COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
(Casa de Thomaz Coelho / 1889)
CONCURSO DE ADMISSÃO AO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO 2010/2011
PROVA DE MATEMÁTICA
17 de outubro de 2010

MATEMÁTICA - GABARITO

(Prof. Walter Tadeu Nogueira da Silveira – www.professorwaltertadeu.mat.br)

Questão 1. A soma de dez números naturais é igual a 143. Dentre esses números, existem exatamente quatro números primos distintos. Se retirarmos três números primos da soma, a média aritmética simples entre os números restantes será igual a 19. Dentre os números retirados, podemos afirmar que o menor vale:

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

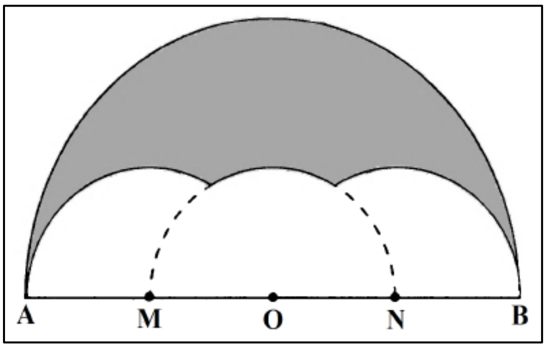
Solução. Não foi dito que os números não-primos são distintos. De acordo com as informações , temos:

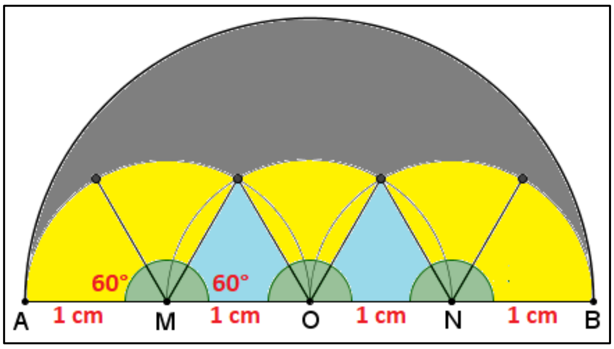
i) S(10) = S(6) + P1 + P2 + P3 + P4 = 143. Onde P1, P2, P3 e P4 são os números primos.

ii) Média de 7 números incluindo um primo é 19: $\frac{S(6)+P1}{7} = 19$ => S(6) + P1 = 133. Logo, a soma dos números primos retirados vale (143 – 133) = 10. Como são distintos, a possibilidade é (2 + 3 + 5) = 10, pois a próxima soma de três primos sera superir a 10.

Dessa forma o menor vale 2.

Questão 2. Na figura abaixo, temos o semicírculo de diâmetro AB = 4cm e centro O. Sejam M o ponto médio de AO e N o ponto médio de OB. Com centros em M, O e N, traçam-se 3 semicírculos de raios iguais a 1cm e contidos no interior do semicírculo de diâmetro 4cm e centro O. A área da região sombreada, em cm^2, a qual está situada no interior do semicírculo maior e exterior aos três semicírculos menores, vale:





(A) $\pi - \sqrt{3}$ (B) $\pi - \sqrt{2}$ (C) $\frac{\pi+\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{2}$ **(E)** $\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solução. Os três semicírculos de raios 1 cm podem ser divididos em cinco setores circulares de 60° e dois triângulos equiláteros de lado 1. A área pedida será a diferença entre a área do semicírclo de raio 2 cm e a soma das áreas dos semicírculos de raio 1 cm. Calculando as áreas, temos:

i) àrea do semicírculo de raio 2 cm = $\frac{\pi.(2)^2}{2} = 2\pi$ cm^2.

ii) área do setor circular de 60° = $\frac{\pi(1)^2}{6} = \frac{\pi}{6}$. **iii) área do triângulo equilátero = $\frac{(1)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.**

iv) área sombreada = $2\pi - 5.\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi - \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12\pi-5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 3. Em uma reunião com alunos da Cavalaria, realizada durante todos os dias de uma mesma semana no

CMRJ, as frequências dos alunos participantes estão representadas na tabela abaixo.

