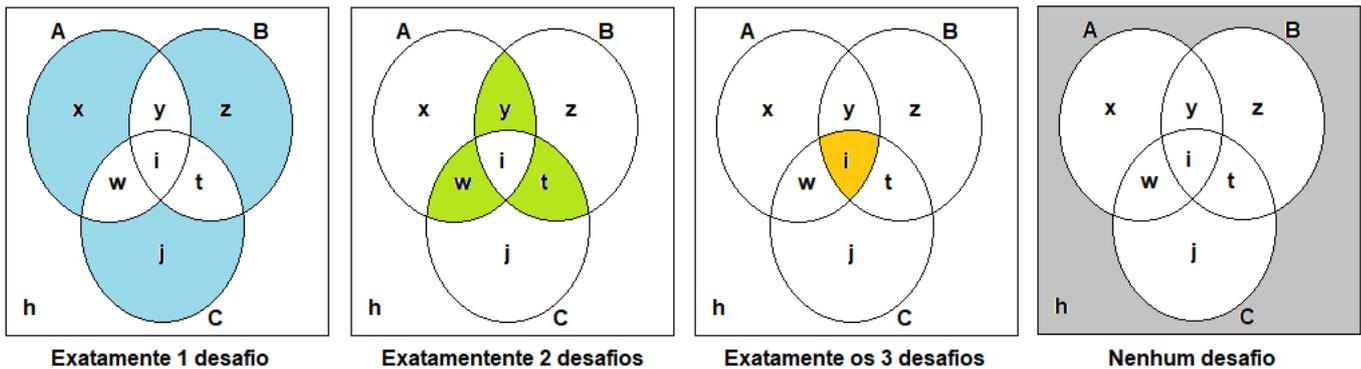


Solução. Organizando as informações em diagramas, temos:



Adicionando as três primeiras equações e substituindo os valores das duas últimas equações, temos:

$$\begin{cases} x + y + i + w = 18 \\ y + z + i + t = 15 \\ w + i + t + j = 12 \\ x + z + j = 20 \\ y + w + t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + z + j) + 2 \cdot (y + w + t) + 3i = 18 + 15 + 12 \\ x + z + j = 20 \\ y + w + t = 5 \end{cases} \Rightarrow 20 + 2 \cdot (5) + 3i = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 + 10 + 3i = 45 \Rightarrow 3i = 45 - 30 \Rightarrow 3i = 15 \Rightarrow i = 5.$$

Dessa forma $(x + z + j) + (y + w + t) + i = 20 + 5 + 5 = 30$. Logo, $h = 40 - 30 = 10$. Então, $\frac{i}{h} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\%$.

Questão 4. O setor de divisão administrativa responsável pela compra de alimentos para os 12 carneiros do Colégio, disponibilizou uma quantidade de ração suficiente para 64 dias de duração. Após 16 dias, foram transferidos 3 carneiros para outra unidade militar. Passando mais 14 dias, foram comprados 6 carneiros. Depois desta última compra, a reserva de ração foi suficiente para alimentar os carneiros por mais quantos dias?

- (A) 25 dias (B) 30 dias (C) 34 dias (D) 48 dias (E) 50 dias

Solução 1. Considerando R a quantidade de ração inicial, temos:

Carneiros	Dias	Ração
12	64	R
12	16	x

i) $\frac{R}{x} = \frac{64}{16} \cdot \frac{12}{12} \Rightarrow x = \frac{R}{4}$. Isto é, em 16 dias foi consumida a quarta parte da ração. Sobraram então, $\frac{3R}{4}$.

ii) Durante 14 dias, havia $12 - 3 = 9$ carneiros. E foram alimentados por 14 dias. Temos:

Carneiros	Dias	Ração
12	16	R/4
9	14	y

$$\frac{R/4}{y} = \frac{16}{14} \cdot \frac{12}{9} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{R}{4}\right) \cdot (14) \cdot (9)}{(16) \cdot (12)} = \frac{(14) \cdot (9) \cdot R}{(4) \cdot (16) \cdot (12)} = \frac{(7) \cdot (3) \cdot R}{(2) \cdot (16) \cdot (4)} = \frac{21R}{128}$$

Sobrou da ração, portanto, $\frac{3R}{4} - \frac{21R}{128} = \frac{75R}{128}$.

iii) Passaram-se então $16 + 14 = 30$ dias. Com a compra de 6 carneiros, ficaram 15 carneiros para consumir a ração que sobrou. Calculando o número de dias, temos:

Carneiros	Dias	Ração
9	14	21R/128
15	z	75R/128

OBS: Mais carneiros, menos dias de consumo (inversamente); Mais ração, mais dias (diretamente).

