COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2020/2021
EXAME INTELECTUAL 17 DE OUTUBRO DE 2020

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

QUESTÃO 1) O controle de qualidade de uma fábrica que produz latas de leite em pó retirou, aleatoriamente, 10 latas de um lote para verificar se a quantidade de leite em pó foi colocada corretamente em cada lata. As latas deveriam conter 500 g do produto cada uma. A tabela a seguir mostra os resultados das pesagens do conteúdo dessas 10 latas. O esquema a seguir representa esses palcos.

Lata 1	498 g
Lata 2	502 g
Lata 3	500 g
Lata 4	498 g
Lata 5	495 g
Lata 6	501 g
Lata 7	500 g
Lata 8	500 g
Lata 9	499 g
Lata 10	504 g

Ordenada

Lata 5	495 g
Lata 1	498 g
Lata 4	498 g
Lata 9	499 g
Lata 3	500 g
Lata 7	500 g
Lata 8	500 g
Lata 6	501 g
Lata 2	502 g
Lata 10	504 g

Valores centrais

Se os números M1, M2 e M3 são, respectivamente, a média, a moda e a mediana dos valores da tabela, então é carreto afirmar que:

(A) M3 < M1 < M2. (B) M1 = M2 = M3. (C) M1 = M2 < M3. **(D)** M1 < M2 = M3. (E) M1 < M2 < M3.

Solução. Colocando em ordem crescente das massas e de acordo com os conceitos de cada medida, temos:

M_1 = $\frac{495+2.(498)+499+3.(500)+501+502+504}{10}=\frac{495+996+499+1500+501+502+504}{10}=\frac{4997}{10}=$ **499,7.**

Como há um número par de dados, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais: lata 3 e lata 7.

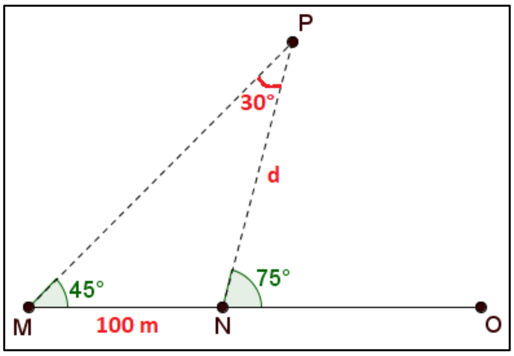
M_2 = $\frac{500+500}{2}=500.$

A moda é a medida cujo valor apareceu com mais frequência, no caso 500 g (3 vezes). Logo, M_3 = 500.

QUESTÃO 2) O ciclista Tiago, andando em linha reta, passou sucessivamente pelos pontos M, N e O. Quando ele estava em M, avistou outro ciclista parado no ponto P, de modo que o ângulo PMN media 45°. Após pedalar 100 m até o ponto N, avistou o mesmo ciclista em P, de modo que o ângulo PNO media 75°. Com base nessas informações, é carreto afirmar que a distância, em linha reta, que Tiago precisaria percorrer para ir do ponto N ao ponto P é igual a:

(A) $\frac{100\sqrt{6}}{3}$ m (B) 100 m **(C)** $100\sqrt{2}$ m

(D) $100\sqrt{3}$ m (E) 200 m



Solução. Observando a figura que ilustra a situação, temos:

i) O ângulo PNO é externo ao ângulo MNP no triângulo. Logo, ele possui como medida a soma das medidas dos outros ângulos. Dessa forma o ângulo MPN mede 30°.

ii) Pela Lei dos Senos: $\frac{d}{sen45°}=\frac{100}{sen30°}=>d=\frac{100.\left(\sqrt{2}/_2\right)}{1/_2}=100\sqrt{2}\,m.$

QUESTÃO 3) O conhecimento algébrico contribui, dentre outras coisas, para a simplificação de expressões algébricas. Dessa forma, para x = 21 e y = 20, o valor da expressão $\frac{x^3-y^3}{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3}$ é igual a:

(A) $-\frac{1261}{32440}$ (B) $-\frac{1}{1261}$ (C) $\frac{41}{32440}$ **(D)** $\frac{1}{41}$ (E) $\frac{41}{1261}$

