MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DECEx - DEPA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO Médio 2021/2022
EXAME INTELECTUAL 17 DE OUTUBRO DE 2021

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

ARTE: PC das Neves

Questão 1. O aluno Sá Bido, aprovado no concurso do CMRJ para ingresso no 1° ano do Ensino Médio, foi à Secretaria preencher sua ficha de matrícula que, dentre outras variáveis, perguntava: idade, religião, disciplina favorita, se possui alguma alergia e o número do CPF.
Dentre as variáveis da ficha de matrícula citadas acima, quantas são qualitativas?

(A) uma (B) duas (C) três **(D)** quatro (E) cinco

Solução. Variáveis qualitativas são as que não envolvem dados numéricos que podem ser ordenados e sim representam uma classificação. No caso somente a idade pode ser ordenada. Logo, há 4 variáveis qualitativas.

Questão 2. Um aluno da equipe de robótica do colégio recebeu a missão de separar 200 leds de cor vermelha, 180 leds da cor amarela, 150 leds da cor azul e 120 leds da cor verde. Ele pretende montar kits de modo que não sobrem leds e que a quantidade de leds por cor seja a mesma em todos os kits. Desse modo, determine o menor múltiplo comum das quantidades de leds de cada um dos kits.

(A) 200 **(B)** 180 (C) 150 (D) 120 (E) 100

Solução. A quantidade de kits será o MDC (200, 180, 150, 120) = 2 x 5 = 10.

Dessa forma cada kit terá:

- 200 ÷ 10 = 20 leds da cor vermelha;

- 180 ÷ 10 = 18 leds da cor amarela;

- 150 ÷ 10 = 15 leds da cor azul;

- 120 ÷ 10 = 12 leds da cor verd.

O MMC (20, 18, 15, 12) = 2^2 x 3^2 x 5 = 180.

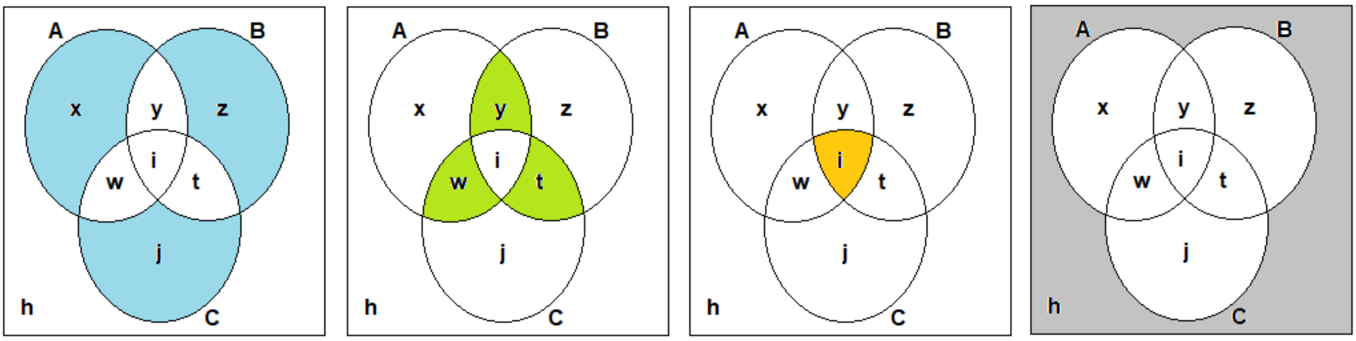
200	180	150	120	2
100	90	75	60	2
50	45	75	30	2
25	45	75	15	3
25	15	25	5	3
25	5	25	5	5
5	1	5	1	5
1	1	1	1	

20	18	15	12	2
10	9	15	6	2
5	9	15	3	3
5	3	5	1	3
5	1	5	1	5
1	1	1	1	

Questão 3. Foram dados 3 desafios para os 40 alunos que compõem a equipe de Xadrez do Colégio. Temos o conhecimento de que 18 deles concluíram o desafio A, 15 concluíram o desafio B e 12 concluíramo desafio C. Sabendo que 20 concluíram exatamente um desafio e 5 concluíram exatamente 2 desafios, determine corretamente a porcentagem de alunos que concluíram os três desafios em relação aos que não concluíram nenhum.