	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira
Quantidade de alunos presentes	76	70	72	64	63

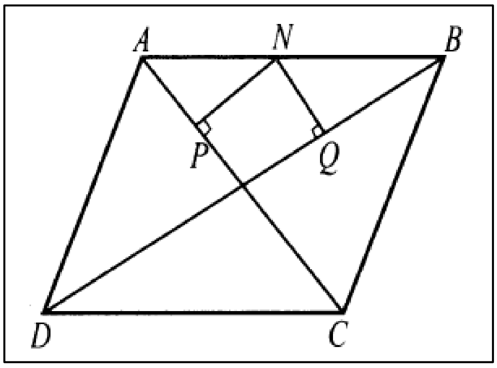
Considerando que cada um dos participantes precisou faltar exatamente 2 dias, então, relativamente ao total de participantes, a porcentagem de alunos que faltaram na 6ª feira é mais próxima de:

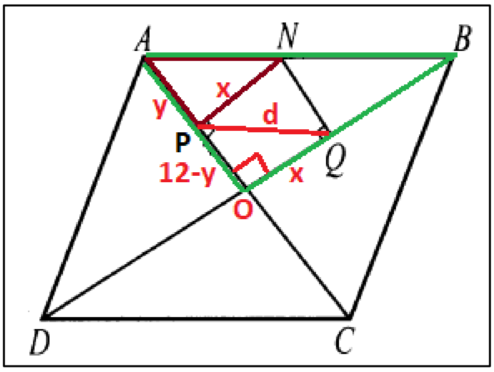
(A) 45% (B) 40% (C) 38% (D) 35% (E) 32%

Solução. Considerando N o número de participantes, o total de participantes ao longo da semana, caso não houvesse faltas, seria de 5N. Se cada participante faltou exatamente 2 dias, então houve 2N faltas nessa semana. Então, 5N – 2N = (76 + 70 + 72 + 64 + 63) => 3N = 345 => N = 345 ÷ 3 = 115.

Então na 6ª feira faltaram (115 – 63) = 82 participampes. Esse número corresponde a $\frac{52}{115}$ ≅ 0,452 -> 45%.

Questão 4. Na figura, ABCD é um losango onde a diagonal AC = 24 cm e a diagonal BD = 32 cm. Seja N um ponto qualquer sobre o lado $\overline{AB}$; sejam P e Q os pés das perpendiculares baixadas de N a, respectivamente, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Nestas condições, qual dos valores abaixo representa o valor mínimo de $\overline{PQ}$?





(A) 6,5 cm (B) 7,5 cm (C) 9,6 cm (D) 9,8 cm (E) 10,5 cm

Solução. Como ABCD é losango, suas diagonais são perpendiculares e cortam=se ao meio. Dessa forma PQ será a diagonal de um quadrado ou retângulo.

Os triângulos APN e AOB são semelhantes. Temos:

$\frac{y}{x} = \frac{12}{16}$ => 16y = 12x => 4y = 3x => y = $\frac{3x}{4}$. A distância PQ é a hipotenusa do triângulo POQ.

Calculando e minimizando, temos:

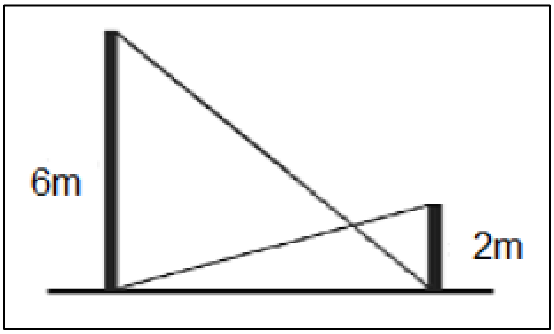
$$d = \sqrt{(12-y)^2 + x^2} = \sqrt{\left(12 - \frac{3x}{4}\right)^2 + x^2} = \sqrt{144 - 18x + \frac{9x^2}{16} + x^2} = \sqrt{\frac{25x^2}{16} - 18x + 144}.$$