Solução. Utilizando os produtos notáveis e a fatoração, temos:

i) $x^3 - y^3 = (x-y).(x^2+xy+y^2) = (x-y).[x^2+xy+xy+y^2-xy] = (x-y).[(x^2+2xy+y^2-xy] = (x-y).[(x+y)^2-xy]$.

ii) $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Então, $x^3+2x^2y+x^2y+2xy^2+xy^2-x^2y-xy^2 = (x+y)^3 - xy.(x+y)$.

iii) Substituindo temos: $\frac{x^3-y^3}{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3} = \frac{(x-y).[(x+y)^2-xy]}{(x+y)^3-xy.(x+y)} = \frac{(21-20).[(21+20)^2-(21).(20)]}{(21+20)^3-(21).(20).(21+20)} =$

$= \frac{(1).[(41)^2-(21).(20)]}{(41)^3-(21).(20).(41)} = \frac{41^2-(41).(10)}{(41)^3-(41)^2.(10)} = \frac{41(41-10)}{(41)^2.(41-10)} = \frac{41}{41^2} = \frac{1}{41}$.

QUESTÃO 4) Um comerciante adquiriu um fogão, ao custo de R$ 840,00, para revender em sua loja. Ele quer vender o fogão por um preço de modo que possa oferecer 20% de desconto ao cliente, sobre o valor anunciado na loja, e, ainda assim, obter um lucro de 20% sobre o preço de custo. Então o valor anunciado na loja deverá ser:

(A) R$ 880,00 (B) R$ 1.008,40 (C) R$ 1.176,00 (D) R$1.209,60 **(E)** R$ 1.260,00

Solução. Considere o preço de venda como V. O lucro L é dado pela diferença ente o preço de venda e o preço de custo: L = V – C. No caso o comerciante quer L = 20%.C (20% sobre os 840 reais) e que o preço anunciado seja de 0,8V (desconto de 20% sobre o preço de venda). Temos:

0,2.(840) = 0,8V – 840 => 168 = 0,8V – 840 => 0,8V = 168 + 840 => V = $\frac{1008}{0,8}$ = 1260. O preço anunciado na loja.

Verificando: O comerciante vai anunciar o preço de R$1,260,00. Mas irá vender ao cliente com 20% de desconto. Isto é, o cliente pagará (80% de 1260) = R$1.008,00.
O comerciante comprou por R$840,00 e vendeu por R$1.008,00. Lucrou (1008 – 840) = R$168,00. Este valor é 20% do R$840,00. Dessa forma ele cumpriu os objetivos estabelecidos.

QUESTÃO 5) Sendo <u>a</u> e <u>b</u> algarismos distintos e não-nulos, considere as dízimas periódicas:

$D_1 = 0,aaa...$
$D_2 = 0,ababab...$
$D_3 = 0,0a0a0a...$

O resultado da expressão $\frac{D_1-D_2}{D_3}$ é igual a um número:

(A) racional não inteiro. (B) inteiro maior que 99. (C) inteiro menor que 11.

(D) racional negativo. (E) irracional. **(ANULADA)**

Solução. Observando as dízimas, temos:

i) D_1: $\begin{cases} x = 0,aaaa\ldots \\ 10x = a,aaaa\ldots \end{cases} \Rightarrow 10x - x = a \Rightarrow 9x = a \Rightarrow x = \frac{a}{9}$;

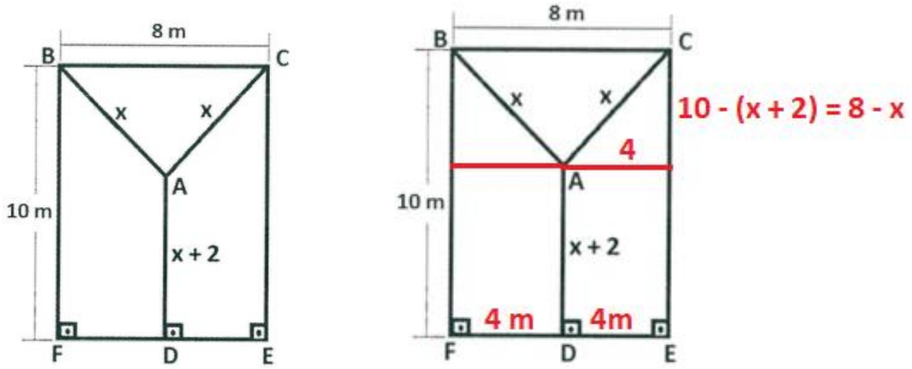
ii) D_2: $\begin{cases} y = 0,ababab\ldots \\ 100y = ab,ababab\ldots \end{cases} \Rightarrow 100y - y = ab \Rightarrow 99y = ab \Rightarrow y = \frac{ab}{99}$;

