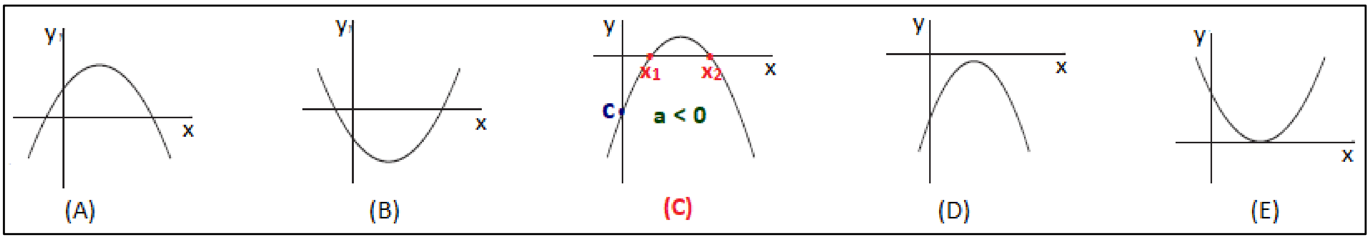
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho/1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2013/2014
PROVA DE MATEMÁTICA
06 DE OUTUBRO DE 2013

MATEMÁTICA - GABARITO
(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. Considere a função $t(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, $c < 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Dentre os gráficos abaixo, o que pode representar essa função é:



Solução. De acordo com as informações, temos:

i) a > 0: o gráfico tem concavidade para baixo;

ii) c < 0: a interseção do gráfico com o eixo y é negativa;

iii) Δ > 0: O gráfico intersecta o eixo x em dois pontos distintos.

Dessa forma o gráfico é o da letra C.

Questão 2. Em um recipiente contendo 5 decilitros de água, foram colocados 300 centigramas de açúcar, obtendo-se, assim, uma mistura homogênea. Quantos miligramas de açúcar existem em uma amostra de 1 cm^3 dessa mistua?

(A) 0,06 **(B)** 6 (C) 600 (D) 0,6 (E) 60

Solução. Representando todas as medidas em miligramas, temos:

i) 1 cm^3 = 1 mililitro = 0,01 decilitro; **ii) 300 centigramas = 3 000 miligramas;**

iii) Estabelecendo a proporção, temos: $\frac{3\,000\ mg}{5\ dl} = \frac{3\,000\ mg}{500\ cm^3} = \frac{30\ mg}{5\ cm^3}$ **= 6 mg/cm^3.**

Questão 3. Benjamin e seu irmão aniversariam na mesma data. Ele tem o triplo da idade que o irmão tinha quando ele tinha a idade que o irmão tem hoje. Podemos afirmar que:

(A) daqui a cinco anos a soma das idades será 60 anos.

(B) Benjamin é 10 anos mais velho que irmão.

(C) quando o irmão tiver a idade que Benjamin tem hoje, a soma das idades será múltipla de 7.

(D) quando a idade de um for o dobro da idade do outro, a soma das idades será 54 anos.

(E) daqui a cinco anos a diferença das idades será 10 anos.

Solução. Organizando as idades nos tempos e lembrando que a diferença entre as idades é sempre constante, temos:

	Idade antes	Idade hoje
Benjamin	y	3x
Irmão	x	y
Diferença	y - x	3x - y

Temos que y – x = 3x – y => 4x = 2y => 2x = y. Isto indica que a diferença entre as idades é sempre x. Analisando as afirmações, vem:

(A) Falsa. Não podemos afirmar. Se hoje o irmão tem 30 anos, Benjamim tem 3/2(30) = 45 anos. Daqui a 5 anos, suas idades serão, respectivamente, 35 e 50, cuja soma será 85. Esse caso só será verdadeiro se Benjamim tiver 30 anos e seu irmão 20 anos. Logo, um caso particular.

(B) Falsa. Também é verdadeiro somente em uma das possibilidades, mas não podemos afirmar.

(C) Verdadeira. A diferença entre as idades deles é (3x – 2x) = (2x – x) = x. Quando seu irmão tiver 3x anos, isto é, 2x + x, Benjamim terá 3x + x = 4x anos A soma das idades será: $3x + 4x = 7x$.

