COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2019/2020
PROVA DE MATEMÁTICA
22 DE SETEMBRO DE 2019

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. Criptografia é a prática de codificar e decodificar dados. Quando os dados são criptografados, é aplicado um algoritmo para codificá-los de modo que eles não tenham mais o formato original e, portanto, não possam ser lidos. Os dados só podem ser decodificados no formato original com o uso de uma chave de decriptografia específica.

Disponível em:<<https://www.kaspersky.com.br/resource-center/definitions/encryption>>. Acesso em 05/08/2019.

Um código simples de criptografia consiste em calcular a raiz quadrada dos algarismos formadores de um número e dispor os 2 primeiros algarismos das raízes de forma ordenada e sequencial. Por exemplo:

$$444991 = 202020303010, \text{ pois: } \begin{cases} \sqrt{4} = 2{,}0 \\ \sqrt{9} = 3{,}0 \\ \sqrt{1} = 1{,}0 \end{cases}$$

Abaixo, são descritas cinco senhas criptografadas. Assinale a única cuja construção está de acordo com a regra apresentada no texto acima.

(A) $345672 = 172021242710$ (B) $125677 = 101424232626$ **(C)** $456899 = 202224283030$

(D) $876901 = 302624300010$ (E) $149087 = 102030002827$

Solução. Analisando cada item e a regra, observando a tabela ao lado, temos:

Número	Raiz (2 casas)
1	1,0
2	1,4
3	1,7
4	2,0
5	2,2
6	2,4
7	2,6
8	2,8
9	3,0

(A) Falsa. Há falha, por exemplo, na raiz de 2 que é aproximadamente 1,4.

$345672 = 172021242710.$

(B) Falsa. Há falha, por exemplo, na raiz de 5 que é aproximadamente 2,2.

$125677 = 101424232626.$

(C) Verdadeira. Valores de acordo com a tabela.

$456899 = 202224283030.$

(D) Falsa. Há falha, por exemplo, na raiz de 8 que é aproximadamente 2,8.

$876901 = 302624300010.$

(E) Falsa. Há falha na raiz de 7 que é aproximadamente 2,6.

$149087 = 102030002827.$

Questão 2. O consumo de energia de uma residência, em janeiro de certo ano, está representado neste gráfico:

Em fevereiro desse mesmo ano, houve uma redução no consumo de energia em 18%, 16% e 7%, referente ao uso de chuveiro elétrico, de ferro elétrico e de condicionador de ar, respectivamente, não havendo alteração no consumo dos demais equipamentos.
No mês de fevereiro, em relação a janeiro, a economia foi de

(A) 11,57% (B) 14,46% (C) 17,53% (D) 31,50% (E) 41,00%

Solução. Utilizando a redução percentual nos casos mencionados, temos:

i) O consumo do chuveiro elétrico, em fevereiro, passou a ser 82% dos 33%. Logo, (0,82).(0,33) = 0,2706 = 27,06%.

ii) O consumo do ferro elétrico, em fevereiro, passou a ser 84% dos 26%. Logo, (0,84).(0,26) = 0,2184 = 21,84%.

iii) O consumo do condicionador de ar, em fevereiro, passou a ser 93% dos 21%.

Logo, (0,93).(0,21) = 0,1953 = 19,53%.

iv) A economia em fevereiro foi: (33% + 26% + 21%) – (27,06% + 21,84% + 19,53%) = 80% - 68,43% = 11,57%.

Questão 3. A expressão numérica $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, equivale a:

(A) $\sqrt{6}+2\sqrt{3}+1$ (B) $\sqrt{6}+2\sqrt{2}+1$ (C) $\sqrt{6}+5$ (D) $\sqrt{6}+1$ (E) $\sqrt{6}-1$

Solução. Racionalizando cada fração, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{6}-2}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=$$

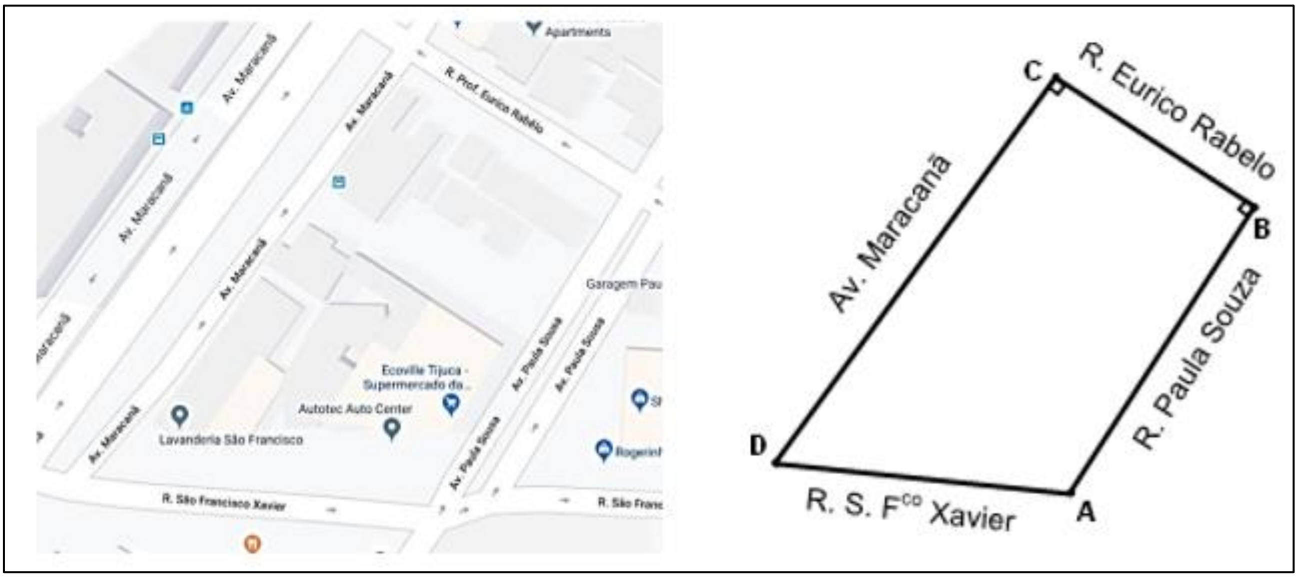
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5}+\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}+.\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2+2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=$$

$$=\sqrt{6}++2\sqrt{3}+1.$$

CONSIDERE A SEGUINTE DEFINIÇÃO PARA A RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 04.