Temos: $\frac{14}{z} = \frac{15}{9} \cdot \frac{21R/128}{75R/128} \Rightarrow \frac{14}{z} = \frac{15}{9} \cdot \frac{7}{25} \Rightarrow \frac{2}{z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow z = (15) \cdot (2) = 30$ dias.

Solução 2. Considere V a quantidade de ração que cada vaca consome. Então em 64 dias seriam consumidas $(64).(12).V = 768.V$ unidades da ração.

Em 16 dias foram consumidos $(16).(12).V = 192.V$ unidades da ração.

Em 14 dias, com 3 carneiros a menos, foram consumidos $(9).(14).V = 126.V$ unidades de ração.

Dessa forma sobraram $768.V - (192.V + 126.V) = 768.V - 318.V = 450.V$ unidades de ração.

O número final de carneiros passou a ser $(9 + 6) = 15$ carneiros, que vai consumir tudo em $15.V$ por dia.

Logo, a ração que sobrou foi consumida pelos carneiros em $(450.V) \div (15.V) = 30$ dias.

Questão 5. Alguns alunos do CMRJ resolveram almoçar num restaurante para assistirem as aulas de reforço no período da tarde. Na hora de pagar a conta de R\$ 600,00, dois deles perceberam que estavam sem dinheiro, o que fez com que cada um dos alunos restantes contribuísse com mais R\$ 10,00. Sendo x o número total de pessoas, a soma dos algarismos de x é igual a:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solução. Se todos tivessem contribuído, caberia a cada um o valor $\frac{600}{x}$. Como dois não pagaram, a quantidade de contribuintes passou a ser $(x - 2)$ e o valor da contribuição ficou em $\frac{600}{x-2}$. Este valor é R\$ 10,00 a mais que o anterior. Temos:

$$\frac{600}{x-2} - \frac{600}{x} = 10 \Rightarrow 600x - 600(x-2) = 10x(x-2) \Rightarrow 10x^2 - 20x - 1200 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 120 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x - 12).(x + 10) = 0$. Logo, $x = 12$, pois x é um número inteiro e positivo. A soma dos algarismos é $1 + 2 = 3$.

Questão 6. Considere as afirmações a seguir:

I) Se $3x - y - 10z = 0$ e $x + 2y - z = 0$, então o valor da expressão $\frac{x^3 + x^2y}{xy^2 - z^3}$, sendo $z \neq 0$, é igual a 6.

II) Se a e b são números reais tais que $0 < a < b$ e $a^2 + b^2 = 6ab$, então o valor de $\frac{a+b}{a-b}$ é igual a $\sqrt{2}$.

III) O número $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ é igual a 2.

São verdadeiras:

(A) Somente II e III

(B) Somente I e II

(C) Somente I

(D) Somente II

(E) Somente III

Solução. Analisando as afirmações, temos:

$$I) \begin{cases} 3x - y - 10z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 10z = 0 \\ -3x - 6y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow -7y - 7z = 0 \Rightarrow y = -z.$$

Logo, $x = z - 2y \Rightarrow x = z - 2(-z) = 3z$. Substituindo os valores de x e y em função de z , temos:

$$\frac{x^3 + x^2y}{xy^2 - z^3} = \frac{(3z)^3 + (3z)^2(-z)}{(3z)(-z)^2 - z^3} = \frac{27z^3 - 9z^3}{3z^3 - z^3} = \frac{18z^3}{2z^3} = 9 \neq 6. \text{ Falsa.}$$

II) Falso. Se $0 < a < b$, então $a - b < 0$ e $a + b > 0$, pois ambos são positivos. Logo, $\frac{a+b}{a-b} < 0$. E $\sqrt{2} > 0$.