(D) Falsa. No caso de Benjamim ter 30 e seu irmão 20, a soma não é 54.

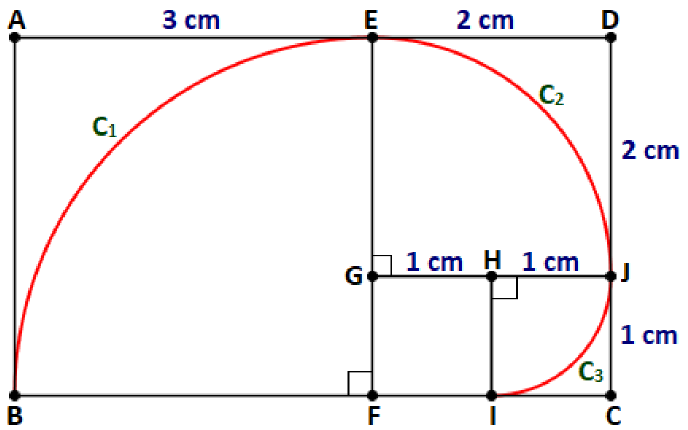
(E) Falsa. Também ocorre em um caso particular. Não é possível afirmar.

OBS: Veja nas tabelas que a única afirmação que podemos afirmar é a soma ser múltipla de 7, quando a idade do irmão for igual a de Benjamim, hoje.

	Antes	Hoje	Daqui a 5 anos	Irmão com idade de Benjamim (hoje)	
Benjamim	20	30	35	40	
Irmão	10	20	25	30	
Diferença	10	10	10	10	
Soma	30	50	60	70	(mult 7)

	Antes	Hoje	Daqui a 5 anos	Irmão com idade de Benjamim (hoje)	
Benjamim	40	60	65	80	
Irmão	20	40	45	60	
Diferença	20	20	20	20	
Soma	60	100	110	140	(mult 7)

Questão 4. Os quadriláteros ABFE, EGJD, HICJ e GFIH são quadrados, sendo HJ = 1 cm. Calcule o comprimento da espiral formada pelos arcos de circunferências que ligam os pontos B e E; E e J; e J e I.



(A) 3π/2 **(B)** 3π (C) 3π/4 (D) 2π/3 (E) 6π

Solução. O comprimento da espiral será a soma dos comprimentos C_1, C_2 e C_3 que representam 1/4 dos comprimentos das respectivas circunferências de raios 1 cm, 2cm e 3cm. Temos:

- C_1: $\frac{2\pi(1)}{4} = \frac{\pi}{2}$; - C_2: $\frac{2\pi(2)}{4} = \pi$; - C_3: $\frac{2\pi(3)}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

Comprimento da espiral: $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi+2\pi+3\pi}{2} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$.

Questão 5. Em uma turma, a média das alturas de seus 20 alunos é 1,5 m. Se Luiz, um dos alunos da turma, for retirado da contagem, a média aumenta em 2%. Por uma questão de adaptação, Antônio, que é um aluno desta escola, será transferido para a turma de Luiz, fazendo com que a média das 21 alturas diminua em 2%. Assim, a diferença entre as alturas de Luiz e Antônio é:

(A) 6 cm. (B) 5 cm. (C) 4 cm. (D) 3 cm. (E) 2 cm.

Solução. A média é o quociente da divisão entre a soma das alturas e o número de alunos. Temos:

i) Média inicial: $\frac{S(20)}{20} = 1,5 => S(20) = (20).(1,5) = 30\ m$;

ii) Média sem Luiz: 30 + 2%.(1,5) = 1,02.(1,5) = 1,53. Logo, $\frac{S(19)}{19} = 1,53 =>$ **S(19) = (19).(1,53) = 29,07 m;**