(A) 30% (B) 35% (C) 40% (D) 45% **(E)** 50%

Solução. Organizando as informações em diagramas, temos:



Exatamente 1 desafio | Exatamentente 2 desafios | Exatamente os 3 desafios | Nenhum desafio

Adicionando as três primeiras equações e substituindo os valores das duas últimas equações, temos:

$$\begin{cases} x+y+i+w=18 \\ y+z+i+t=15 \\ w+i+t+j=12 \\ x+z+j=20 \\ y+w+t=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+z+j)+2.(y+w+t)+3i=18+15+12 \\ x+z+j=20 \\ y+w+t=5 \end{cases}$$ **=> 20 + 2.(5) + 3i = 45 =>**

=> 20 + 10 + 3i = 45 => 3i = 45 – 30 => 3i = 15 => i = 5.

Dessa forma (x + z + j) + (y + w + t) + i = 20 + 5 + 5 = 30. Logo, h = 40 – 30 = 10. Então, $\frac{i}{h}=\frac{5}{10}$ **= 0,5 = 50%.**

Questão 4. O setor de divisão administrativa respons[ável pela compra de alimentos para os 12 carneiros do Colégio, disponibilizou uma quantidade de ração suficiente para 64 dias de duração. Após 16 dias, foram transferidos 3 carneiros para outra unidade militar. Passando mais 14 dias, foram comprados 6 carneiros. Depois desta última compra, a reserva de ração foi suficente para alimentar os carneiros por mais quantos dias?

(A) 25 dias **(B)** 30 dias (C) 34 dias (D) 48 dias (E) 50 dias

Solução. Considerando R a quantidade de ração incial, temos:

Carneiros	Dias	Ração
12	64	R
12	16	x

i) $\frac{R}{x}=\frac{64}{16}.\frac{12}{12}\Rightarrow$ **x =** $\frac{R}{4}$**. Isto é, em 16 dias foi consumida a quarta parte da ração. Sobraram então,** $\frac{3R}{4}$**.**

ii) Durante 14 dias, havia 12 – 3 = 9 carneiros. E foram alimantados por 14 dias. Temos:

Carneiros	Dias	Ração
12	16	R/4
9	14	y

$$\frac{R/4}{y}=\frac{16}{14}.\frac{12}{9}\Rightarrow y=\frac{\left(\frac{R}{4}\right).(14).(9)}{(16).(12)}=\frac{(14).(9).R}{(4).(16).(12)}=\frac{(7).(3).R}{(2).(16).(4)}=\frac{21R}{128}.$$

Sobrou da ração, portanto, $\frac{3R}{4}-\frac{21R}{128}=\frac{75R}{128}$**.**

iii) Passaram-se então 16 + 14 = 30 dias. Com a compra de 6 carneiros, ficaram 15 carneiros para consumir a ração que sobrou. Calculando o número de dias, temos:

Carneiros	Dias	Ração
9	14	21R/128
15	z	75R/128

OBS: Mais carneiros, menos dias de consumo (inversamente); Mais ração, mais dias (diretamente).

Temos: $\frac{14}{z}=\frac{15}{9}.\frac{21R/128}{75R/128}\Rightarrow\frac{14}{z}=\frac{15}{9}.\frac{7}{25}\Rightarrow\frac{2}{z}=\frac{1}{3}.\frac{1}{5}\Rightarrow$ **z = (15).(2) = 30 dias.**

Questão 5. Alguns alunos do CMRJ resolveram almoçar num restaurante para assistirem as aulas de reforço no período da tarde. Na hora de pagar a conta de R$ 600,00, dois deles perceberam que estavam sem dinheiro, o que fez com que cada um dos alunos restantes contribuísse com mais R$ 10,00. Sendo x o número total de pessoas, a soma dos algarismos de x é igual a:

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Solução. Se todos tivessem contribuído, caberia a cada um o valor $\frac{600}{x}$. Como dois não pagaram, a quantidade de contribuintes passou a ser (x – 2) e o valor da contribuição ficou em $\frac{600}{x-2}$. Este valor é R$ 10,00 a mais que o anterior. Temos:

$\frac{600}{x-2} - \frac{600}{x}$ = 10 => 600x – 600x + 1200 = 10x.(x – 2) => $10x^2 - 20x - 1200 = 0$ => $x^2 - 2x - 120 = 0$ =>

=> (x – 12).(x + 10) = 0. Logo, x = 12, pois x é um número inteiro e positivo. A soma dos algarismos é 1 + 2 = 3.