ii) D_3: $\begin{cases} z = 0,0a0a0a\ldots \\ 100z = 0a,0a0a0a\ldots \end{cases} \Rightarrow 100z - z = a \Rightarrow 99z = a \Rightarrow z = \frac{a}{99}$;

Desta forma, $\frac{D_1-D_2}{D_3} = \frac{\frac{a}{9}-\frac{ab}{99}}{\frac{a}{99}} = \frac{\frac{a}{9}-\frac{10a+b}{99}}{\frac{a}{99}} = \frac{\frac{11a-10a-b}{99}}{\frac{a}{99}} = \frac{a-b}{99} \times \frac{99}{a} = \frac{a-b}{a}$.

OBS: ANULADA, pois há mais de uma opção.
Exemplo 1: a = 2 e b = 3: $\frac{D_1-D_2}{D_3} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$. **(D);** **Exemplo 2: a = 3 e b = 2:** $\frac{D_1-D_2}{D_3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$. **(A)**

QUESTÃO 6) O telhado da cantina no CMRJ, com formato retangular, será reformado. A figura abaixo mostra o desenho de sua vista superior. As vigas de madeira do telhado, representadas na figura pelos segmentos AB, AC e AD, serão substituídas.



O comprimento, em metros, da maior viga que será substituída é igual a:

(A) 4,0 (B) 4,5 (C) 5,0 (D) 6,5 **(E)** 7,0

Solução. Observando o triângulo retângulo de medidas x, 4 e (8 – x) e aplicando a relação de Pitágoras, temos:
i) $x^2 = 4^2 + (8 - x)^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 64 - 16x + x^2 \Rightarrow 16x = 80 \Rightarrow x = 5$.
ii) AB = 5 m, AC = 5 m e AD = (5 + 2) = 7 m (a maior).

QUESTÃO 7) A média aritmética das massas de 30 pessoas é de 100 kg. Após seis meses de dieta e realização de atividades físicas, constatou-se que as mulheres emagreceram 20 kg cada uma e os homens, 10 kg cada um. Dessa forma, a média aritmética das massas das 30 pessoas passou a ser de 86 kg. Com base nessas informações, o número de mulheres no grupo é um número entre:

(A) 4 e 8. **(B)** 9 e 13. (C) 14 e 18. (D) 19 e 23. (E) 24 e 28.

Solução. Considerando M o número de mulheres e H o número de homens, temos que H = 30 – M. Considere ainda S(m) a soma das massas das mulheres e S(h) a soma das massas dos homens. Temos:

i) Inicialmente a média era: $\frac{S(m)+S(h)}{30} = 100 \Rightarrow S(m) + S(h) = 3000\ kg.$

ii) Se há M mulheres e cada uma emagreceu 20 kg, então a nova soma das massas das mulheres será S(m) – 20.M e se cada homem emagreceu 10 kg, a nova soma das massas dos homens será S(h) – 10.H = S(h) – 10.(30 – M).

iii) A nova média é: $\frac{S(m) - 20M + S(h) - 300 + 10\,M}{30} = 86 \Rightarrow S(m) + S(h) - 10M - 300 = 2580 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3000 - 10M - 300 = 2580 \Rightarrow 10M = 2700 - 2580 \Rightarrow 10M = 120 \Rightarrow M = 10$. Logo, há 10 mulheres.