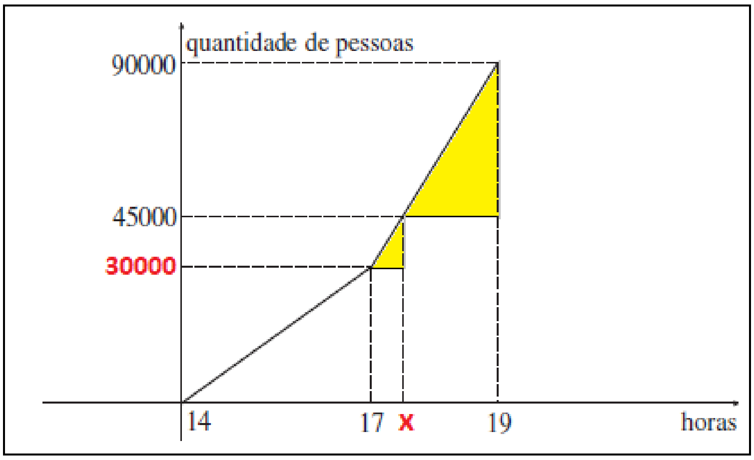
iii) Média com Antônio: 30 – 2%.(1,5) = 0,98.(1,5) = 1,47. Logo, $\frac{S(21)}{21} = 1,47 =>$ **S(21) = (21).(1,47) = 30,87 m;**

iv) Altura de Luiz: (30 – 29,07) = 0,93 m = 93 cm.

v) Altura de Antônio: (30,87 – 30) = 0,87 m = 87 cm.

A diferença entre a altura de Luiz e Antônio é (93 – 87) = 6 cm.

Questão 6. Em um domingo de futebol no novo estádio do Maracanã, 90 000 torcedores estavam presentes. Metade dos portões do estádio foi aberta às 14 horas e, durante três horas, entraram 10 000 torcedores por hora. A partir das 17 horas, a outra metade dos portões se abriu, permitindo que um número maior de pessoas entrasse. Observe o gráfico:



O número de torcedores presentes no Maracanã chegou a 45 000, às 17 horas e:

(A) 10 minutos. (B) 15 minutos. (C) 20 minutos. **(D)** 30 minutos. (E) 40 minutos.

Solução. Se durante 3 horas, a partir de 14h, entraram 10 000 torcedores por hora, então entraram até às 17h um total de (3 x 10 000) = 30 000 torcedores. Observando a semelhança nos triângulos do gráfico, temos:

Estabelecendo as razões, vem:

$\frac{45\,000-30\,000}{x-17} = \frac{90\,000-45\,000}{19-x} => \frac{15\,000}{x-17} = \frac{45\,000}{19-x} => \frac{1}{x-17} = \frac{3}{19-x}$ **=> 3x – 51 = 19 – x =>**

=> 4x = 70 => x = 17,5 h. Isto é, o número de torcedores chegou a 45 000 meia hora (30 minutos) após às 17h.

Questão 7. Sobre números racionais e irracionais, podemos afirmar que:

(A) entre os números reais 6 e 7 existe apenas um número irracional.

(B) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

(C) toda dízima periódica é um número irracional.

(D) o número grego π = 3,14159... é um número racional.

(E) número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números.

Solução. Analisando as afirmativas, temos:

(A) Falso. Entre dois racionais existem infinitos irracionais. Por exemplo, $6 < 6 + \frac{\sqrt{2}}{3} < 6 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 7$.

(B) Falso. Basta somarmos dois conjugados que eliminamos a parte irracional. Exemplo: $(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = 4$.

(C) Falso. A dízima periódica pode ser representada por uma fração geratriz. Logo, racional.

(D) Falso. O número $\pi = 3{,}14159...$ não possui uma representação na forma de fração. Logo, não tem período.

(E) Verdadeiro. Se o número puder ser obtido pela divisão, haveria uma representação fracionária.

Questão 8. Magda comprou um computador sofisticado e tem duas opções de pagamento: à vista, por R$ 4 520,00; ou financiado em três parcelas (uma entrada e mais duas mensalidades iguais), com juros de 10% ao mês sobre o saldo devedor, sendo o valor da entrada igual ao dobro de cada parcela. Qual é o valor da soma dos três pagamentos na forma financiada?