Questão 6. Considere as afirmações a seguir:

I) Se 3x – y – 10z = 0 e x + 2y – z = 0, então o valor da expressão $\frac{x^3+x^2y}{xy^2-z^3}$, sendo z ≠ 0, é igual a 6.

II) Se a e b são números reais tais que 0 < a < b e $a^2 + b^2 = 6ab$, então o valor de $\frac{a+b}{a-b}$ é igual a $\sqrt{2}$.

III) O número $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é igual a 2.

São verdadeiras:

(A) Somente II e III (B) Somente I e II (C) Somente I (D) Somente II **(E)** Somente III

Solução. Analisando as afirmações, temos:

I) $\begin{cases} 3x - y - 10z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \to \times(-3) \end{cases}$ => $\begin{cases} 3x - y - 10z = 0 \\ -3x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$ => – 7y – 7z = 0 => y = – z.

Logo, x = z – 2y => x = z – 2.(– z) = 3z. Substituindo os valores de x e y em função de z, temos:

$$\frac{x^3+x^2y}{xy^2-z^3} = \frac{(3z)^3+(3z)^2.(-z)}{(3z).(-z)^2-z^3} = \frac{27z^3-9z^3}{3z^3-z^3} = \frac{18z^3}{2z^3} = 9 \neq 6. \text{ Falsa.}$$

II) Falso. Se 0 < a < b, então a – b < 0 e a + b > 0, pois amb+os são positivos. Logo, $\frac{a+b}{a-b} < 0$. E $\sqrt{2} > 0$.

III) Utilizando radicais duplos, temos:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{(3^2-8)}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{(3^2-8)}}{2}} - \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{(3^2-8)}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{(3^2-8)}}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} - \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2.$$ **Verdadeiro.**

Questão 7. Considere as afirmações a seguir:

I) Se $2^n + 2^{-n} = 5$, então $4^n + 4^{-n}$ é igual a 21.

II) Se $a = 3 - \sqrt[3]{5}$ e $b = \sqrt[3]{5} - 1$, então o valor de $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ é igual a 8.

III) Se x + y + z = 6, xyz = 2 e xy + xz + yz = 11, então o valor da expressão $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$ é igual a 7.

São verdadeiras:

(A) Somente II e III (B) Somente I e II (C) Somente I e III (D) Somente II (E) Somente III

Solução. Analisando as afirmações, temos:

I) Elevando ao quadrado a primeira igualdade, temos: $(2^n + 2^{-n})^2 = 5^2$ => $2^{2n} + 2.(2^n.2^{-n}) + 2^{-2n} = 25$ =>
=> $4^n + 2 + 4^{-n} = 25$ => $4^n + 4^{-n} = 23 \neq 21$. Falsa.

II) $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$. Como $a + b = 3 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} - 1 = 2$, temos que: $(a + b)^3 = 2^3 = 8$. Verdadeiro.

III) $$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = \frac{(x+y+z)^2-2(xy+xz+zy)}{xyz} = \frac{(6)^2-2(11)}{2} = \frac{36-22}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$ **Verdadeiro.**

Questão 8. A Rosácea é usada, no âmbito da arquitetura, para dar nome às janelas com forma circular que evidenciam ornamentações.

As rosáceas foram um elemento bstante impostante para a arquitetura gótica, sendo usadas nas fachadas de uma grande quantidade de igrejas. A arquitetura românica também fez uso destes elementos, porém, neste caso costumam-se apreciar nos setores laterais dos edifícios.