"A área de um trapézio corresponde ao produto de sua altura pela semissoma de suas bases."

Questão 4. Um quarteirão próximo ao CMRJ é delimitado por trechos das ruas São Francisco Xavier, Paula Souza e Eurico Rabelo, assim como da avenida Maracanã, como se pode ver no mapa.



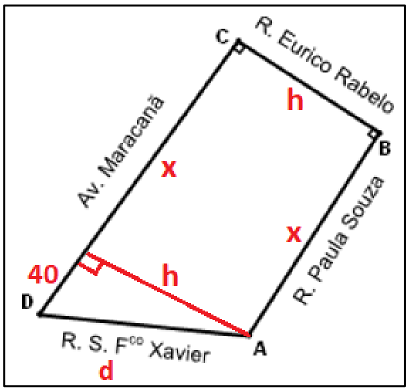
Esse quarteirão, cuja área mede 8.330 m^2, pode ser representado pelo trapézio retângulo ilustrado ao lado do mapa. O trecho da avenida Maracanã é o mais longo de todos e possui 40 m a mais que o trecho da rua Paula Souza.

Viviane se encontra na esquina das ruas Paula Souza e São Francisco Xavier (Ponto A) e precisa caminhar até a esquina da avenida Maracanã com a rua São Francisco Xavier (Ponto D) pelo caminho mais longo, sempre em linhas retas, de A até B, de B até C, e de C até D, nessa ordem, percorrendo, ao todo, 308 m.

O comprimento do trecho da rua São Francisco Xavier que compõe esse trapézio mede:

(A) $10\sqrt{55}\ m$ (B) $80\ m$ **(C)** $10\sqrt{65}\ m$ (D) $81\ m$ (E) $10\sqrt{67}\ m$

Solução. Observando o trapézio retângulo e as medidas indicadas, temos:



i) Área = $\frac{(40+x+x).h}{2} = \frac{(40+2x).h}{2}$ **=>** $\frac{(40+2x).h}{2} = 8\ 330$ **=>**

=> 20h + xh = 8 330.

ii) 2x + h + 40 = 308 => 2x + h = 268 => h = 268 – 2x.

iii) 20.(268 – 2x) + x.(268 – 2x) = 8330 => 5360 – 40x + 268x – $2x^2$ = 8330 =>

=> $2x^2$ – 228x + 2970 = 0 => x^2 – 114x + 1485 = 0 =>

=> x = $\frac{114\pm\sqrt{12996-4(1)(1485)}}{2} = \frac{114\pm\sqrt{12996-5940}}{2} = \frac{114\pm\sqrt{7056}}{2} =$

= $\frac{114\pm84}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{114-84}{2} = \frac{30}{2} = 15 \\ x = \frac{114+84}{2} = \frac{198}{2} = 99 \end{cases}.$

iv) Há dois valores para h: h_1 = 268 – 2.(99) = 70 e h_2 = 268 – 2.(15) = 238. Como é dito que o maior percurso é o CD (Av. Maracanã) com (70 + 40) = 110 m, o valor de h (R. Eurico Rabelo) = 238 m não pode ser considerado.

Logo, h = 70 m. Aplicando a relação de Pitágoras encontramos o trecho d, da rua São Francisco Xavier.

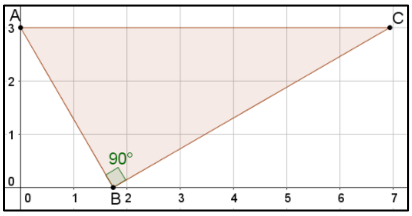
$$d = \sqrt{40^2 + 70^2} = \sqrt{1600 + 4900} = \sqrt{6500} = 10\sqrt{65}\ m.$$

Questão 5. Em um plano cartesiano, os pontos $A(0,3)$, $B(\sqrt{3},0)$ e $C(x,3)$ formam um triângulo retângulo em B. De acordo com essas informações, o valor de **x** é:

(A) 3 (B) $3\sqrt{3}$ (C) 4 **(D)** $4\sqrt{3}$ (E) 5

Solução. Como o ângulo reto está em B, então a distância AC é a hipotenusa e AB e BC são os catetos. Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos e a relação de Pitágoras, temos:

i) $\begin{cases} AB = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} \\ BC = \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + 9} \\ AC = \sqrt{(x-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{x^2+0} = x \end{cases}$



ii) $(AC)^2$ = $(BC)^2$ + $(AB)^2$ => $x^2 = \left(\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+9}\right)^2 + (\sqrt{12})^2 \Rightarrow x^2 = (x-\sqrt{3})^2 + 9 + 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + 21 \Rightarrow 2x\sqrt{3} = 24 \Rightarrow x\sqrt{3} = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Questão 6. Quando eu tinha o quadrado da sua idade, a sua idade era $\frac{1}{7}$ da minha idade atual. Daqui a d^2 anos eu terei 70 anos, e você, 64. O valor de **d** é:

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 **(E)** 7

Solução. Em qualquer época, a diferença das idades é constante. Logo a diferença entre as idades é de 6 anos.

i) Se hoje tenho T anos, você tem (T – 6) anos. Quando você tinha $\frac{1}{7}$T, eu tinha $\left(\frac{T}{7}\right)^2$ com a diferença constante de 6 anos. Resolvendo, temos:

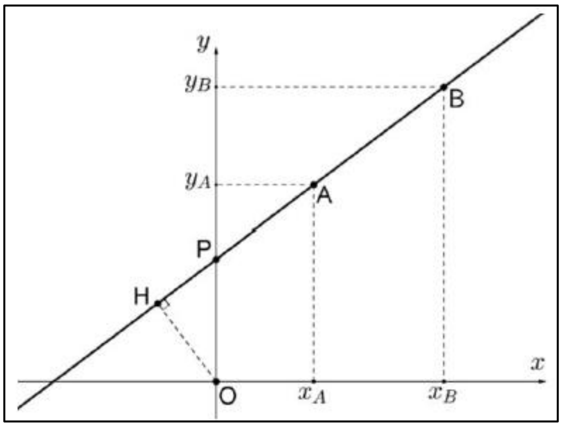
$\frac{T^2}{49} - \frac{T}{7} = 6 => T^2 - 7T - 294 = 0 => T = \frac{7 \pm \sqrt{49-4(1)(-294)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{7+35}{2} = 21.$

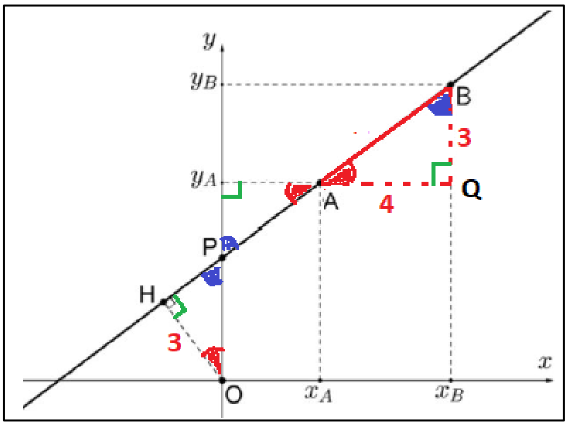
No caso, só consideramos a raiz positiva porque significa idade. Dessa forma minha idade T = 21.