(A) R$ 5469,20 **(B)** R$ 4840,00 (C) R$4870,30 (D) R$ 4972,00 e) R$ 5040,00

Solução. Considere os valores das parcelas iguais a X e entrada 2X. A entrada é paga no ato da compra, a 1ª mensalidade um mês depois ($X = V_1 \times 1{,}1$) e a 2ª mensalidade, dois meses depois ($X = V_2 \times 1{,}1^2$). Se retirarmos esses juros e calcularmos a soma na mesma data da entrada, temos:

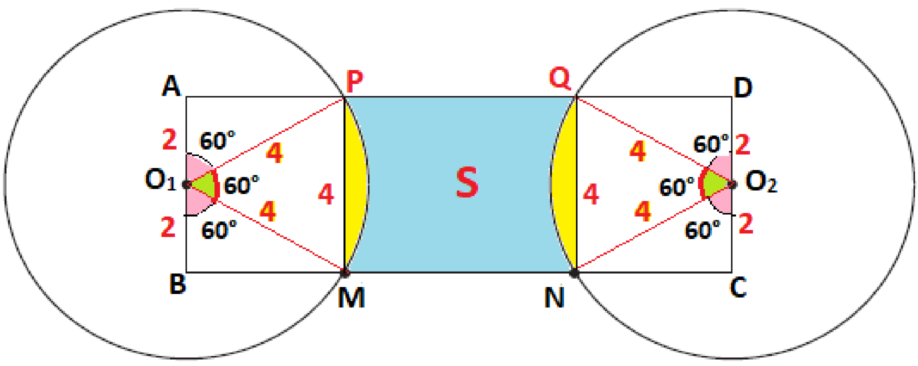
$$2X + \frac{X}{1{,}1} + \frac{X}{1{,}1^2} = 4\,520 \Rightarrow 2X + \frac{X}{1{,}1} + \frac{X}{1{,}21} = 4\,520 \Rightarrow 2{,}42X + 1{,}1X + X = 5469{,}2 \Rightarrow 4{,}52X = 5\,469{,}2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X = \frac{5469{,}2}{4{,}52} = 1\,210$. A soma dos 3 pagamentos será $(2X + X + X) = 4X = 4.(1\,210) =$ R$ 4 840,00.

OBS: Verificando. No ato da compra, Magda paga <u>R$ 2 420,20 de entrada</u>.

Fica devendo (4 520 – 2 420) = R$ 2 100,00. Um mês depois esse valor sofre um aumento de 10%. Então ela, na verdade, deve (2100 x 1,1) = R$ 2 310,00. Paga nessa 1ª mensalidade metade do que pagou de entrada, isto é, <u>R$ 1 210,00</u>. Fica devendo (2 310 – 1 210) = R$ 1 100,00. Um mês depois (2ª mensalidade) este valor sofre um aumento de 10%, passando então a valer (1 100 x 1,1) = <u>R$ 1 210,00</u>).

Questão 9. Na figura abaixo, os pontos O_1 e O_2 são centros de circunferências de raios 4 cm. ABCD é retângulo, onde AB = 4 cm. Se O_1 é ponto médio de $\overline{AB}$; O_2 é ponto médio de $\overline{DC}$; M e N são pontos de interseção das circunferências com o retângulo; BM = NC; e MN = $2\sqrt{3}$ cm, a área da região do retângulo entre os dois círculos vale:



(A) $16\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ cm². (B) $16\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ cm². (C) $8\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ cm².

(D) $8\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ cm². (E) $16\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ cm².

Solução. Ligando os pontos, respectivamente O_1 e O_2 a P e Q, formamos dois triângulos equiláteros (O_1PM e O_2QN), pois os triângulos retângulos APO_1, BMO_1, DQO_2 e CNO_2 são do tipo 30°, 60° e 90°. Dessa forma a área S pedida será a diferença entre a área do retângulo MNPQ e a soma das áreas dos segmentos circulares O_1PM e O_2QN.

i) Área do segmento = área do setor circular (60°) – área do triângulo equilátero: $\frac{\pi.(4)^2}{6} - \frac{(4)^2.\sqrt{3}}{4}$;

ii) Área do retângulo MNPQ = $(4).(2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$;

iii) Área S = $8\sqrt{3} - 2.\left(\frac{\pi.(4)^2}{6} - \frac{(4)^2.\sqrt{3}}{4}\right) = 8\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} + 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} = 16.\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ cm^2.