QUESTÃO 8) Problemas, em diversas áreas de conhecimento, podem ser modelados por meio de equações e inequações. Sobre a resolução de equações e inequações, foram feitas as seguintes afirmativas:

I - O conjunto solução da equação irracional $x + \sqrt{x+5} = 7$ possui dois elementos. **(F)**

II - As inequações $(x^2 + 3x - 7).(3x - 5)(x^2 - 2x + 3) < 0$ e $(x^2 + 3x - 7)(3x - 5) < 0$ possuem o mesmo conjunto solução. **(V)**

III - A soma dos inversos das raízes da equação $x^2 - x + 2 = 0$ é igual a $\frac{1}{2}$. **(V)**

É carreto afirmar que:

(A) as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

(B) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

(C) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

(D) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

(E) apenas a afirmativa II é verdadeira.

Solução. Analisando as afirmações, temos:

I. $\sqrt{x+5} = 7 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (7-x)^2 \Rightarrow x + 5 = 49 - 14x + x^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4).(x - 11) = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 11$.

i) Se x = 4, $\sqrt{4+5} = 7 - 4 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \rightarrow ok;$ **ii) Se x = 11,** $\sqrt{11+5} = 7 - 11 \Rightarrow \sqrt{16} = -4 \rightarrow falso;$

II. Observe que o discriminante de (x^2 – 2x +3) é Δ = (– 2)^2 – 4.(1).(3) = 4 – 12 = – 12 < 0. Como o coeficiente de x^2 é maior que zero, os valores da função f(x) = x^2 – 2x +3 é sempre positivo. Logo, não altera o sinal do produto da inequação (x^2 + 3x – 7).(3x – 5)(x^2 – 2x +3) < O que pode ser representada como (+).(3x – 5)(x^2 – 2x +3) < O. Logo as inequações possuem o mesmo conjunto solução. (VERDADEIRO)

OBS: Resolvendo as equações e encontrando as raízes e montando os quadros das inequações, temos:

i) $x^2 + 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4.(1).(-7)}}{2(1)} = \frac{-3\pm\sqrt{37}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3-\sqrt{37}}{2} \cong -4,5 \\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{37}}{2} \cong 1,5 \end{cases}$;

Os valores entre as raízes são negativos e fora das raízes são positivos.

ii) 3x – 5 = 0 => x = $\frac{5}{3} \cong$ 1,6. Os valores maiores que 5/3 são positivos e menores que 5/3 são negativos.

iii) x^2 – 2x + 3 = 0 => Δ = (– 2)^2 – 4.(1)(3) = 4 – 12 = – 8 < 0. Logo, não possui raízes reais. Como o coeficiente de x^2 é positivo todos os valores de x irão dar resultado positivo. Logo, não interfere no sinal da primeira inequação. Logo, os conjuntos soluções são os mesmos.

	-4,5	1,5	1,6	
$x^2 + 3x - 7$	+	-	+	+
$3x - 5$	-	-	-	+
$x^2 - 2x + 3$	+	+	+	+
Solução	-	+	-	+

	-4,5	1,5	1,6	
$x^2 + 3x - 7$	+	-	+	+
$3x - 5$	-	-	-	+
Solução	-	+	-	+

III. Considerando r e s as raízes da equação do 2° grau, temos que a soma dos inversos é representada por:

$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{r+s}{r.s}$. **Na equação x^2 – x + 2 = 0, a soma das raízes é dada por: S =** $-\frac{(-1)}{1} = 1$ **e o produto por: P =** $\frac{2}{1} = 2$.

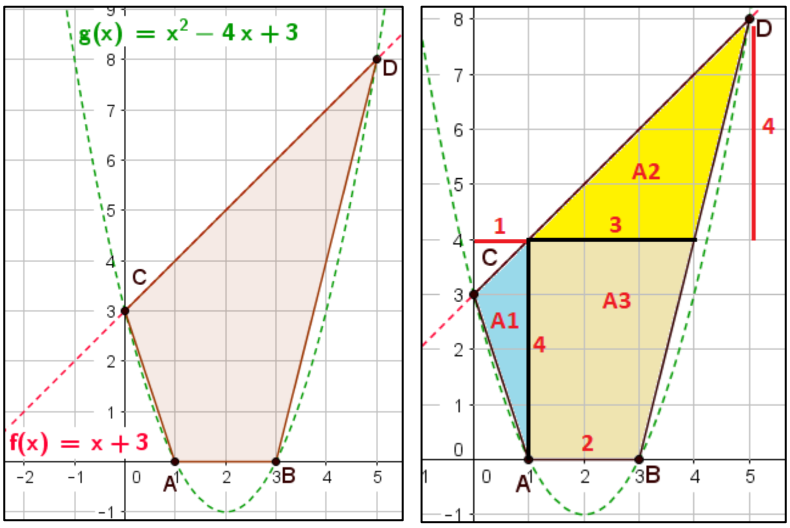
Logo a soma dos inversos vale: $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{r+s}{r.s} = \frac{1}{2}$. **(VERDADEIRO)**