III) Utilizando radicais duplos, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} &= \sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{(3^2 - 8)}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{(3^2 - 8)}}{2}} - \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{(3^2 - 8)}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{(3^2 - 8)}}{2}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} - \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2. \text{ Verdadeiro.} \end{aligned}$$

Questão 7. Considere as afirmações a seguir:

I) Se $2^n + 2^{-n} = 5$, então $4^n + 4^{-n}$ é igual a 21.

II) Se $a = 3 - \sqrt[3]{5}$ e $b = \sqrt[3]{5} - 1$, então o valor de $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ é igual a 8.

III) Se $x + y + z = 6$, $xyz = 2$ e $xy + xz + yz = 11$, então o valor da expressão $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$ é igual a 7.

São verdadeiras:

- (A) Somente II e III (B) Somente I e II (C) Somente I e III (D) Somente II (E) Somente III

Solução. Analisando as afirmações, temos:

I) Elevando ao quadrado a primeira igualdade, temos: $(2^n + 2^{-n})^2 = 5^2 \Rightarrow 2^{2n} + 2 \cdot (2^n \cdot 2^{-n}) + 2^{-2n} = 25 \Rightarrow \Rightarrow 4^n + 2 + 4^{-n} = 25 \Rightarrow 4^n + 4^{-n} = 23 \neq 21$. Falsa.

II) $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$. Como $a + b = 3 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} - 1 = 2$, temos que: $(a + b)^3 = 2^3 = 8$. Verdadeiro.

III) $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{(x+y+z)^2 - 2(xy+xz+zy)}{xyz} = \frac{(6)^2 - 2(11)}{2} = \frac{36 - 22}{2} = \frac{14}{2} = 7$. Verdadeiro.

Questão 8. A Rosácea é usada, no âmbito da arquitetura, para dar nome às janelas com forma circular que evidenciam ornamentações.

As rosáceas foram um elemento bastante importante para a arquitetura gótica, sendo usadas nas fachadas de uma grande quantidade de igrejas. A arquitetura românica também fez uso destes elementos, porém, neste caso costumam-se apreciar nos setores laterais dos edifícios.

(Disponível em <https://conceito.de/rosacea>, acesso em 26/08/2021 às 21:00h)

A figura 1 abaixo representa uma rosácea que será utilizada como vitral de uma capela. A parte escura comporá o vitral com vidros vermelhos.

A figura 2 representa o esboço com as formas geométricas e medidas que auxiliarão na confecção do vitral.

Este esboço é formado por 5 círculos, sendo um círculo maior, de centro O e raio de 1 metro; e 4 círculos menores, que se tangenciam em C e, que também, tangenciam o círculo maior em E, F, G e H. Esses círculos menores têm diâmetros congruentes de 1 metro.