Questão 10. Márcia vai dividir, entre seus quatro filhos, uma determinada quantia em partes diretamente proporcionais às suas respectivas idades. Salomão tem um ano a mais que Lara, Raquel tem dois a mais que Salomão e Gabriel tem o dobro da idade de Lara mais um ano. Em um gráfico de setores, qual é o ângulo central que corresponde à quantia que receberá Salomão?

(A) 20° (B) 36° (C) 45° **(D)** 72° (E) 90°

Solução. Considerando X a idade do mais novo, isto é, Lara, temos as representações:

- Lara: X anos; - Salomão: (X + 1) anos; - Raquel: (X + 3) anos; - Gabriel: (2X + 1) anos.

A soma dessas idades resulta o equivalente a 360° e cada idade um setor proporcional a essa idade. Considerando a, b, c, d as partes da quantia, respectivamente, recebida por Lara, Salomão, Raquel e Gabriel, temos:

i) $\frac{a}{X} = \frac{b}{X+1} = \frac{c}{X+3} = \frac{d}{2X+1} = \frac{T}{5(X+1)}$. ii) $\frac{b}{X+1} = \frac{360°}{5(X+1)} => \frac{b}{1} = \frac{360°}{5}$ => b = 72°.

Questão 11. Um trem viaja de uma cidade a outra sempre com velocidade constante. Quando a viagem é feita com 16 km/h a mais na velocidade, o tempo gasto diminui em duas horas e meia, e quando é feita com 5 km/h a menos na velocidade, o tempo gasto aumenta em uma hora. Qual é a distância entre estas cidades?

(A) 1200 km (B) 1000 km (C) 800 km (D) 1400 km (E) 600 km

Solução. Considerando D a distância entre as cidades e t o tempo para ir de uma a outra com velocidade v, temos:

D = v x t; D = (v + 16) x (t – 2,5); D = (v – 5) x (t + 1);

A distância entre as cidades é sempre a mesma. Desenvolvendo as expressões, temos:

i) $\begin{cases} vt - 2,5v + 16t - 40 = D \\ vt + v - 5t - 5 = D \end{cases} => \begin{cases} -2,5v + 16t = 40 \\ v - 5t = 5 \rightarrow (\times 2,5) \end{cases} => \begin{cases} -2,5v + 16t = 40 \\ 2,5v - 12,5t = 12,5 \end{cases} =>$

=> 3,5t = 52,5 => t = $\frac{52,5}{3,5}$ => t = 15.

ii) v – 5.(15) = 5 => v = 75 + 5 = 80.

iii) Se v = 80 km/h e t = 15 h, então D = (80).(15) = 1200 km.

Questão 12. (Modificada) Na cantina do CMRJ, 3 hambúrgueres, 1 refrigerante e 1 doce custam R$17,90; e 1 hamburguer, 2 refrigerantes e 3 doces custam R$14,70. Se o hamburguer custa R$1,50 a mais que o refrigerante, calcule quanto pagará o aluno que comprar 3 refrigerantes e 5 doces.

(A) R$12,00. (B) R$13,00. (C) R$14,00. (D) R$15,00. **(E)** R$16,00.

Solução. Representando o número de hamburguer, refrigerante e doces, respectivamente, por h, r e d, temos:

i) 1h = 1r + 1,5

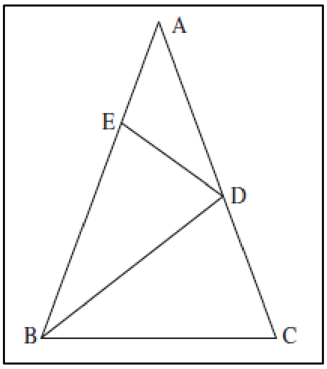
ii) $\begin{cases} 3h + 1r + 1d = 17,9 \\ 1h + 2r + 3d = 14,7 \end{cases} => \begin{cases} 3r + 4,5 + 1r + 1d = 17,9 \\ 1r + 1,5 + 2r + 3d = 14,7 \end{cases} => \begin{cases} 4r + 1d = 13,4 \\ 3r + 3d = 13,2 \end{cases} =>$