QUESTÃO 9) Considere as funções reais de variáveis reais f(x) = x + 3 e g(x) = x^2 — 4x + 3. O gráfico de g corta o eixo das abscissas nos pontos A e B. Os gráficos de f e g se intersectam nos pontos C e D. A área do quadrilátero de vértices A, B, C e D é igual a:

(A) 13,0 **(B)** 18,0 (C) 21,5 (D) 26,0 (E) 27,5

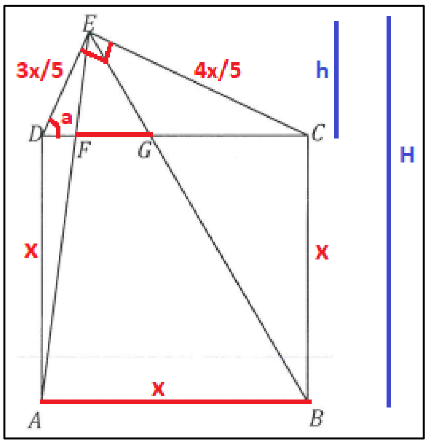
Solução. A função f(x) = x + 3, é a reta que corta o eixo das abscissas no ponto x = – 3. A função g(x) representa a parábola cujas interseções com o eixo das abscissas é (x – 1).(x – 3) = 0, x = 1 e x = 3. Logo, A = (1,0) e B = (3, 0). As interseções dos gráficos das funções f e g são encontradas igualando as expressões:

x^2 – 4x + 3 = x + 3 => x^2 – 5x = 0 => x.(x – 5) = 0 => x = 0 ou x = 5. Logo, C = (0,5) e D = (5, 8).



A área pedida será a soma: A1 + A2 + A3 = $\frac{(4).(1)}{2} + \frac{(3).(4)}{2} + \frac{(3+2).4}{2} = \frac{4+12+20}{2} = \frac{36}{2} = 18,0.$

QUESTÃO 10) A figura a seguir é composta por um quadrado ABCD e um triângulo CDE, retângulo em E e externo ao quadrado. Os segmentos EA e EB intersectam CD nos pontos F e G, respectivamente.



Se a medida do segmento DE corresponde a $\frac{3}{5}$ da medida de CD, a razão entre FG e o lado do quadrado é igual a:

(A) $\frac{12}{37}$ (B) $\frac{12}{25}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{25}{37}$ (E) $\frac{4}{5}$

Solução. No triângulo retângulo, considerando o ângulo <u>a</u>, temos que $cos a = \frac{3x/5}{x} = \frac{3}{5}$. Logo, pela relação fundamental $sen^2 a + cos^2 a = 1$, sen(a) = $\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$. Então o cateto EC = 4x/5.

Utilizando a relação que iguala o produto dos catetos com o produto da hipotenusa pela altura relativa a ela, temos: $\left(\frac{3x}{5}\right).\left(\frac{4x}{5}\right) = h.x \Rightarrow h = \frac{12x}{25}$.

Os triângulos EFG e EAB são semelhantes. Estabelecendo a razão entre os lados FG e AB = CD com as alturas h e H, temos: $\frac{FG}{AB} = \frac{FG}{CD} = \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{FG}{CD} = \frac{12x/25}{x+12x/25} = \frac{12x/25}{37x/25} = \frac{12x}{25}.\frac{25}{37x} = \frac{12}{37}$.

QUESTÃO 11) O Prof. Pinheiro, do CMRJ, resolveu desafiar seus três melhores alunos do 9° ano, Huguinho, Zezinho e Luizinho, com um problema para cada um. Depois de resolvê-los, os alunos entregaram suas respostas.

