BD representam arcos de um quarto de circunferência de centros em B e A, respectivamente. O círculo de centro E tangencia os arcos AC, BD e também o lado AB do quadrado, nos pontos P, Q e R, respectivamente.

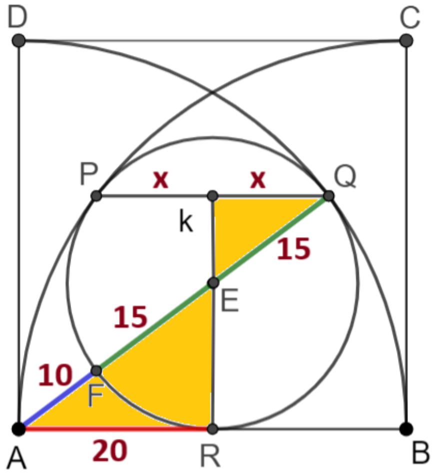


Com base nessas informações, assinale a alternativa que contém o comprimento do segmento PQ.

a) 18 cm b) 20 cm c) 21 cm d) 22 cm **e)** 24 cm

Solução. Nas figuras abaixo aplicamos a potência de ponto em relação ao ponto A e a semelhança entre triângulos com as medidas correspondentes. Observe que s = 40 - 2r.

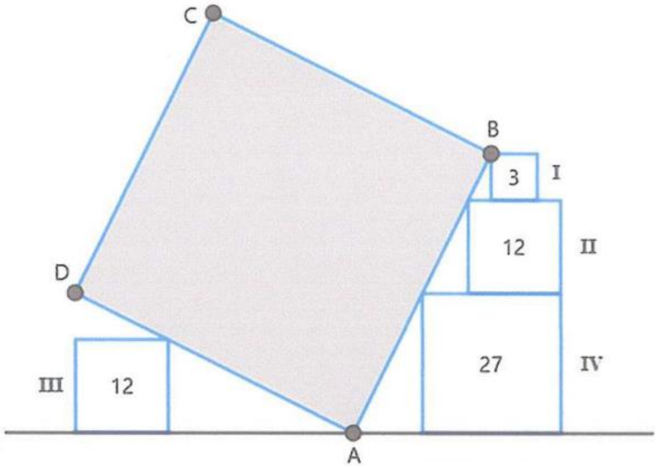




i) s.(40) = 20^2 => s = $\frac{400}{40} = 10$ cm. Logo, 2r = 40 – 10 => r = 15.

ii) $\frac{x}{20} = \frac{15}{25} =>$ x = $\frac{(20).(15)}{25} = \frac{(4).(15)}{5} =>$ x = 4 x 3 = 12. Logo, PQ = k = 2.(12) = 24 cm.

Questão 13. Os quatro quadrados menores identificados na figura abaixo têm áreas iguais a 3 cm^2 (I), 12 cm^2 (II), 12 cm^2 (III) e 27 cm^2 (IV). Sabe-se que o quadrado maior ABCD (hachurado) está apoiado em apenas um dos vértices de cada um dos outros quatro quadrados, conforme apresentado na figura abaixo:



Nesse caso, assinale, dentre as alternativas a seguir, aquela que expressa corretamente, em cm^2, a área do quadrado maior ABCD.

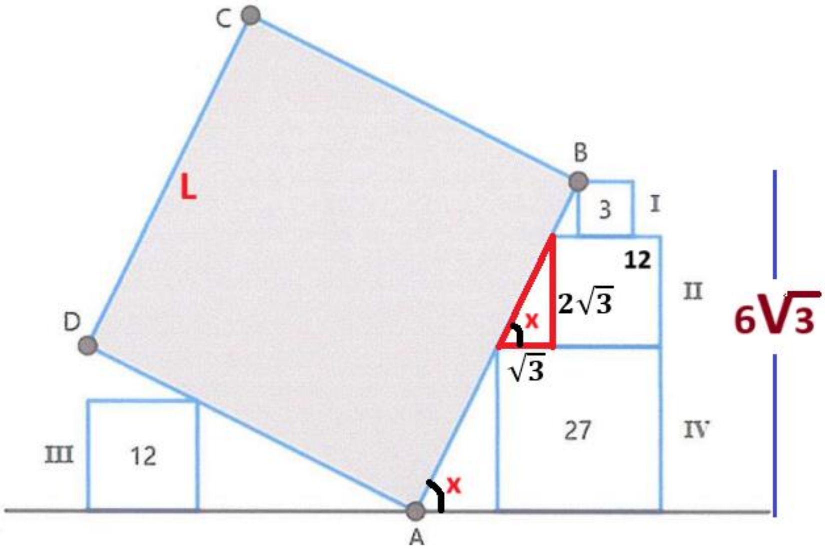
a) 120 cm^2 b) 125 cm^2 c) 135 cm^2

d) 140 cm^2 e) 150 cm^2

Solução. De acordo com as áreas indicadas, temos que os lados respectivos dos quadrados são:

Lado (I) = $\sqrt{3}$, Lado (I) = Lado (II) = $2\sqrt{3}$ e Lado (IV) = $3\sqrt{3}$. Dessa forma a distância entre B e a base onde está apoiado o vértice A mede $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Observando a figura abaixo, os ângulos marcados e aplicando relações trigonométricas, temos:



i) tgx = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ = 2; ii) 1 + tg^2x = sec^2x => sec^2x = 1 + 4 = 5 => cos^2x = $\frac{1}{sec^2x} = \frac{1}{5}$;

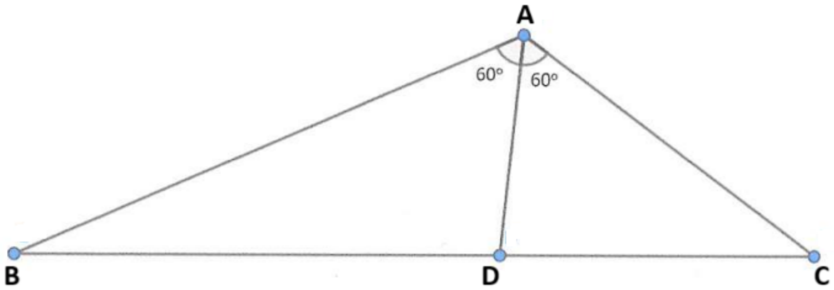
iii) sen^2x = 1 – cos^2x = 1 – $\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Logo, senx = $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Como o ângulo é agudo, o seno é positivo.

iv) O lado L do quadrado corresponde ao lado AB.

Temos: senx = $\frac{6\sqrt{3}}{L} => \frac{6\sqrt{3}}{L} = \frac{2\sqrt{5}}{5} =>$ L = $\frac{30\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{15}}{5} = 3\sqrt{15}$.

A área do quadrado ABCD será, portanto, $L^2 = (3\sqrt{15})^2$ = 9 x 15 = 135 cm^2.

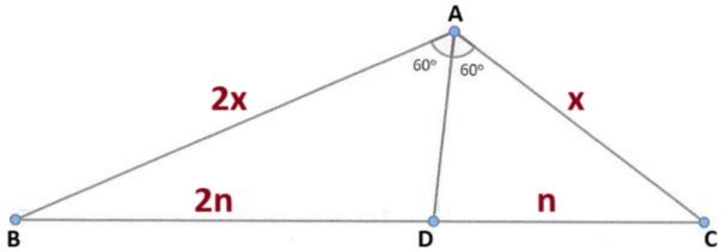
Questão 14. No triângulo ABC abaixo, o ângulo Â é dividido pela bissetriz AD em dois ângulos de 60º. Sabe-se que AD = 10 cm e que o lado AB é o dobro do lado AC.



Dessa forma, assinale a alternativa que contém o comprimento correto, em cm, do lado BC.

a) $12\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{7}$ c) $15\sqrt{3}$ **d)** $15\sqrt{7}$ e) $20\sqrt{7}$

Solução. De acordo com o teorema das bissetrizes, se AB é o dobro de AC, então BD também é o dobro de DC. Considerando AB = 2x, AC = x, BD = 2n e DC = n, aplicamos a lei dos cossenos nos triângulos ADC e ABC.



i) L.C. (ADC) : $n^2 = x^2 + 10^2 - 2.(10).(x).\cos 60^o = x^2 + 10^2 - 2.(10).(x).\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow n^2 = x^2 - 10x + 100$;

ii) i) L.C. (ABC) : $(3n)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2.(2x).(x).\cos 120^o = 4x^2 + x^2 - 2.(2x).(x).\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 9n^2 = 7x^2 \Rightarrow n^2 = \frac{7x^2}{9}$;

iii) $x^2 - 10x + 100 = \frac{7x^2}{9} \Rightarrow 9x^2 - 7x^2 - 90x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 45x + 450 = 0 \Rightarrow (x - 15).(x - 30) = 0 \Rightarrow x = 15$ **ou** $x = 30$.