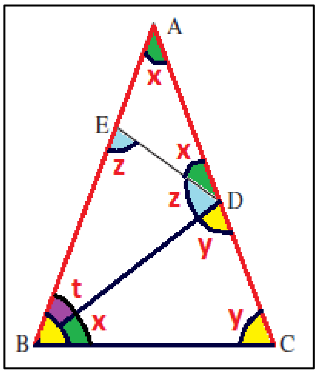
$=> \begin{cases} 4r + 1d = 13,4 \\ r + d = 4,4 \rightarrow \times (-1) \end{cases} => \begin{cases} 4r + 1d = 13,4 \\ -r - d = -4,4 \end{cases} =>$3r = 9 => r = R$3,00.

iii) 4.(3) + 1d = 13,4 => d = 13,4 – 12 => d = R$1,40.

iv) Logo, 3r + 5d = 3.(R$3,00) + 5.(R$1,40) = R$9,00 + R$7,00 = R$16,00.

Questão 13. Considerando as congruências, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BC} \cong \overline{BD} \cong \overline{BE}$ e $\overline{ED} \cong \overline{EA}$, a medida do ângulo $\widehat{ACB}$ em graus é:





(A) 64. (B) 50. (C) 75. (D) 52. **(E)** 72.

Solução. De acordo com as congruências e identificando os ângulos nos triângulos isósceles, temos:

i) O ângulo z no vértice E, interno de BED é externos de AED. Logo, z = 2x;

ii) No ponto D, temos a relação y + z + x = 180° => y + 2x + x = 180° => y + 3x = 180°;

iii) No triângulo BDC, temos: x + 2y = 180°;

iv) De (ii) e (iii), temos: $\begin{cases} y+3x=180° \\ 2y+x=180° \to \times(-3) \end{cases}$ => $\begin{cases} y+3x=180° \\ -6y-3x=-540° \end{cases}$ **=> – 5y = – 360° => y = 72°.**

Questão 14. Considere a equação $px^2 - 5x + q = 0$, $p > 0$, de raízes a e b, sendo $a > b$.

É dada também a equação $qx^2 - 5x + p = 0$, $q > 0$, cujas raízes são α e β com $\alpha > \beta$. Calculando o valor da expressão $\frac{a.\alpha+\beta}{\beta.b+\alpha}$ em função das variáveis a e b, encontraremos a forma fracionária:

(A) $\frac{a+b^2}{a^2+b}$. (B) $\frac{a-b^2}{a^2-b}$. **(C)** $\frac{a^2+b}{a+b^2}$. (D) $\frac{a^2-b}{a-b^2}$. (E) $\frac{a-b^2}{a^2+b^2}$.

Solução. Expressando as respectivas raízes, utilizando a fórmula de resolução, temos:

i) $px^2 - 5x + q = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-4pq}}{2p} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5+\sqrt{25-4pq}}{2p} \\ b = \frac{5-\sqrt{25-4pq}}{2p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+\sqrt{25-4pq} = 2ap \\ 5-\sqrt{25-4pq} = 2bp \end{cases}$.

ii) $qx^2 - 5x + p = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-4pq}}{2q} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5+\sqrt{25-4pq}}{2q} \\ \beta = \frac{5-\sqrt{25-4pq}}{2q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+\sqrt{25-4pq} = 2\alpha q \\ 5-\sqrt{25-4pq} = 2\beta q \end{cases}$.

iii) $2ap = 2\alpha q \Rightarrow \alpha = \frac{ap}{q}$ **e** $2bp = 2\beta q \Rightarrow \beta = \frac{bp}{q}$.

iv) $\frac{a.\alpha+\beta}{\beta.b+\alpha} = \frac{a.\left(\frac{ap}{q}\right)+\left(\frac{bp}{q}\right)}{\left(\frac{bp}{q}\right).b+\left(\frac{ap}{q}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right).(a^2+b)}{\left(\frac{p}{q}\right).(b^2+a)} = \frac{a^2+b}{a+b^2}$.