figura 1

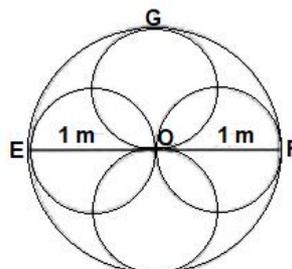


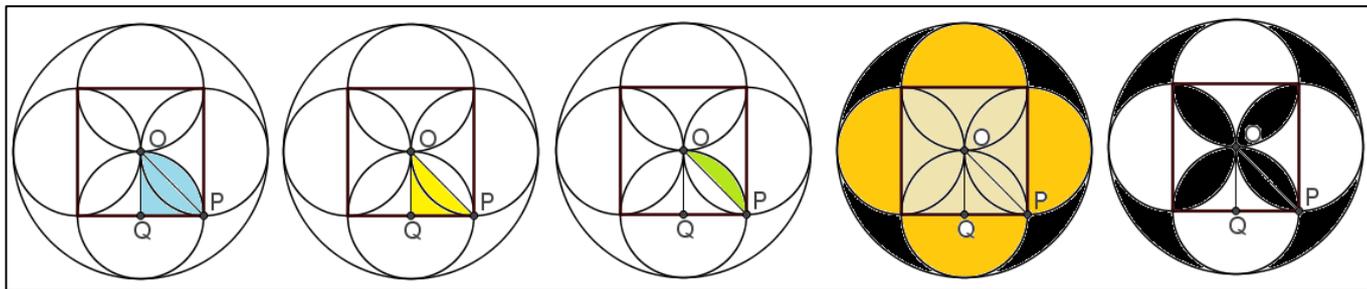
figura 2

Com base nas informações acima, determine, em metros quadrados, a quantidade de vidro vermelho necessária para compor o vitral.

- (A) $3\pi - 4$ (B) $\pi - 2$ (C) $4 - \pi$ (D) $2\pi - 4$ (E) $\pi - 3$

Solução. Observe na figura abaixo que a metade de uma das pétalas da rosácea possui área valendo a diferença entre a área do setor circular de 90° e a área do triângulo retângulo de catetos medindo 0,5 m.

Temos:



i) área (setor OPQ): $\frac{\pi \cdot (\frac{1}{2})^2}{4} = \frac{\pi}{16}$; ii) área do triângulo (OPQ): $\frac{(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{8}$;

iii) área do segmento circular: (meia pétala) = $\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$.

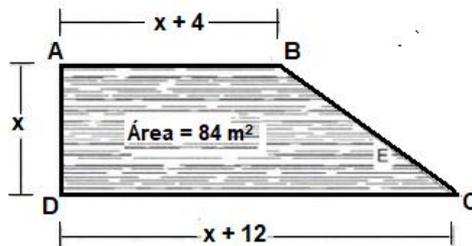
Como há 8 meias pétalas, a área das pétalas vale: $8 \cdot (\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}) = \frac{\pi}{2} - 1$.

iv) a parte escura de fora vale a entre a área do círculo de raio 1 e a soma das áreas de 4 semicircunferências de raio (1/2) e a do quadrado de lado 1.

$$A(\text{fora}) = \pi \cdot (1)^2 - \left[4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + 1 \right) \right] = \pi - \left[4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}{2} + 1 \right) \right] = \pi - \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

v) a soma das partes escuras de fora e a parte escura das pétalas vale: $\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2$.

Questão 9. Um terreno em forma de trapézio retângulo precisa ser completamente cercado com três voltas de arame farpado para protegê-lo de invasores. Para tanto, o proprietário possui as medidas dos lados \overline{AB} , \overline{AD} e \overline{DC} , em função de x , conforme a figura abaixo, ele também conhece a área do terreno que é de 84 m^2 .



Com os dados disponíveis, determine a quantidade de arame farpado em (m) metros a ser adquirida para cercar o terreno.

- (A) 132 m (B) 126 m (C) 134 m (D) 136 m (E) 128 m

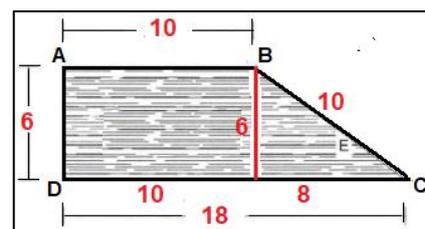
Solução. Utilizando a fórmula da área do trapézio, temos:

$$A(\text{trapézio}) = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{[(x+12)+(x+4)] \cdot x}{2} = 84 \Rightarrow x^2 + 8x - 84 = 0 \Rightarrow (x+14) \cdot (x-6) = 0$$

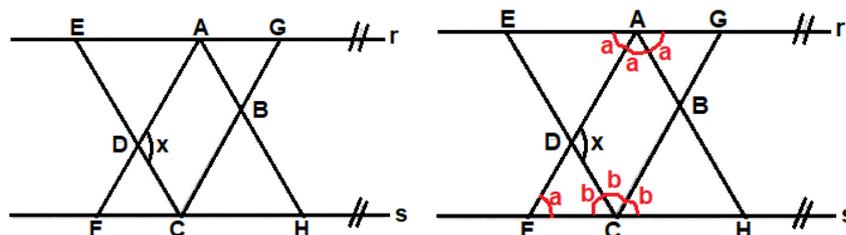
Como é positivo, pois é altura, $x = 6$. O lado BC é hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 6 e 8.