(Disponível em https://conceito.de/rosacea, acesso em 26/08/2021às 21:00h)

A figura 1 abaixo representa uma rosácea que será utilizada como vitral de uma capela. A parte escura comporá o vitral com vidros vermelhos.

A figura 2 representa o esboço com as formas geométricas e medidas que auxiliarão na confecção do vitral.

Este esboço é formado por 5 círculos, sendo um círculo maior, de centro O e raio de 1 metro; e 4 círculos menores, que se tangenciam em C e, que também, tangenciam o círculo maior em E, F, G e H. Esses círculos menores têm diâmetros congruentes de 1 metro.


figura 1

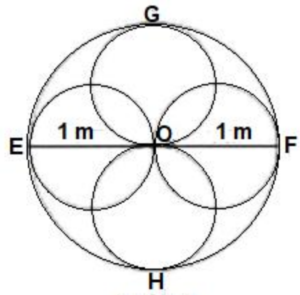
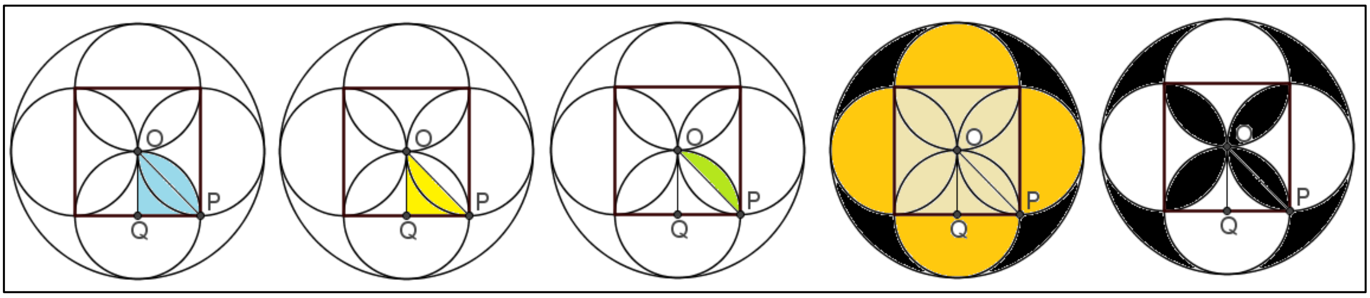


figura 2

Com base nas informações acima, determine, em metros quadrados, a quantidade de vidro vermelho necessária para compor o vitral.

(A) 3π – 4 **(B)** π – 2 (C) 4 – π (D) 2π – 4 (E) π – 3

Solução. Observe na figura abaixo que a metade de uma das pétalas da rosácea possui área valendo a diferença entre a área do setor circular de 90° e a área do triângulo retângulo de catetos medindo 0,5 m. Temos:



i) área (setor OPQ): $\frac{\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi}{16}$; **ii) área do triângulo (OPQ):** $\frac{\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{8}$;

iii) área do segmento circular: (meia pétala) = $\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$.

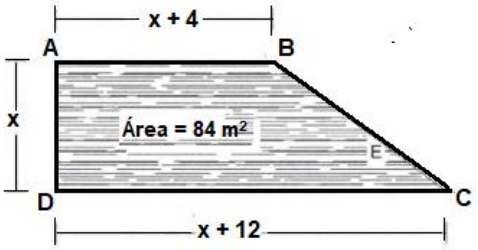
Como há 8 meias pétalas, a área das pétalas vale: 8. $\left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$.

iv) a parte escura de fora vale a entre a área do círculo de raio 1 e a soma das áreas de 4 semicircunferências de raio (1/2) e a do quadrado de lado 1.

$$\mathbf{A(fora)} = \pi.(1)^2 - \left[4.\left(\frac{\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right) + 1\right] = \pi - \left[4.\left(\frac{\pi\left(\frac{1}{4}\right)}{2}\right) + 1\right] = \pi - \left[\frac{\pi}{2} + 1\right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

v) a soma das partes escuras de fora e a parte escura das pétalas vale: $\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2$.