Questão 15. O valor numérico da expressão $\left(\frac{x^2-y^2+x-y}{x-y} + \frac{x-y}{y-x}\right)^{-2}$ para $x = 2^{-1}$ e $y = 2^{-1/2}$ é:

(A) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (B) 5 **(C)** $4(3-2\sqrt{2})$ (D) 3 (E) $12-2\sqrt{2}$

Solução. Simplificando a expressão antes da substituição, temos:

i) $\left(\frac{x^2-y^2+x-y}{x-y}+\frac{x-y}{y-x}\right)^{-2}=\left(\frac{(x+y).(x-y)+x-y}{x-y}-\frac{x-y}{x-y}\right)^{-2}=\left(\frac{(x+y+1).(x-y)}{x-y}-\frac{x-y}{x-y}\right)^{-2}=$

$=(x+y+1-1)^{-2}=(x+y)^{-2}.$

ii) Substituindo, temos: $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right)^{2}=\frac{8}{2+4\sqrt{2}+4}=\frac{8}{6+4\sqrt{2}}=\frac{4}{3+2\sqrt{2}}=$

$=\frac{4}{3+2\sqrt{2}}.\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right)=\frac{4.(3-2\sqrt{2})}{9-8}=(3-2\sqrt{2}).$

Questão 16. Numa sala há vários bancos e várias pessoas. Se cada pessoa sentar em 1 banco, ficam 2 pessoas em pé, e se em cada banco sentam 2 pessoas, sobram 2 bancos vazios. Se em cada banco podem sentar 10 pessoas, quantas pessoas ainda poderiam entrar na sala e ficar sentadas?

(A) 42 (B) 48 (C) 72 **(D)** 52 (E) 38

Solução. Considere x o número de bancos. O número de pessoas é o mesmo nas duas situações. Temos:
x + 2 = 2.(x – 2) => x + 2 = 2x – 4 => x = 6. Logo, há 6 bancos e 8 pessoas.
Se podem sentar 10 pessoas em cada banco, podem ficar sentadas (6 x 10) = 60 pessoas.

Como só há 8 pessoas na sala. Logo, poseriam entrar (60 – 8) = 52 pessoas.

Questão 17. Uma professora de literatura deseja distribuir livros entre seus 480 alunos, de modo que cada um receba o mesmo número de livros e não sobre nenhum. Os livros estão todos empacotados em embrulhos de uma dúzia e meia cada. Se cada aluno receber o menor número possível de livros, quantos desses pacotes a professora deverá adquirir?

(A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 60 **(E)** 80

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

1440	2
720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
9	3
5	5
1	

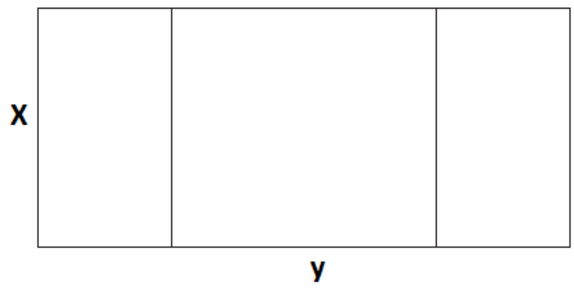
Solução. Em cada pacote há 18 livros. Se cada aluno ganhasse 1 livro, não seria possível um número inteiro de pacotes, pois 480 não é múltiplo de 18.

Decompondo 480 em fatores primos, vem: 480 = 2^5 x 3 x 5.

Como 18 = 2 x 3 x 3, se multiplicarmos 480 por 3, temos: 1440 = 2^4 x (2 x 3^2) x 5.

Dessa forma cada aluno receberá 3 livros (menor quantidade possível) e serão necessários (1440 ÷ 18) = 80 pacotes.

Questão 18. Um agricultor deseja cercar uma área dividida em três regiões retangulares, como indica a figura. Para contornar e dividir as regiões, ele dispõe de 200 metros de cerca. Qual é a maior área que ele pode cercar?



(A) 2500 m^2 **(B)** 1250 m^2 (C) 3473 m^2 d) 2000 m^2 e) 1325 m^2

Solução. A área cercada será a de fora mais as duas divisões internas. A expressão será 200 = 2.(x + y) + 2x. A área será expressão como A = x.y.

i) 2(x + y) + 2x = 200 => x + y + x = 100 => y = 100 – 2x.

ii) A = x.(100 – 2x) = – 2x² + 100y. Essa função é quadrática com concavidade para baixo. O valor máximo será a ordenada do vértice: Área (máxima) = $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(100)^2}{4.(-2)}=\frac{10\ 000}{8}=1250.$

Questão 19. A diferença entre o número de lados de dois polígonos é sete, e a soma de todos os ângulos internos dos dois polígonos é 4 140°. O que tem menos vértices é um:

(A) heptágono. (B) icoságono. **(C)** decágono. (D) eneágono. (E) octógono.