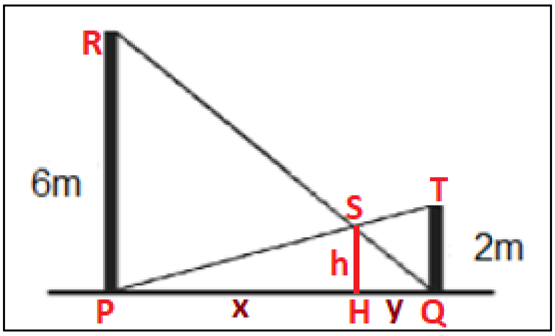
$$d(\text{mínimo}) = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} = \sqrt{-\frac{324 - 4\left(\frac{25}{16}\right).(144)}{4\left(\frac{25}{16}\right)}} = \sqrt{-\frac{324-900}{\left(\frac{25}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{576}{\left(\frac{25}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{(576).(4)}{25}} =$$

$$= \frac{(24).(2)}{5} = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ cm}.$$

Questão 5. Em uma exposição artística um escultor apresentou sua obra prima, intitulada “as torres vizinhas”. Repare que a mesma consta de duas hastes paralelas de ferro fundidas perpendicularmente em uma mesma base e escoradas por dois cabos de aço retilíneos, como mostra a figura abaixo. As alturas das hastes medem, respectivamente, 6 metros e 2 metros.

Desprezando-se a espessura dos cabos, determine a distância do ponto de interseção dos cabos à base da escultura.





(A) 2,25 m (B) 2,00 m (C) 1,75 m **(D)** 1,50 m (E) 1,25 m

Solução. Nomeando os pontos de contato com a base e a interseção entre os cabos, formamos triângulos retângulos semelhantes, considerando ainda as medidas x, y e h. Temos:

i) Os triângulos QRP e QHS são semelhantes: $\frac{h}{6} = \frac{y}{x+y}$ **=> 6y = hx + hy.**

ii) Os triângulos PSH e PTQ são semelhantes: $\frac{h}{2} = \frac{x}{x+y}$ **=> 2x = hx + hy.**

iii) Observando (i) e (ii), concluímos que 2x = 6y => x = 3y. Logo, 6y = h.(3y) + hy => 6 = 4h => h = $\frac{6}{4} = 1{,}5$ **m.**

Questão 6. Em uma reunião com os professores das cinco Seções de Ensino do CMRJ (A, B, C, D, E), verificou-se que 43% dos presentes eram da Seção A, 25% da B, 10% da C, 14% da D e 8% da E. Alguns professores da Seção A se ausentaram antes do final da reunião, alterando o percentual de professores dessa Seção para 40%. O percentual referente ao número de professores que se retirou em relação ao total inicialmente presente na reunião é de:

(A) 10% (B) 8% (C) 6% **(D)** 5% (E) 3%

Solução 1. Seja T o total inicial de professores. Então na seção A, temos: $\frac{A}{T} = 0{,}43$ **=> A = 0,43T.**

Se saíram N professores da seção A e o percentual caiu para 40%, temos:

$\frac{A-N}{T-N} = 0{,}4$ **=> 0,4T – 0,4N = A – N => 0,4T – 0,4N = 0,43T – N => 0,6N = 0,03T =>** $\frac{N}{T} = \frac{0{,}03}{0{,}6} = 0{,}05 = 5\%$**.**

Solução 2. Considerando como 100 e o número de professores que se retiraram, temos:

$\frac{43-N}{100-N}$ **= 0,4 => 40 – 0,4N = 43 – N => 0,6N = 3 => N =** $\frac{3}{0{,}6}$**= 5.**