Se $x = 15 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{7.(15)^2}{9}} = \frac{15\sqrt{7}}{3}; = 5\sqrt{7}$ **e portanto,** $2n = 10\sqrt{7}$ **e** $BC = 15\sqrt{7}$.

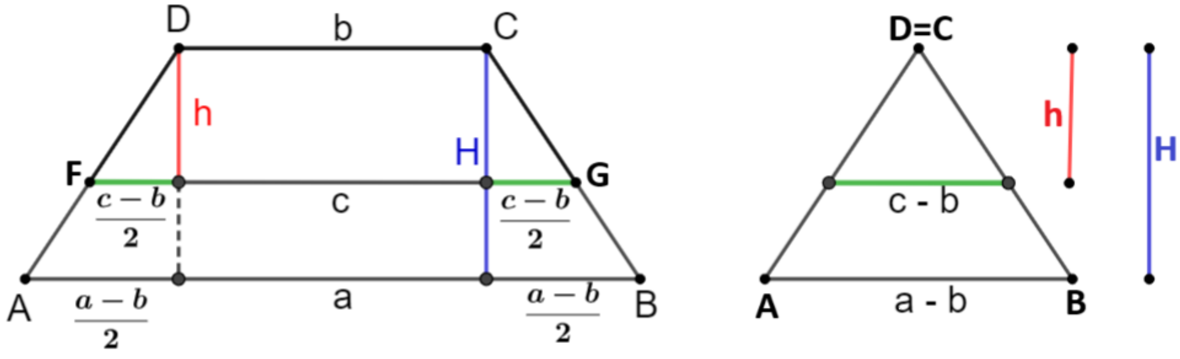
OBS: O valor x = 30 não satisfaz.

2n	2x	Bissetriz		Lei dos cossenos: (2n)² = (2x)² + (10)² - 2*(2x).(10)*cos60º						
26,45751	30	10		700	=	700				
										ok!
n	x	Bissetriz		Lei dos cossenos: (2n)² = (2x)² + (10)² - 2*(2x).(10)*cos60º						
13,22876	15	10		175	=	175				
2n	2x	Bissetriz		Lei dos cossenos: (2n)² = (2x)² + (10)² - 2*(2x).(10)*cos60º						
52,91503	60	10		2800	=	3100				
n	x	Bissetriz		Lei dos cossenos: (2n)² = (2x)² + (10)² - 2*(2x).(10)*cos60º						
26,45751	30	10		700	=	700				

Questão 15. As bases de um trapézio isósceles ABCD, com diagonais AC e BD, medem AB = a e CD = b. Seja **c** o comprimento do segmento FG interno ao trapézio e paralelo às suas bases, de modo a dividi-lo em duas áreas iguais. Desse modo, assinale a alternativa abaixo cuja expressão representa corretamente a medida do segmento de reta FG, de comprimento **c**, em função de a e b.

a) $c = \frac{a+b}{2}$ b) $c = \frac{2ab}{7ab}$ c) $c = \frac{a(a+b)}{2b}$ **d)** $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ e) $c = \sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$

Solução. Observe a figura do trapézio inteiro o triângulo formado a partir do corte conveniente nos vértices C e D.



O triângulo formado possui a proporção de semelhança: $\frac{c-b}{a-b} = \frac{h}{H} => h = \frac{(c-b).H}{a-b}$.

Por outro lado, como as áreas dos trapézios dividido pelo segmento c são equivalentes, temos que a área de FGCD é a metade da área de ABCD.