Daqui a d^2 anos, temos: 21 + d^2 = 70 => d^2 = 70 – 21 => d^2 = 49 => d = 7. Observe a tabela com os valores.

	Passado	Hoje	Futuro
Eu	$\left(\frac{21}{7}\right)^2 = 3^2 = 9$	21	21 + $(7)^2$ = 21 + 49 = 70
Você	$\frac{21}{7} = 3$	21 – 6 = 15	15 + $(7)^2$ = 15 + 49 = 64

Questão 7. A imagem a seguir ilustra parte do gráfico da função real polinomial do primeiro grau *y*, de variável real *x*, além dos pontos H, P, A e B, pertencentes a esse gráfico, no plano cartesiano xOy.





A diferença entre as abscissas dos pontos A e B é 4, e a diferença entre as ordenadas desses mesmos pontos é 3. Se o segmento $\overline{OH}$ mede 3, então o gráfico intersecta o eixo $\overrightarrow{OY}$ no ponto P, cuja ordenada é:

(A) 3,00 (B) 3,25 **(C)** 3,75 (D) 4,00 (E) 5,00

Solução. Observando a figura e os triângulos retângulos semelhantes ABQ e OHP, temos:

i) AB é hipotenusa do triângulo AQB. Logo, AB = $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+15} = \sqrt{25} = 5.$

ii) $\frac{AB}{OP} = \frac{AQ}{OH} => \frac{5}{OP} = \frac{4}{3} => OP = \frac{15}{4} = 3,75$. **Logo, o ponto P = (0, 3,75).**

CONSIDERE O SEGUINTE TEXTO PARA A RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 08.

Uma forma de calcular a relação custo-benefício de um produto ou serviço é quantificar o benefício, por meio de uma avaliação qualitativa, e dividir o custo pelo resultado dessa avaliação, conforme sequência a seguir.

I. Relacione os indicadores do produto ou serviço que você utilizará na avaliação;

II. Classifique esses indicadores atribuindo pesos de 1 a 5, segundo sua importância;

III. Avalie cada indicador do produto ou serviço com notas de 1 a 5;

IV. Após as avaliações, para cada indicador, multiplique o peso pela nota, somando os resultados. Essa será a nota de avaliação;

V. Para calcular o custo-benefício do produto ou serviço, divida o custo pela nota da avaliação. O produto com o menor valor final será aquele com melhor custo-benefício.

Disponível em:<<https://dinheirama.com/escolhendo-produtos-atraves-da-relacao-custobeneficio>>. Acesso em 31/07/2019. Texto adaptado

Questão 8. Os cursos de pós-graduação mais procurados no Rio de Janeiro têm os seguintes custos:

Curso	Custo (R$)
A	3.200
B	3.650
C	3.650
D	3.750
E	4.100

Esses cursos vêm sendo avaliados regularmente pelo MEC, que utiliza os seguintes indicadores de qualidade:

- **IGC** – Índice Geral do Curso. O **IGC** é um indicador que visa a sintetizar em uma nota de 1 a 5 a qualidade de cada curso.
- **CI** – Conceio Infraestrutural. O **CI** é um indicador que visa a sintetizar em uma nota de 1 a 5 a infraestrutura do curso oferecido.

Quanto maior a nota, maior a qualidade do curso. Observe as notas atribuídas a esses cinco cursos na tabela ao lado.

Curso	IGC	CI
A	4	3
B	5	3
C	4	4
D	4	5
E	5	5

Sabendo que o **IGC** tem peso 3, e o **CI** tem peso 2, o curso que apresenta o melhor custo-benefício para os seus alunos é o:

(A) A (B) B (C) C (D) D **(E)** E

Solução. Calculando cada custo-benefício segundo as orientações, temos:

- Curso A: $\frac{3.200}{(3)\times(4)+(2)\times(3)} = \frac{3.200}{18} \cong 177{,}7.$ **- Curso B:** $\frac{3.650}{(3)\times(5)+(2)\times(3)} = \frac{3.650}{21} \cong 173{,}8.$

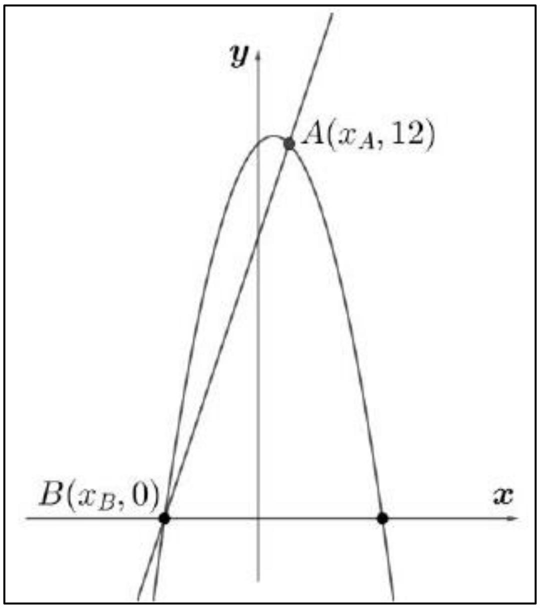
- Curso C: $\frac{3.650}{(3)\times(4)+(2)\times(4)} = \frac{3.650}{20} = 182{,}5.$ **- Curso D:** $\frac{3.750}{(3)\times(4)+(2)\times(5)} = \frac{3.750}{22} \cong 170{,}4.$

- Curso E: $\frac{4.100}{(3)\times(5)+(2)\times(5)} = \frac{4.100}{15+10} = \frac{4.100}{25} \cong$ **164,0. Este é o menor valor.**

Questão 9. No mesmo plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções reais de variáveis reais, *p* e *r*, definidas por $p(x) = -x^2 + x + 12$ e $r(x) = kx + m$. Os pontos $A(x_A, 12)$ e $B(x_B, 0)$ são interseções dessas funções.