Logo, $BC = 10$. Dessa forma a quantidade de arame será:

$$Q = 3 \cdot (6 + 10 + 10 + 18) = 3 \cdot (44) = 132 \text{ m.}$$



Questão 10. O croqui abaixo foi confeccionado por um agrimensor, que determinou as paralelas r e s e, a partir do ponto de apoio F , traçou os segmentos \overline{FA} , \overline{AH} , e do ponto E , traçou os segmentos de reta \overline{EC} e \overline{CG} , sendo que, \overline{FA} é bissetriz do ângulo \widehat{EAB} ; \overline{AH} é bissetriz do ângulo \widehat{DAG} ; \overline{EC} é bissetriz do ângulo \widehat{FCG} e \overline{CG} é bissetriz do ângulo \widehat{DCH} .



A partir dos dados indicados no texto e no croqui, determine o ângulo x .

- (A) 120° (B) 110° (C) 100° (D) 90° (E) 80°

Solução. Utilizando as propriedades de paralelas cortadas por transversais, temos:

i) $3a = 3b = 180^\circ$. Logo, $a = b = 60^\circ$.

ii) x é ângulo externo do triângulo DFC . Logo, $x = a + b = 120^\circ$.

Questão 11. Foi realizada uma avaliação, valendo de 0 a 100, para seleção dos alunos que iriam compor a equipe de uma olimpíada de conhecimentos. Havia, inicialmente, 25 alunos e, para a aprovação, o aluno precisava obter uma nota igual ou superior a 60. Após a correção, o resultado foi de 10 alunos reprovados e 15 alunos aprovados, sendo a média aritmética dos reprovados 52 e a média aritmética dos aprovados 70. O professor, porém, considerou dar um

bônus de 5 pontos para todos os alunos, pois a participação deles durante as aulas de treinamento foi bastante efetiva e sem faltas. Com esse bônus, a média aritmética dos reprovados foi alterada para 52,4 e a dos aprovados foi alterada para 71,65. Determine corretamente a quantidade de alunos que mudou a condição de reprovado para aprovado.

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solução 1. Se a média de reprovados é 52, então $\frac{S(10)}{10} = 52 \Rightarrow S(10) = 520$, onde $S(10)$ é a soma das notas dos alunos reprovados. Como todos ganharam 5 pontos, $S(10) + 50 = 520 + 50 = 570$ será a nova soma das notas.

Da mesma forma, em relação aos aprovados, então $\frac{S(15)}{15} = 70 \Rightarrow S(15) = 1050$, onde $S(15)$ é a soma das notas dos alunos aprovados. Como todos ganharam 5 pontos, Temos que $S(15) + 50 = 1050 + 50 = 1125$ será a nova soma das notas.

Considerando x o número de alunos que conseguiram aprovação, após os 5 pontos, temos que o valor da soma das notas desses alunos será $S(x) + 5x$. Esse total sairá da soma das notas dos reprovados e irá para a soma das notas dos aprovados. Utilizando as novas médias, com $(10 - x)$ reprovados e $(15 + x)$ aprovados, temos:

i) $\frac{570 - [S(x) + 5x]}{10 - x} = 52,4 \Rightarrow 570 - S(x) - 5x = 524 - 52,4x \Rightarrow S(x) = 570 - 524 + 52,4x - 5x \Rightarrow S(x) = 47,4x + 46.$

ii) $\frac{1125 + [S(x) + 5x]}{15 + x} = 71,65 \Rightarrow 1125 + S(x) + 5x = 1074,75 + 71,65x \Rightarrow S(x) = 1074,75 - 1125 + 71,65x - 5x \Rightarrow S(x) = 66,65x - 50,25.$

iii) Igualando $S(x)$, temos: $66,65x - 50,25 = 47,4x + 46 \Rightarrow 66,65x - 47,4x = 50,25 + 46 \Rightarrow 19,25x = 96,25 \Rightarrow x = \frac{96,25}{19,25} \Rightarrow x = 5.$

Solução 2. Se a média dos aprovados é 70, então a soma das notas dos aprovados é $(70) \cdot (15) = 1050$. Com o bônus, será adicionado a esta soma $(15) \cdot (5) = 75$, totalizando 1125 pontos.