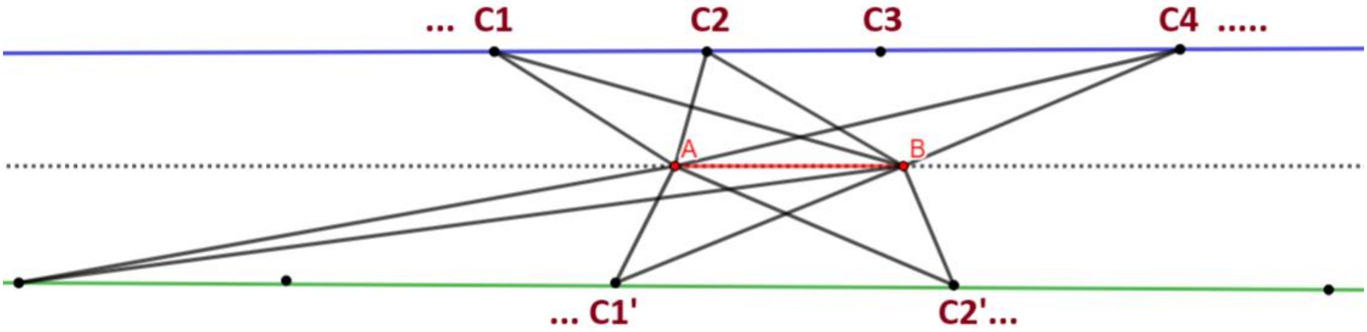
Isto é, $2.\left[\frac{(c+b).h}{2.(a-b)}\right] = \frac{(a+b).H}{2} => \frac{2.(c+b).(c-b).H}{(a-b)} = (a+b).H => 2.(c^2 - b^2) = a^2 - b^2 =>$

$=> 2c^2 - 2b^2 = a^2 - b^2 => 2c^2 = 2b^2 - b^2 + a^2 => c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} => c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Questão 16. Considerando dois pontos A e B distintos no plano, o conjunto dos pontos C desse mesmo plano, tais que a área do triângulo ABC seja igual a 1, é representado por um (a):

a) reta
b) parábola
c) par de retas
d) conjunto vazio
e) conjuto impossível de se determinar sem se conhecer A e B.

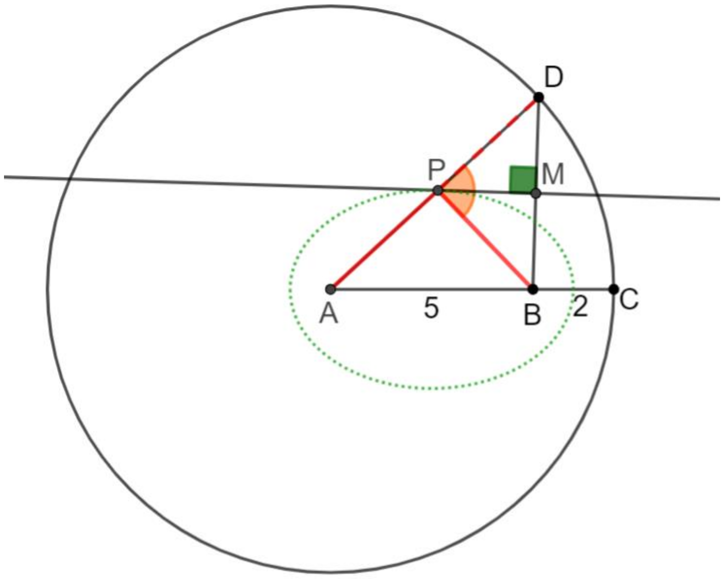
Solução. Os pontos A e B estão sobre a mesma reta, pois dois pontos determinam uma reta. Qualquer ponto C que esteja fora desta reta e forme um triângulo de área 1, estará sobre uma reta paralela à reta suporte de AB. Esta reta também poderá estar em outra posição. Logo, um par de retas. Observe a figura.



Questão 17. Os pontos A, B e C são colineares, sendo AB = 5 cm, BC = 2 cm; sabe-se também que B está entre A e C. Considere, ainda, os pontos C e D, que pertencem a uma circunferência com centro em A. Traça-se uma reta **r** perpendicular ao segmento BD passando pelo seu ponto médio. Chama-se P a interseção de **r** com AD. Com base nesses dados, assinale a alternativa que representa corretamente a soma das medidas, em cm, dos segmentos AP e BP.

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Solução. A reta r é a mediatriz do segmanto BD. Dessa forma a distância PB é igual à distância PD. A soma dos segmentos AP e PB resulta exatamente na medida do raio da circunferência. Logo AP + PB = 7.



OBS: Observe que o ponto P descreve uma elipse de focos A e B quando o ponto D percorre a circunferência.