Nessas condições, o valor de k – m é:

(A) -6 (B) -4 (C) 4 (D) 6 (E) 12



Solução. As interseções do gráfico de p(x) com o eixo x são:

$-x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4).(x + 3) = 0.$

Temos x = 4 e $x_B = -3$.

Como $(x_A, 12)$ **pertence ao gráfico de p(x), temos:**

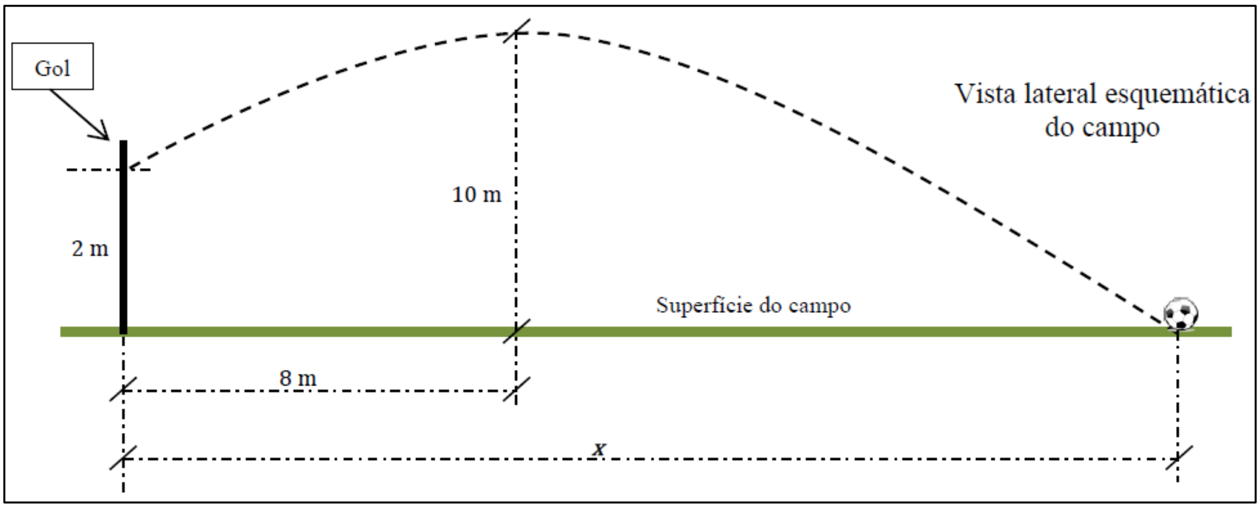
$-x^2 + x + 12 = 12 \Rightarrow x(-x + 1) = 0.$ **Logo,** $\begin{cases} x = 0 \\ x_A = 1 \end{cases}.$

O gráfico de r(x) representa a função f(x) = kx + m que passa pelos pontos $(-3, 0)$ ***e*** $(1, 12)$**:**

$\begin{cases} 0 = -3k + m \Rightarrow m = 3k \\ 12 = k + m \end{cases} \Rightarrow 12 = k + 3k \Rightarrow k = 3.$

Logo, m = 3k = 3.(3) = 9. Então k – m = 3 – 9 = – 6.

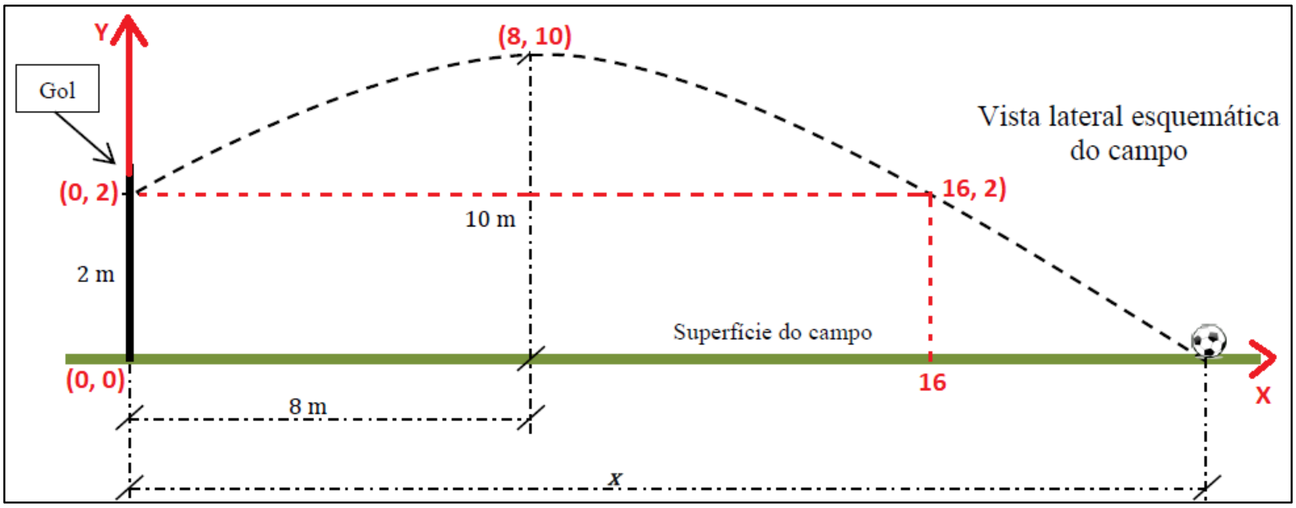
Questão 10. Ao treinar chutes a gol, o atleta de futebol Pedro, num chute impressionante, fez com que uma das bolas utilizadas no treino descrevesse uma trajetória em forma de arco de parábola, desde o ponto em que recebeu o chute, no gramado, até ultrapassar completamente a linha do gol, a uma altura de 2 m do chão.



A altura máxima atingida pela bola nesse trajeto foi de 10 m e, nesse instante, sua distância horizontal do gol era de 8 m. A distância horizontal ***x*** entre o gol e a bola no momento em que ela recebeu o chute era

(A) menor que 17 m. (B) igual a 17 m. (C) entre 17 e 18 m. (D) igual a 18 m. (E) maior que 18 m.

Solução. Posicionando a origem dos eixos cartesianos, identificamos os pontos (0,2) e (8, 10) como pertencentes à parábola. Pela simetria do gráfico, a outra abscissa que possui ordenada 2 será x = 16.