Questão 9. Um terreno em forma de trapézio retângulo precisa ser completamente cercado com três voltas de arame farpado para protege-lo de invasores. Para tanto, o proprietário possui as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, em função de x, conforme a figura abaixo, ele também conhece a área do terreno que é de 84 m^2.



Com os dados disponíveis, determine a quantidade de arame farpado em (m) metros a ser adquirida para cercar o terreno.

(A) 132 m (B) 126 m (C) 134 m (D) 136 m (E) 128 m

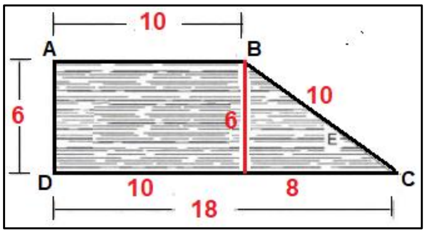
Solução. Utilizando a fórmula da área do trapézio, temos:

A(trapézio) = $\frac{(B+b).h}{2} => \frac{[(x+12)+(x+4)].x}{2} = 84$ => $x^2 + 8x - 84 = 0$ => $(x + 14).(x - 6) = 0$.

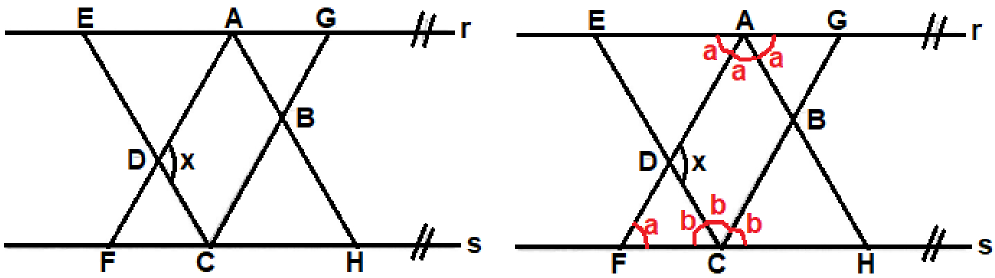
Como é positivo, pois é altura, x = 6. O lado BC é hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 6 e 8.

Logo, BC = 10. Dessa forma a quantidade de arame será:

Q = 3.(6 + 10 + 10 + 18) = 3.(44) = 132 m.



Questão 10. O croqui abaixo foi confeccionado por um agrimensor, que determinou as paralelas r e s e, a partir do ponto de apoio F, traçou os segmentos $\overline{FA}$, $\overline{AH}$, e do ponto E, traçou os segmentos de reta $\overline{EC}$ e $\overline{CG}$, sendo que, $\overline{FA}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{EAB}$; $\overline{AH}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{DAG}$; $\overline{EC}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{FCG}$ e $\overline{CG}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{DCH}$.



A partir dos dados indicados no texto e no croqui, determine o ângulo x.

(A) 120° (B) 110° (C) 100° (D) 90° (E) 80°

Solução. Utilizando as propriedades de paralelas cortadas por transversais, temos:

i) 3a = 3b = 180°. Logo, a = b = 60°.

ii) x é ângulo externo do triângulo DFC. Logo, x = a + b = 120°.

Questão 11. Foi realizada uma avaliação, valendo de 0 a 100, para seleção dos alunos que iriam compor a equipe de uma olimpíada de conhecimentos. Havia, inicialmente, 25 alunos e, para a aprovação, o aluno precisava obter uma nota igual ou superior a 60. Após a correção, o resultado foi de 10 alunos reprovados e 15 alunos aprovados, sendo a média aritmética dos reprovados 52 e a média aritmética dos aprovados 70. O professor, porém, considerou dar um bônus de 5 pontos para todos os alunos, pois a participação deles durante as aulas de treinamento foi bastante efetiva e sem faltas. Com esse bônus, a média aritmética dos reprovados foi alterada para 52,4 e a dos aprovados foi alterada para 71,65. Determine corretamente a quantidade de alunos que mudou a condição de reprovado para aprovado.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D)** 5 (E) 6

Solução. Se a média dos aprovados é 70, então a soma das notas dos aprovados é (70).(15) = 1050. Com o bônus, será adicionado a esta soma (15).(5) = 75, totalizando 1125 pontos.