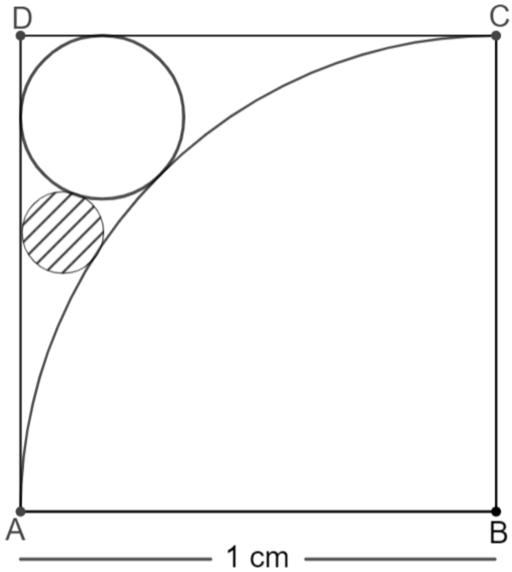
Questão 18. Considere x = 2023 e y = 2022. Nesse caso, assinale a alternaativa abaixo que apresenta corretamente o valor da expressão E = $\dfrac{x^3+y^3}{x^3+3x^2y+y^2.(3x+y)-3xy(x+y)}$.

a) 1 b) $\frac{1}{2023}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 4045 e) $\frac{1}{2024}$

Solução. Utilizando fatoração, temos:

$$E = \frac{x^3+y^3}{x^3+3x^2y+y^2.(3x+y)-3xy(x+y)} = \frac{x^3+y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2} = \frac{x^3+y^3}{x^3+y^3} = 1.$$

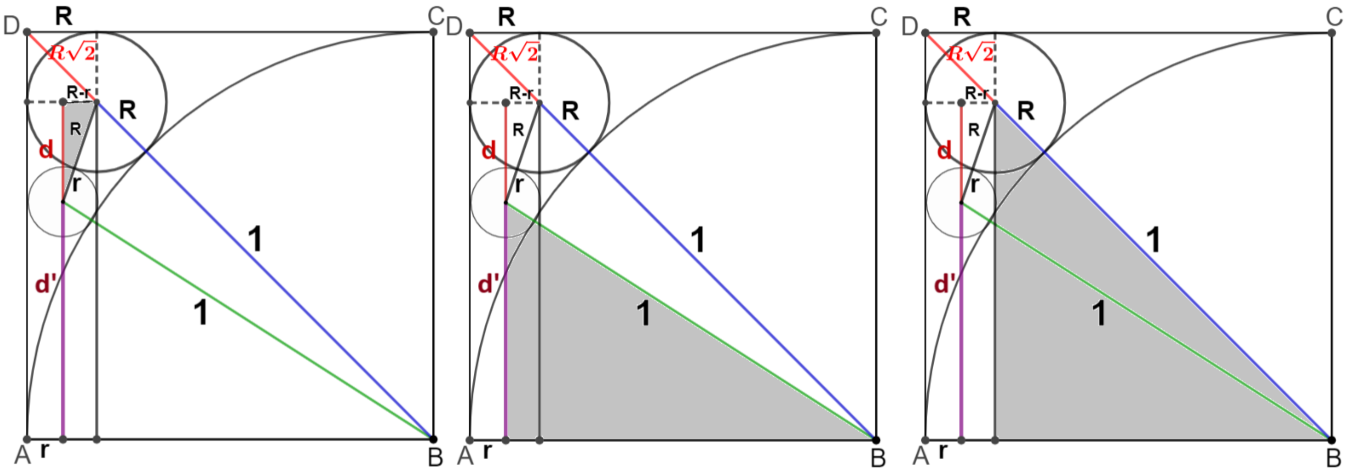
Questão 19. Na figura seguinte, o lado do quadrado ABCD é igual a 1 cm. Sabe-se que a circunferência menor (hachurada) é tangente simultaneamente ao lado AD do quadrado, ao círculo maior e ao arco AC de centro em B.



Nesse caso, assinale a alternativa abaixo que expressa corretamente, em cm, o raio da menor circunferência (hachurada).

a) $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$ c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$

Solução. Identificando as medidas necessárias para as relações, temos:



i) $1 + R + R.\sqrt{2} = 1.\sqrt{2} \Rightarrow R.(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow R = \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}-1)^2.$

ii) $d^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2 = 4Rr \Rightarrow d = 2.\sqrt{Rr}.$

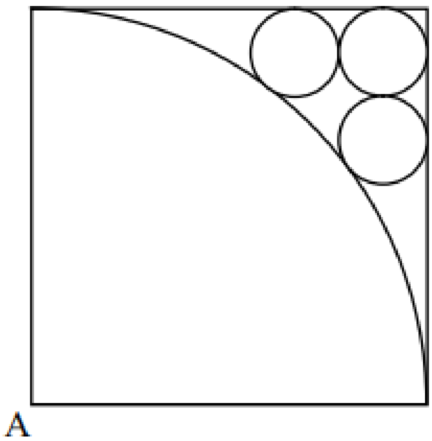
iii) $d'^2 = (1 + r)^2 - (1 - r)^2 = 1 + 2r + r^2 - 1 + 2r - r^2 = 4r \Rightarrow d = 2.\sqrt{r}.$