Utilizando as fórmulas do vértice e resolvendo a equação, observando que o coeficiente c = 2, temos:

i) $x_V = 8 => -\frac{b}{2a} = 8 => b = -16a;$

ii) $y_V = 10 => -\frac{\Delta}{4a} = 10 => b^2 - 4a(2) = -40a => b^2 = -40a + 8a => b^2 = -32a;$

iii) Substituindo o valor de b: $(-16a)^2 = -32a => 256a^2 = -32a => 256a = -32 => a = -\frac{1}{8}$**. Note que a ≠ 0, por isso foi possível o cancelamento de "a" na equação. Desta forma b =** $(-16).\left(-\frac{1}{8}\right) = 2.$

iv) f(x) = $-\frac{x^2}{8}$ **+ 2x + 2 => x =** $\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.(-1/8).(2)}}{2.(-1/8)} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{(-1/4)} \cong (-4).(-2 \pm 2,2) => \begin{cases} x_1 = (-4).(0,2) = -0,8 \\ x_2 = (-4).(-4,2) = 16,8 \end{cases}.$

Logo, a distância pedida é menor que 17 m.

OBS: Utilizando calculadora os valores mais aproximados seriam x_1 = – 0,94 e x_2 = 16,94.

TEXTO PARA AS QUESTÕES 11 E 12.

Diferença de salários entre homens e mulheres caiu em quatro anos

Entre 2013 e 2017, o salário médio das mulheres cresceu 4,4%, enquanto o dos homens teve alta de 0,9% no período. Com isso, elas passaram a receber, em média, 85,1% dos salários deles em 2017, o que significa uma redução da desigualdade salarial, já que em 2013 este número era de 82,3%. Os dados são do Relatório Anual de Informações Sociais (Rais) da Secretaria Especial de Previdência e Trabalho do Ministério da Economia.

Remuneração Média em 2017
(profissionais com Ensino Superior)

HOMENS	MULHERES
R$ 7678,53	R$ 4949,14 (58,9% dos profissionais no mercado de trabalho)

***Obs.:** No ano de 2017, entre as pessoas no mercado de trabalho, 29,7% das mulheres e 16,3% dos homens tinham ensino superior completo.*

Taxas da participação feminina em algumas áreas

Saúde	76,6%
Ensino	62,6%
Indústria Têxtil	61,8%
Administração Pública	58,5%

***Obs.:** destaca-se o crescimento de 1,5% de participação na construção civil.*

Taxa de participação das mulheres no mercado de trabalho, por região

Os maiores crescimentos nas taxas de participação feminina nos últimos cinco anos foram observados nos estados do Amapá (3,6%), Alagoas (3,2%) e Piauí (2,8%).

Disponível em:<https://www.gov.br/pt-br/noticias/trabalho-e-previdencia/2019/03/diferenca-de-salarios-entre-homens-e-mulheres-caiu-em-quatro-anos>. Acesso em 11/08/2019. Texto adaptado.

Questão 11. Com base no texto, é correto afirmar que:

(A) entre 2013 e 2017, o salário das mulheres cresceu 1,1% a cada ano.

Falso. O texto diz que o crescimento foi de 4,4% no período, não significando que foi dado o mesmo aumento em cada ano. Além do que um aumento seria sobre outro aumento e não uma multiplicação por 4.

(B) em 2017, as mulheres representavam 58,9% dos profissionais no mercado de trabalho.

Falso. O texto diz que em 2017, 58,9% representavam os profissionais com Ensino Superior.

(C) o salário médio das mulheres, no início de 2013, era de aproximadamente 4740,56 reais.

Falso. O valor (4740,56).(1,044) = 4949,14 corresponde ao salário médio das mulheres com Ensino Superior e não das mulheres em geral.

(D) entre os profissionais com Ensino Superior no ano de 2017, o salário dos homens era aproximadamente 55,1% maior que o das mulheres.

Verdadeiro. Temos que $\frac{S(H)}{S(M0} = \frac{7678,53}{4949,14} \cong$ 1,551 => S(H) = (1 + 55,1%)M. Logo homens ganhavam 55,1% a mais que as mulheres.

(E) 29,7% das mulheres empregadas no período entre 2013 e 2017 tinham curso superior completo.

Falso. Esse percentual foi informado para o ano de 2017 e não no período de 2013 a 2017.

Questão 12. Ainda segundo as informações do texto, conclui-se que:

(A) 76,6% das mulheres trabalham na área de saúde.

Falso. O texto informa que as mulheres na saúde correspondem a 76,6% do total de profissionais da área de saúde.

(B) na área de ensino, 62,6% dos profissionais são mulheres.

Verdadeiro. A tabela indica exatamente essa informação.

(C) 54,3% dos homens que trabalham são da região Sul.

Falso. O percentual de (100% - 45,7%) = 54,3% corresponde aos homens em relação ao total de trabalhadores.

(D) as mulheres são maioria no mercado de trabalho.

Falso. Observando as regiões, a taxa de participação feminina em todos foi abaixo de 50%. Logo em todas as regiões a maioria era de homens.

(E) a taxa de participação feminina nos últimos cinco anos cresceu 6% na região Nordeste.
Falso. A soma dos percentuais dos dois estados, não implica no aumento deste percentual na região toda. Seria necessário que todos os estados tivessem um aumento de 6%. Veja um exemplo na tabela abaixo.

Valor inicial	Valor com aumento de 3% em duas quantidades.		Valor com aumento de 3% em todas as quantidades.	
20	20		20,6	3,0%
30	30,9	3,0%	30,9	3,0%
30	30		30,9	3,0%
40	41,2	3,0%	41,2	3,0%
120	122,1		123,6	
	1,75%	aumento	3,00%	

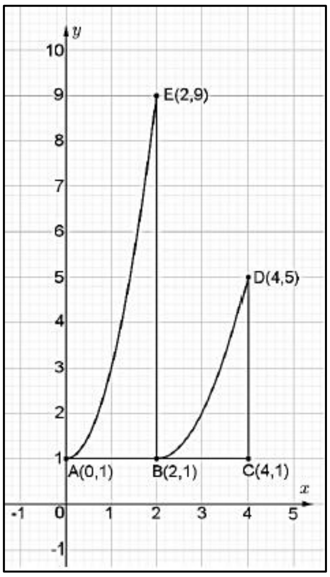
TEXTO PARA A QUESTÃO 13.

Logomarca é a imagem do negócio.