Para que um reprovado passe a aprovado com o bônus, ele terá que ter no mínimo 55 pontos. Como a média dos reprovados é 52, temos que 52 está a mesma distância de 55 e 49, pois $52 - 3 < 52 < 52 + 3$.

Considerando x o número de alunos com 55 pontos, no máximo, temos $(10 - x)$ com no mínimo 49.

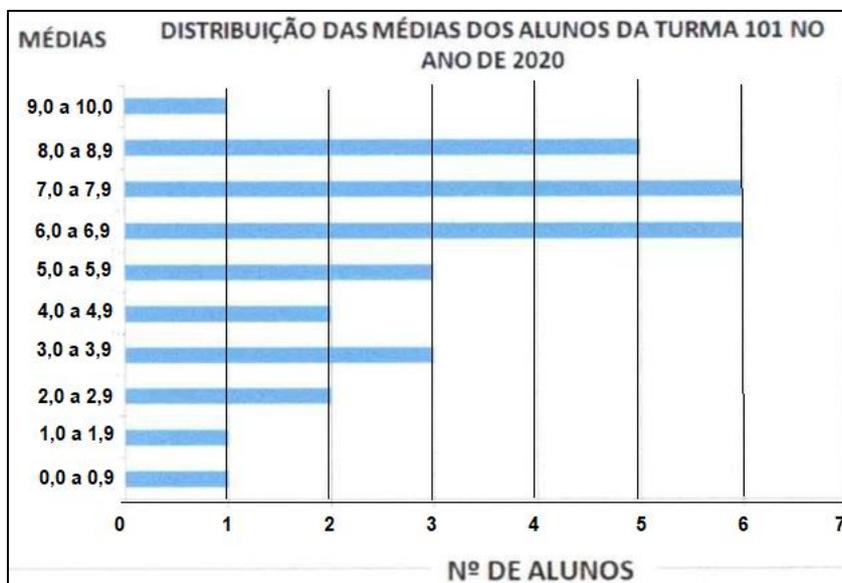
Logo, $\frac{55 \cdot (x) + 49 \cdot (10 - x)}{10} = 52 \Rightarrow 55x + 490 - 49x = 520 \Rightarrow 6x = 520 - 490 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5.$

OBS: Dessa forma 5 alunos passaram a aprovados e sendo y a médias de suas notas, após o bônus temos:

Nova média de aprovados = 71,65 $\Rightarrow \frac{1125 + 5 \cdot y}{20} = 71,65 \Rightarrow 1125 + 5y = 1433 \Rightarrow 5y = 308 \Rightarrow y = 61,6.$

Isto é, podemos considerar que os 5 alunos antes do bônus possuíam nota $61,6 - 5 = 56,6.$

Questão 12. O alamar é um dos símbolos da meritocracia dos Colégios Militares. É conquistado pelo aluno que obtiver média igual ou superior a 8,0 em todas as disciplinas. Além da nota, o aluno tem que ter bom comportamento, respeitando as normas do Colégio Militar.



Conforme a distribuição de médias da tabela acima, qual o percentual de alunos da turma 101 que poderá concorrer à conquista do alamar no ano de 2020?

(A) 3,33%

(B) 16,66%

(C) 20,00%

(D) 25,00%

(E) 30,00%

Solução. O número de alunos da turma é $3 \cdot (1) + 2 \cdot (2) + 2 \cdot (3) + 5 + 2 \cdot (6) = 3 + 4 + 6 + 5 + 12 = 30$ alunos.

Com média igual ou superior a 8,0 há $(1 + 5) = 6$ alunos. O percentual corresponde a $\frac{6}{30} = 0,2 = 20\%$.