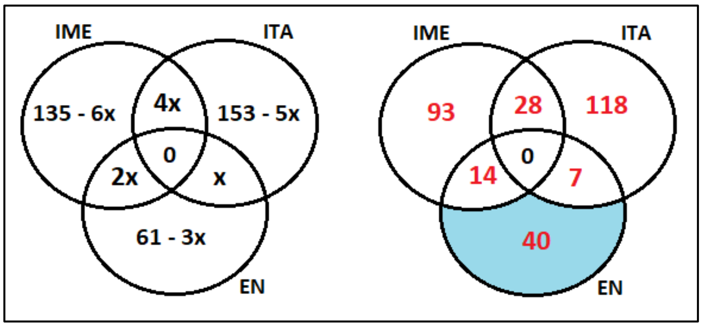
Esse número de faltosos corresponde 5% em relação ao total incialmente na reunião.

Questão 7. Uma pesquisa realizada com 300 alunos do Prevest do CMRJ revelou que 135, 153 e 61 desses alunos pretendem fazer concurso para o IME, o ITA e a Escola Naval, respectivamente. Ela mostrou, também, que nenhum dos entrevistados pretende prestar vestibular para as três instituições; que vários deles farão dois desses concursos e que todos farão pelo menos um deles.

Sabendo que a quantidade de estudantes que farão as provas para o IME e o ITA é igual ao dobro da quantidade dos que realizarão as provas para o IME e a Escola Naval que, por sua vez, é igual ao dobro dos que prestarão concurso para o ITA e a Escola Naval, a quantidade de entrevistados que farão apenas as provas para a Escola Naval é igual a:

(A) 48 (B) 45 **(C)** 40 (D) 36 (E) 30

Solução. Organizando as informações em diagramas, temos:



Como todos farão pelo menos um deles, a soma de todos os termos deve ser 300. Temos:
135 – 6x + 6x + 153 – 5x + x + 61 – 3x = 300 => – 7x = 300 – 349 => 7x = 49 => x = 7.
Logo, a quantidade de alunos que só farão a prova da Escola Naval é 61 – 3.(7) = 61 – 21 = 40.

Questão 8. Dados os números reais a, b, c diferentes de zero e a + b + c ≠ 0, para que a igualdade

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

sempre se verifique, devemor ter, necessariamente:

(A) a = b = 2c (B) a = b = – 2c (C) a = b ou b = c ou a = c

(D) $\frac{a+c}{2}=b$ **(E)** a = – b ou b = – c ou a = – c

Solução. Desenvolvendo o membro da direita, temos:

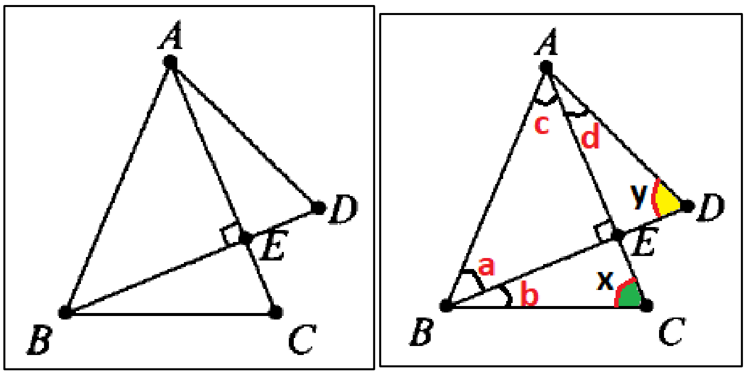
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} => \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c} => \frac{a+b}{ab}=\frac{c-(a+b+c)}{ac+bc+c^2} =>$$

$$=> \frac{a+b}{ab}=\frac{c-a-b-c}{ac+bc+c^2} => \frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{ac+bc+c^2}$$ **=> (a + b).(ac + bc + c^2) = – ab.(a + b) =>**