A idealização de uma boa logomarca e a sua utilização adequada colaboram para reforçar o nome da empresa e do produto, a fidelização e a conquista de novos clientes, bem como a criação de vínculos emocionais com esses últimos.

Disponível em:<http://www.sergiocabraldesign.com.br/site_portifolio_novo/marca_importancia.htm>. Acesso em 09/08/2019

Questão 13. Ao lançar seu produto no mercado, uma empresa idealizou sua logomarca utilizando curvas retilíneas e não retilíneas, conforme a figura.



A logomarca ao lado é formada pelos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$, e pelas curvas não retilíneas:

- BD, que é parte da parábola de equação $y = x^2 - 4x + 5$, e
- AE, que é parte de uma parábola cujo eixo de simetria é $\overrightarrow{Oy}$ e cuja equação é $y = ax^2 + bx + c$.
- Considerando que todas as curvas estão representadas no mesmo plano cartesiano, o valor de a + b + c é:

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 10

Solução. A parábola $y = x^2 - 4x + 5$ possui $\Delta = (-4)^2 - 4.(1).(5) = -4 < 0$.

Logo, não intersecta o eixo das abscissas. Seu vértice é: $\left(-\frac{(-4)}{2(1)}, -\frac{(-4)}{4.(1)}\right) = (2, 1)$.

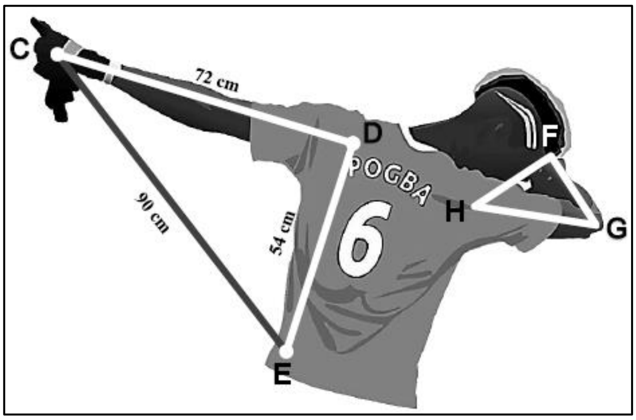
A parábola cuja equação é $y = ax^2 + bx + c$, possui c = 1, pois ela intersecta o eixo Oy em (0,1). Este ponto também é ser vértice. Logo, $-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Por outro lado o ponto (2, 9) pertence ao gráfico dessa parábola.

Logo, $9 = a.(2)^2 + 0.(2) + 1 \Rightarrow 4a = 9 - 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$.

Desta forma, a + b + c = 2 + 0 + 1 = 3.

Questão 14. Um professor de matemática francês aproveitou a comemoração dos gols de *Paul Pogba*, através de um gesto chamado «dab», para criar para seus alunos um problema relacionado como Teorema de Pitágoras.
A proposta era encontrar uma solução que ajudasse o jogador francês a realizar de forma perfeita o «dab».



Disponível em https:<//maisfutebol.iol.pt/incrivel/internacional/celebracao-de-pogba-da-origem-a-problema-matematico>. Acesso em 06/08/2019. Texto adaptado.

Observe a figura acima. O triângulo CDE, formado pelo braço esticado de *Pogba* (segmento $\overline{CD}$), não é semelhante ao triângulo FGH, formado pelo outro braço flexionado, cujas extremidades são H e F. Admitindo-se que o triângulo CDE não pode ser alterado em suas medidas, quais deveriam ser as medidas em centímetros do triângulo FGH para que os dois triângulos se tornassem semelhantes?

(A)30, 24 e 18 cm (B) 35, 28 e 21 cm (C) 40, 32 e 28 cm **(D)** 45, 36 e 27 cm (E) 48, 24 e 20 cm

Solução. O triângulo CDE é retângulo, reto em D, pois os segmentos são múltiplos do triângulo 3, 4 e 5. Repare que 54 = 18 x 3, 72 = 18 x 4 e 90 = 5 x 18. O segmento CD = 72 cm corresponde ao comprimento do braço do jogador. Isso implica que HF = HG + Gf = 72 cm por que também é o comprimento do braço.
Dessa forma queremos um triângulo retângulo, cuja soma da hipotenusa com um dos catetos seja 72. Isto porque nenhuma das opções apresenta soma dos catetos dando esse valor. Testando as opções, temos a tabela:

	Hipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Hip + Cat 1	Hip + Cat 2	(Cat 1)²	(Cat 2)²	(Cat 1)² + (Cat 2)²	(hipotenusa)²	
(A)	30	24	18	54	48	576	324	900	900	
(B)	35	28	21	63	56	784	441	1225	1225	
(C)	40	32	28	72	68	1024	784	1808	1600	
(D)	45	36	27	81	72	1296	729	2025	2025	ok
(E)	48	24	20	72	68	576	400	976	2304	

Questão 15. Sejam A = $\frac{(2.10^{-3}).2^{-\frac{1}{2}}}{10^{-\frac{1}{4}}}$ e B = $-\left(\sqrt[4]{\frac{(4.10^{-3})^2.0{,}000005}{2}}\right)$. Comparando essas expressões numéricas, conclui-se que:

(A) A = B **(B)** $\frac{A}{B} = -1$ (C) A + 2B = 0 (D) A.B = – 1 (E) A + B > 0

Solução. Calculando cada expressão, temos:

i) $A = \frac{(2.10^{-3}).2^{-\frac{1}{2}}}{10^{-\frac{1}{4}}} = \frac{2.2^{-\frac{1}{2}}.}{10^3.10^{-\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}.}{10^{\frac{11}{4}}}$;

ii) $B = -\left(\sqrt[4]{\frac{(4.10^{-3})^2.0{,}000005}{2}}\right) = -\left(\sqrt[4]{\frac{2^4.10^{-6}.5.10^{-6}}{2}}\right) = -\left(\sqrt[4]{2^3.10^{-12}.5}\right) =$

$= -\left(\sqrt[4]{2^2.10.10^{-12}}\right) = -\left(\sqrt[4]{2^2.10^{-11}}\right) = -\left(\frac{2^2}{10^{11}}\right)^{\frac{1}{4}} = -\frac{(2^2)^{\frac{1}{4}}}{10^{\frac{11}{4}}} = -\frac{2^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{11}{4}}}$;

iii) Como B = – A, temos que: $\frac{A}{B} = -1$.

CONSIDERE A DEFINIÇÃO A SEGUIR PARA A RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES 16 e 17.