Para que um reprovado passe a aprovado com o bônus, ele terá que ter no mínimo 55 pontos. Como a média dos reprovados é 52, temos que 52 está a mesma distância de 55 e 49, pois 52 – 3 < 52 < 52 + 3.

Considerando x o número de alunos com 55 pontos, no máximo, temos (10 – x) com no mínimo 49.

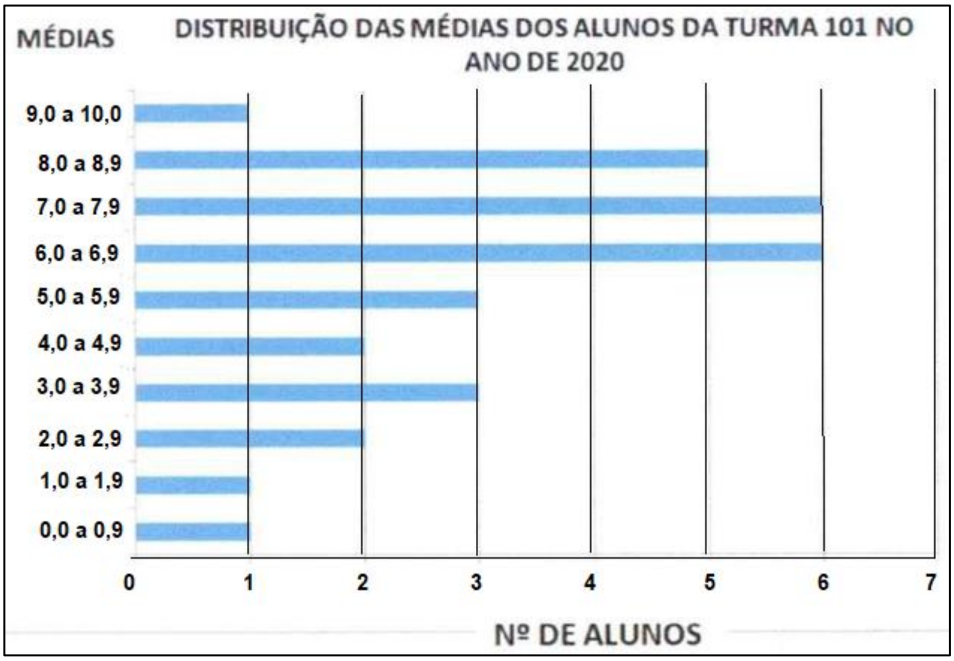
Logo, $\frac{55.(x)+49.(10-x)}{10} = 52$ **=> 55x + 490 – 49x = 520 => 6x = 520 – 490 => 6x = 30 => x = 5.**

OBS: Dessa forma 5 alunos passaram a aprovados e sendo y a médias de suas notas, após o bônus temos:

Nova média de aprovados = 71,65 => $\frac{1125 + 5.y}{20} = 71{,}65 \Rightarrow$ **1125 + 5y = 1433 => 5y = 308 => y = 61,6.**

Isto é, podemos considerar que os 5 alunos antes do bônus possuíam nota 61,6 – 5 = 56,6.

Questão 12. O alamar é um dos símbolos da meritocracia dos Colégios Militares. É conquistado pelo aluno que obtiver média igual ou superior a 8,0 em todas as disciplinas. Além da nota, o aluno tem que ter bom comportamento, respeitando as normas do Colégio Militar.



Conforme a distribuição de médias da tabela acima, qual o percentual de alunos da turma 101 que poderá concorrer à conquista do alamar no ano de 2020?

(A) 3,33% (B) 16,66% **(C)** 20,00% (D) 25,00% (E) 30,00%

Solução. O número de alunos da turma é 3.(1) + 2(2) + 2(3) + 5 + 2.(6) = 3 + 4 + 6 + 5 + 12 = 30 alunos.

Com média igual ou superior a 8,0 há (1 + 5) = 6 alunos.

Este valor corresponde ao percentual de $\frac{6}{30} = 0{,}2 = 20\%$**.**