=> (a + b).(ac + c^2 + bc + ab) = 0 => (a + b).[c.(a + c) + b.(a + c)] = 0 => (a + b).(b + c).(a + c) = 0 =>

$$=> \begin{cases} a+b=0 => a=-b \\ b+c=0 => b=-c. \\ a+c=0 => a=-c \end{cases}$$

Questão 9. Os triângulos ABC e ABD da figura são isósceles com AB = AC = BD. Seja E o ponto de interseção de BD com AC. Se BD é perpendicular a AC, então a soma dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ vale:



(A) 115° (B) 120° (C) 130° **(D)** 135° (E) 140°

Solução. Observando os ângulos temos a + c = 90°. Estabelecendo as outras relações, temos:

i) $\begin{cases} x=a+b => b=x-a \\ x+x-a=90° \end{cases} => 2x-a=90°;$

ii) $\begin{cases} y = c + d => d = y - c \\ y + y - c = 90° \end{cases} => 2y - c = 90°;$

iii) De (i) e (ii), temos: 2x – a + 2y – c = 180° => 2(x + y) – (a + c) = 180° => 2(x + y) = 270° => x + y = 135°.

Questão 10. Veja a passagem abaixo, transcrita do livro do famoso historiador grego da antiguidade Heródoto, História – Livro II (Egito).

> *"De Heliópolis a Tebas sobe-se o rio durante nove dias, numa distância de quatro mil oitocentos e sessenta estádios, ou seja, oitenta e um esquenos. Do litoral a Tebas a distância é de seis mil cento e vinte estádios; de Tebas a Elefantina, mil e oitocentos estádios. Na sua orla litorânea, o Egito mede três mil e seiscentos estádios."*

No texto, Heródoto cita duas antigas unidades de medida: o estádio, equivalente a 0,185 quilômetros, e o esqueno. O litoral brasileiro tem cerca de 749 250 000 centímetros de extensão. Mantendo-se as mesmas condições apontadas por Heródoto, o número de dias necessário para percorrer o litoral brasileiro será igual a:

(A) 71 (B) 73 **(C)** 75 (D) 77 (E) 79

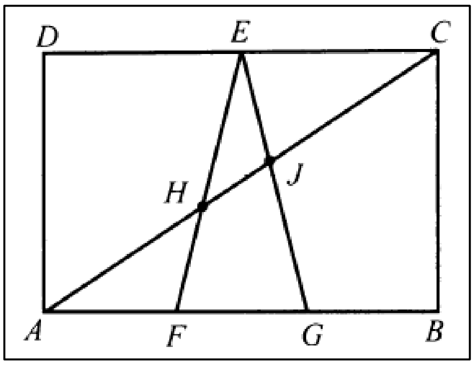
Solução. Relacionando as medidas, temos:

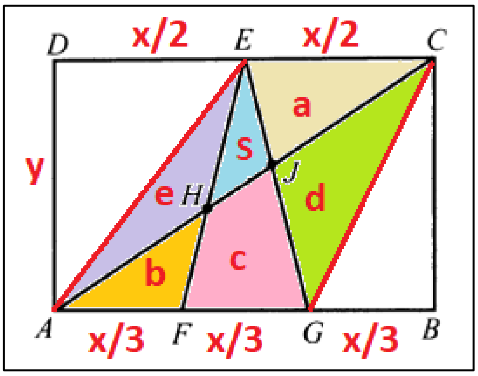
i) 4 860 estádios = 4 860 x 0,185 km = 899,1 km. Esta distância foi percorrida em 9 dias.

ii) O litoral brasileiro possui 749 250 000 cm = 7492,5 km. Estabelecendo a proporção, vem:

$$\frac{899{,}1}{9} = \frac{7492{,}5}{x} => x = \frac{(7492{,}5).(9)}{899{,}1} = \frac{7492{,}5}{99{,}9} = 75.$$