Huguinho Resposta: O valor de $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é igual a $1+\sqrt{3}$.

Zezinho Resposta: O quadrado da expressão $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é igual a um número inteiro.

Luizinho Resposta: A soma dos algarismos do número $10^{2021}-10^{2019}$ é um múltiplo de 3.

O Prof. Pinheiro concluiu que:

(A) todos os três alunos acertaram. (B) apenas um aluno acertou. (C) apenas Huguinho e Zezinho acertaram.

(D) apenas Huguinho e Luizinho acertaram. (E) apenas Zezinho e Luizinho acertaram.

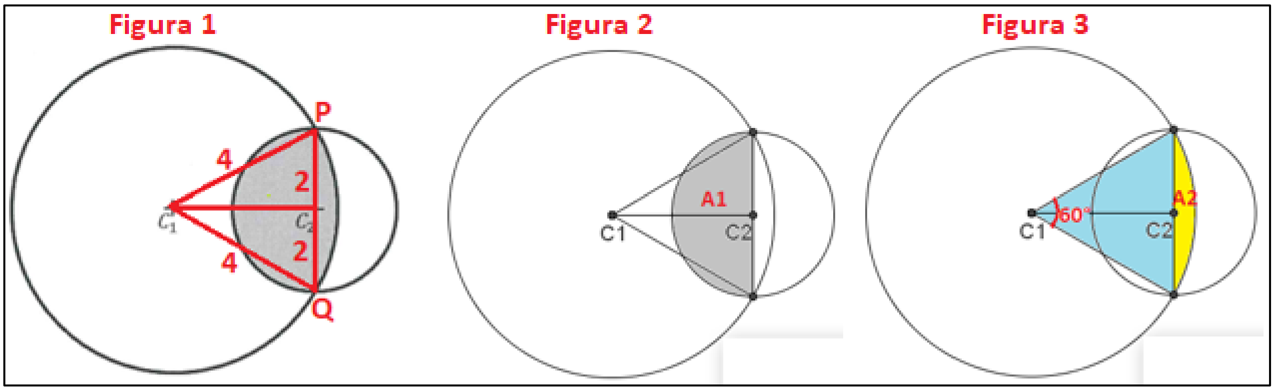
Solução. Analisando as respostas temos:

Huguinho: $\left(1+\sqrt{3}\right)^3 = 1^3 + 3.(1)^2.\left(\sqrt{3}\right) + 3.(1).\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$. (OK)

Zezinho: $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2} - 2.\sqrt{9-8} + 3 - 2\sqrt{2} = 3 - 2 = 1$. (OK)

Luisinho: $10^{2021} - 10^{2019} = 10^2.10^{2019} - 10^{2019} = 10^{2019}.(10^2 - 1) = 99.(10^{2019})$.
Um dos fatores é 99 que é múltiplo de 3. (OK).

QUESTÃO 12) Os centros C_1 e C_2 de dois círculos, cujos raios medem 4 cm e 2 cm, respectivamente, distam $2\sqrt{3}$ cm, como pode ser observado na figura abaixo.



A área da região hachurada na figura, em centímetros quadrados, é igual a:

(A) 20π (B) $4\sqrt{3}$ (C) $\frac{20\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$ **(E)** $\frac{14\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Solução. O triângulo C_1PQ é equilátero de lado 4 (Figura 1). Repare que a distância C_1C_2 é a altura, pois vale a metade do lado multiplicada pela raiz de 3. Desta forma a área hachurada será a soma da área da semicircunferência de diâmetro PQ (Figura 2) com a área do segmento circular PQ, amarelo (Figura 3).

i) Área da semicircunferência: $\frac{\pi.(2)^2}{2} = 2\pi\ cm^2$;

ii) Área do Setor circular (azul + amarela) de 60°: $\frac{\pi.(4)^2}{6} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$ cm²;

iii) Área do triângulo equilátero (azul): $\frac{(4)^2.\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm²;

iv) Área do segmento circular (amarela) = Área (setor) – Área (triângulo) = $\left(\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right)$ cm²;

v) Área hachurada: Área da semicircunferência + Área do segmento circular = $2\pi + \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{14\pi}{3} - 4\sqrt{3}$.