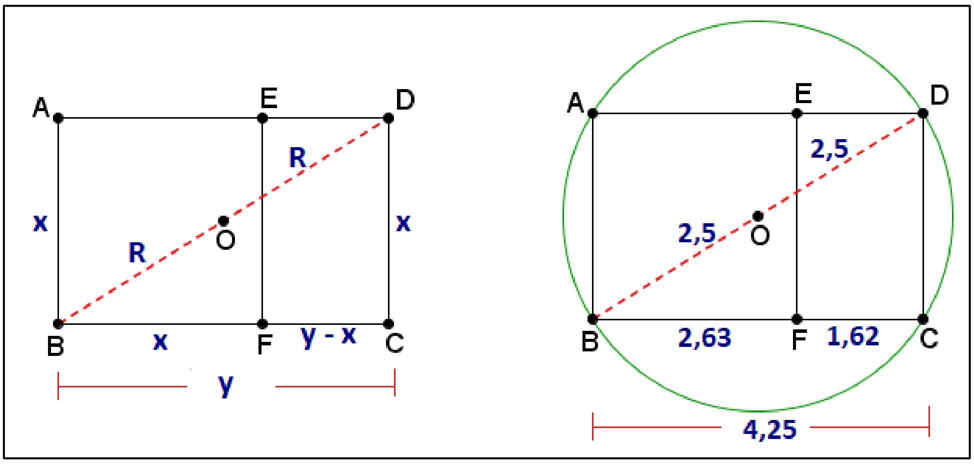
Solução. Considere n e m o número de lados de cada polígono. Sendo n > m, temos:

i) n – m = 7

ii) 180°.(n -2) + 180°.(m – 2) = 4 140° => n – 2 + m – 2 = 23 => n + m = 27.

iii) $\begin{cases} n - m = 7 \\ n + m = 27 \end{cases}$**. => 2n = 34 => n = 17. Logo, m = 10. Um decágono.**

Questão 20. Os retângulos ABCD e EFCD são semelhantes, e ABFE é um quadrado. Para que ABCD possa ser inscrito em um círculo de raio $\sqrt{4+\sqrt{5}}$, o segmento BC deve medir:



(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **(B)** $\sqrt{\frac{50+18\sqrt{5}}{5}}$ (C) 4 (D) 2 (E) 1

Solução. Para que ABCD seja inscrito, temos que BD deve ser diâmetro. Isto é BD = 2R = 2.$\sqrt{4+\sqrt{5}}$.

Utilizando a condição de semelhança indicada, temos:

$\frac{x}{y-x} = \frac{y}{x} \Rightarrow$ **$x^2 = y^2 - xy \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Rightarrow x =$** $\frac{-y \pm \sqrt{y^2-4.(1).(-y^2)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{5y^2}}{2} = \frac{-y \pm y\sqrt{5}}{2}$.

Como x > 0, temos que x = $\frac{y.(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo BDC, temos:

$y^2 + x^2 = (2R)^2 \Rightarrow y^2 +$ $\frac{y^2(5-2\sqrt{5}+1)}{4}$ **$= 4.(4+\sqrt{5}) \Rightarrow 4y^2 + 6y^2 - 2y^2.\sqrt{5} = 16.(4+\sqrt{5}) \Rightarrow$**

$\Rightarrow 10y^2 - 2y^2.\sqrt{5} = 16.(4+\sqrt{5}) \Rightarrow y^2.(5-\sqrt{5}) = 8.(4+\sqrt{5}) \Rightarrow y^2 =$ $\frac{8.(4+\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}} = \frac{8.(4+\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}} . \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 =$ $\frac{8.(20+4\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5)}{25-5} = \frac{8.(25+9\sqrt{5})}{20} = \frac{2.(25+9\sqrt{5})}{5} \Rightarrow$ **y =** $\sqrt{\frac{50+18\sqrt{5}}{5}}$**. (Aproximadamente 4,25)**