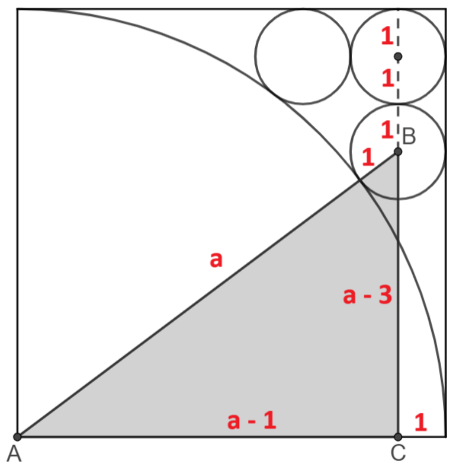
iv) $R + 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{r} = 1 \Rightarrow (2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{r})^2 = (1 - R)^2 \Rightarrow 4Rr + 8\sqrt{Rr^2} + 4r = (1 - R)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4r.(R + 2\sqrt{R} + 1) = (1 - R)^2 \Rightarrow 4r.(\sqrt{R} + 1)^2 = (1 - R)^2 \Rightarrow r = \frac{(1-R)^2}{4.(\sqrt{R}+1)^2}.$

v) Utilizando o item (i), temos: $r = \frac{[1-(2-2\sqrt{2}+1)]^2}{4.[(\sqrt{2}-1)+1]^2} = \frac{(2\sqrt{2}-2)^2}{4.(\sqrt{2})^2} = \frac{8-8\sqrt{2}+4}{8} = \frac{12-8\sqrt{2}}{8} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}.$

Questão Relacionada. A figura a seguir mostra um quadrado, um arco de circunferência de centro no vértice A e raio de comprimento igual ao lado do quadrado, e três circunferências iguais com as visíveis relações de tangência. Se o raio de cada circunferência pequena mede 1, quanto mede o lado do quadrado?





a) $6\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{6}$ **d)** 9 e) 8

Solução. Considerando <u>a</u> o lado do quadrado e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + (a - 3)^2 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 - 2a + 1 + a^2 - 6a + 9 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a - 1).(a - 9) = 0 \Rightarrow a = 1$ **ou** $a = 9$**. Como** $a = 1$ **é incompatível com as medidas,** $a = 9$**.**

Questão 20. Em preparação para as provas de atletismo dos jogos da Amizade, as alunas do CMRJ Ana, Bruna, Carla, Débora e Eva, nessa ordem, resolveram fazer um treinamento. Cada aluna daria uma volta na pista de 400 m e, assim que cruzasse a linha de chegada, a aluna seguinte iniciaria sua volta, e assim sucessivamente, até que a primeira aluna (Ana) começasse novamente o ciclo. Sabe-se que Ana fez a primeira volta em 50 segundos; Bruna, em 51 segundos; Carla, em 52 segundos; Débora, em 53 segundos e Eva em 54 segundos. A partir da segunda volta, o tempo de cada uma aumentou em 5 segundos por volta.
Considerando-se que Ana iniciou o treinamento exatamente às 09:00:00 horas da manhã, assinale a alternativa que identifica corretamente a aluna que estava correndo quando o relófio marcava exatamente 09h 56 min 56 s.

a) Ana b) Bruna c) Carla d) Débora e) Eva

Solução. O tempo decorrido entre 9h e 9h 56min 56 s corresponde a (56 x 60) + 56 = 3 360 + 56 = 3 416 s. Como cada aluna teve seu tem inicial acrescido de 5 segundos em cada volta posterior à primeira, temos que a diferença entre o tempo de 3 416 s e o 1º tempo de cada uma deve ser um múltiplo de 5. Verificando, temos:

Ana: 3 416 – 50 = 3 366 s que não é múltiplo de 5;

Bruna: 3 416 – 51 = 3 365 s que é múltiplo de 5;

Carla: 3 416 – 52 = 3 364 s que não é múltiplo de 5;

Débora: 3 416 – 53 = 3 363 s que é múltiplo de 5;

Eva: 3 416 – 54 = 3 362 s que é múltiplo de 5;