"A área de um retângulo pode ser calculada pelo produto da medida da sua largura pela medida do seu comprimento."

Questão 16. A diferença entre as medidas do comprimento ***c*** e da largura ***l*** de um retângulo, nessa ordem, é igual a 3m, e a área desse retângulo é menor que 78,75 m². Então, a quantidade de valores inteiros de ***c***, em metros, que satisfazem essas condições é

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 **(E)** 7

Solução. Expressando as informações, temos:

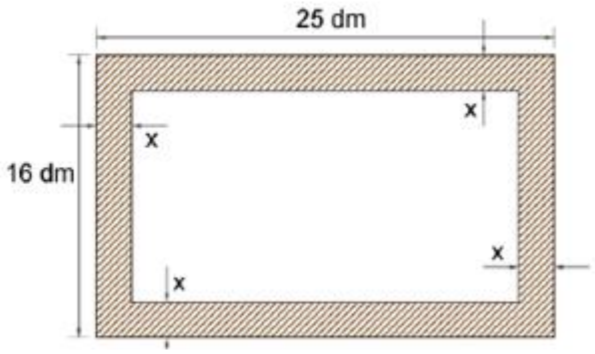
i) c – l = 3 e c.l < 78,75. Logo, l.(l + 3) < 78,75 => $l^2 + 3l - 78,75 < 0$ => l = $\frac{-3\pm\sqrt{9-4.(1).(78,75)}}{2}$ =>

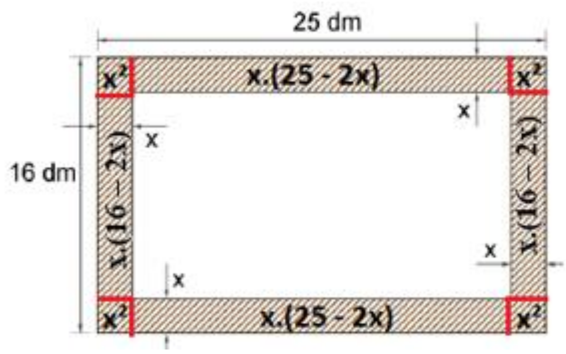
=> l = $\frac{-3\pm\sqrt{9+315}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{324}}{2} = \frac{-3\pm18}{2} => \begin{cases} l_1 = -10,5 \\ l_2 = 7,5 \end{cases}$. A inequação assume valores negativos pra – 10,5 < l < 7,5.

ii) Como as dimensões devem ser positivas, temos: l = 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 com c = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Isto é, 7 valores possíveis.

Questão 17. Com o objetivo de fabricar a moldura de um quadro, um marceneiro usa uma placa de madeira retangular com largura medindo 16 dm e comprimento medindo 25 dm. O marceneiro pretende recortar um retângulo da parte interna da placa, de modo que a largura **x** da moldura seja constante.

A figura ilustra como ficará essa moldura.





Como o marceneiro deseja que a área total da moldura tenha, no mínimo, 10% e, no máximo, 45% da área da placa original, então a medida x, em dm, pode ser igual a qualquer valor do intervalo [a, b].

O valor do produto a · b é:

(A) 1,00 (B) 1,10 (C) 115 (D) 1,20 **(E)** 1,25

Solução. A área da moldura pode ser calculada pela expressão A(x) = $4.x^2 + 2.x.(25 - 2x) + 2.x.(16 - 2x)$, conforme indicado na figura. A placa original possui área igual a (16 x 25) = 400. De acordo com o enunciado, temos:

i) A(x) = $4.x^2 + 2.x.(25 - 2x) + 2.x.(16 - 2x) = 4x^2 + 50x - 4x^2 + 32x - 4x^2 = - 4x^2 + 82x$.

ii) 10%.(400) ≤ $- 4x^2 + 82x$ ≤ 45%.(400) => 40 ≤ $- 4x^2 + 82x$ ≤ 180.

iii) $- 4x^2 + 82x \geq 40 => - 4x^2 + 82x - 40 \geq 0 => 2x^2 - 41x + 20 \leq 0$. Resolvendo a equação, temos:

$$x = \frac{41\pm\sqrt{1681-4.(2).(20)}}{4} = \frac{41\pm\sqrt{1681-160}}{4} = \frac{41\pm\sqrt{1521}}{4} = \frac{41\pm39}{4} => \begin{cases} x_1 = \frac{41-39}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{41+39}{4} = \frac{80}{4} = 20 \end{cases}.$$

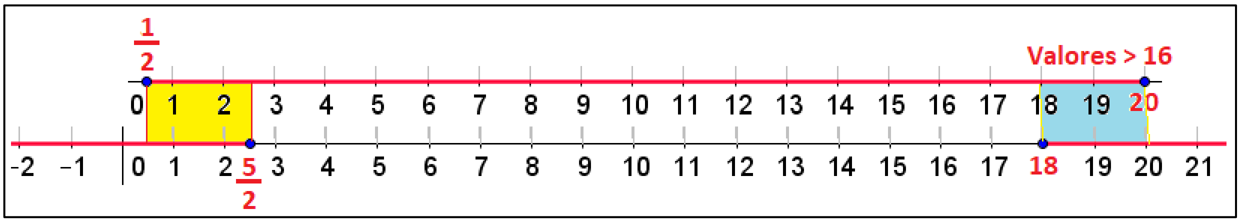
Os valores negativos estão entre as raízes. Logo $\frac{1}{2} \leq x \leq 20$.

iv) $- 4x^2 + 82x \leq 180 => 4x^2 - 82x - 180 \geq 0 => 2x^2 - 41x - 90 \geq 0$. Resolvendo, temos:

$$x = \frac{41\pm\sqrt{1681-4.(2).(90)}}{4} = \frac{41\pm\sqrt{1681-720}}{4} = \frac{41\pm\sqrt{961}}{4} = \frac{41\pm31}{4} => \begin{cases} x_1 = \frac{41-31}{4} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{41+31}{4} = \frac{72}{4} = 18 \end{cases}.$$

Os valores positivos estão fora do intervalo entre raízes. Logo, x ≤ $\frac{5}{2}$ ou x ≥ 18.

Encontrando a interseção dos intervalos, temos: $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \cup \ [18, 20]$.

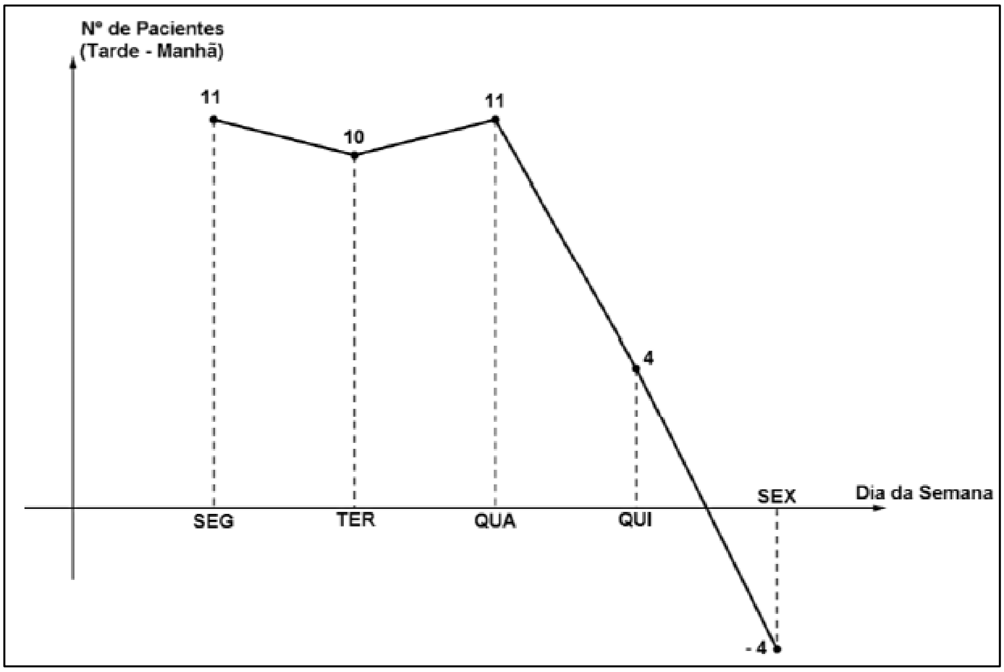


Os valores maiores que 16 não satisfazem. Logo, o intervalo será $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

O produto dos limites será: $\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$.

Questão 18. Um ambulatório médico atende pacientes de segunda a sexta-feira, pela manhã e à tarde. Na última semana, foram atendidos, ao todo, 80 pacientes.

O gráfico apresenta, dia a dia, a diferença entre as quantidades de pacientes atendidos de tarde e de manhã, nessa ordem, nessa semana.



Com base nessas informações, é correto concluir que, nessa semana, o total de pacientes atendidos no turno da tarde foi de:

(A) 44 (B) 52 **(C)** 56 (D) 58 (E) 60

Solução. Quando a diferença for positiva, o número de pacientes no turno da tarde é maior que o número de paciente pela manhã.

Desta forma, temos que foram atendidos (11 + 10 + 11 + 4 – 4) = 32 pacientes no turno tarde a mais que no turno da manhã. Considerando T o total de pacientes da semana no turno da tarde e M, o total da manhã, temos:

$$\begin{cases} T - M = 32 \\ T + M = 80 \end{cases} => 2T = 112 => T = \frac{112}{2} = 56.$$

Questão 19. Rodrigo escreveu a sequência dos $\boldsymbol{n}$ primeiros números inteiros positivos (1, 2, 3, ... , $\boldsymbol{n}$). Em seguida, retirou um desses números e calculou a média aritmética dos restantes, obtendo $\frac{92}{9}$.

Sendo assim, o número retirado é:

(A) 4 (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) 8

Solução. A média aritmética dos números (1, 2, 3, ..., n) é M = $\frac{1+2+3+\cdots n}{n} = \frac{\frac{(n+1).n}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$ **.**

Como a média após a retirada de um dos números foi $\frac{92}{9}$**, aproximadamente 10,2, poderíamos supor que a soma dos 9 números restantes era 92. Isto indicaria que a média anterior (da sequência de 1 a 10) era** $\frac{10+1}{2} = 5,5$**. Esse resultado é incompatível, pois o maior número possível retirado seria o 10 e a média restante dos 9 números restantes seria** $\frac{1+2+3+4..+9}{9} = \frac{9+1}{2} = 5 < 10,2$**.**

Com isso, o número de termos, após a retirada do número, deve ser um múltiplo de 9. O próximo seria 18.

A média então, após a retirada seria $\frac{184}{18}$**. Logo, a sequência original teria 19 termos e sua média aritmética seria M =** $\frac{(1+2+3+\cdots+19)}{19} = \frac{19+1}{2} = 10$ **=> (1 + 2 + ...+ 19) =190.**

Considerando X o número retirado, temos: $\frac{(1+2+3+\cdots 19)-X}{19-1} => \frac{190-X}{18} = \frac{184}{18} =>$ **X = 190 – 184 = 6.**

TEXTO PARA A QUESTÃO 20.

Há situações em que equações de grau superior a 2 podem ser resolvidas com o auxílio de uma técnica denominada “mudança de variável”, que nos permite diminuir o grau da equação, transformando-a em uma equação de 2° grau.

Um exemplo desse uso pode ser visto aqui:

Seja a equação $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ **(I)**
Admita que $y = x^2$ **(II)**
Substituindo **(II)** em **(I)**, obtemos $y^2 - 7y - 18 = 0$
Resolvendo a equação do 2° grau, temos $y_1 = 9$ e $y_2 = -2$
Atribua $x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3$ e $x_2 = -3$ e, ainda,
$x^2 = -2 \rightarrow$ neste caso, não há raízes reais.

Questão 20. A soma dos cubos das raízes reais da equação $(x^2 - 2x + 1)^2 = 5x^2 - 10x + 1$ é igual a

(A) 36 **(B)** 34 (C) 18 (D) –18 (E) – 34

Solução. Adicionando e subtraindo 5 unidades ao segundo membro da equação e utilizando a substituição sugerida, temos:

i) $(x^2 - 2x + 1)^2 = 5x^2 - 10x + 5 - 5 + 1 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1)^2 = 5(x^2 - 10x + 1) - 4$**;**

ii) Admitindo $y = x^2 - 2x + 1$**, temos:** $y^2 = 5y - 4 \Rightarrow y^2 - 5y - 4 = 0 \Rightarrow (y-4).(y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$**;**

iii) Se y = 1, temos: $x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x.(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$**;**

iv) Se y = 4, temos: $x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3).(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$**;**

v) A soma dos cubos das raízes é: $(0)^3 + (2)^3 + (-1)^3 + (3)^3 = 0 + 8 - 1 + 27 = 34$**.**