Questão 11. No retângulo ABCD, os pontos F e G pertencem ao lado AB e são tais que AF = FG = GB. O ponto médio do lado CD é o ponto E. A diagonal AC intercepta os segmentos EF e EG, respectivamente, nos pontos H e J. A área do retângulo ABCD mede 70 cm². A área do triângulo EHJ, então, é igual a:





(A) $\frac{5}{2}$ cm² (B) $\frac{35}{12}$ cm² **(C)** 3 cm² (D) $\frac{7}{2}$ cm² (E) $\frac{35}{8}$ cm²

Solução. Observe as regiões assinaladas e suas respectivas áreas a, b, c, d, e, S. Aplicando a razão de semelhança relacionando áreas e dimensões, temos:

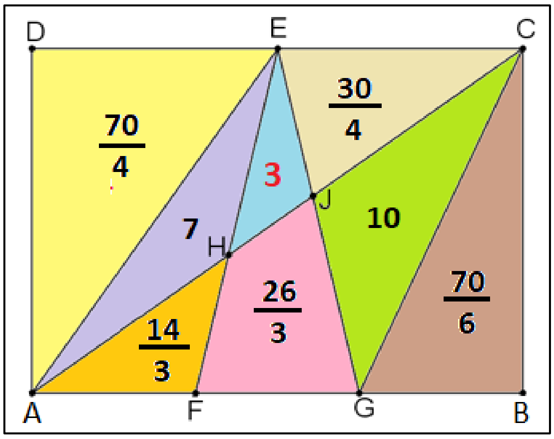
i) $\frac{S+a}{b} = \frac{(x/2)^2}{(x/3)^2} = \frac{x^2}{4}.\frac{9}{x^2} = \frac{9}{4} => S + a = \frac{9b}{4};$ **ii)** $\frac{a}{b+c} = \frac{(x/2)^2}{(2x/3)^2} = \frac{x^2}{4}.\frac{9}{4x^2} = \frac{9}{16} => b + c = \frac{16a}{9};$

iii) $\begin{cases} b + e = \frac{(x/3).(y)}{2} = \frac{xy}{6} = \frac{70}{6} \\ S + a + e = \frac{(x/2).(y)}{2} = \frac{xy}{4} = \frac{70}{4} \end{cases} => \begin{cases} b + e = \frac{70}{6} \\ \frac{9b}{4} + e = \frac{70}{4} \end{cases} => \frac{9b}{4} - b = \frac{70}{4} - \frac{70}{6} => \frac{5b}{4} = \frac{70}{12} => b = \frac{14}{3};$

iv) $\begin{cases} a + d = \frac{(x/2).(y)}{2} = \frac{xy}{4} = \frac{70}{4} \\ b + c + d = \frac{(2x/3).(y)}{2} = \frac{xy}{3} = \frac{70}{3} \end{cases} => \begin{cases} a + d = \frac{70}{4} \\ \frac{16a}{9} + d = \frac{70}{3} \end{cases} => \frac{16a}{9} - a = \frac{70}{3} - \frac{70}{4} => \frac{7a}{9} = \frac{70}{12} => a = \frac{30}{4};$

v) $S = \frac{9b}{4} - a = \frac{9}{4}.\left(\frac{14}{3}\right) - \frac{30}{4} = \frac{42}{4} - \frac{30}{4} = \frac{12}{4} = 3\ cm^2$.

Observe as medidas das áreas das outras regiões. O somatório é 70 cm².



Questão 12. Se $\frac{3^{n-2}+3^{n-1}+3^n+3^{n+1}}{2^{n-2}+2^{n-1}+2^n+2^{n+1}} = \frac{10.7^{n+1}+2.7^n}{7^{n+2}-37.7^n}$, então o valor de <u>n</u> é:

(A) – 4 (B) – 2 (C) 0 (D) 2 **(E)** 4

Solução. Separando em potências de mesma base e simplificando, temos:

$$\frac{3^n.3^{-2}+3^n.3^{-1}+3^n+3^n.3}{2^n.2^{-2}+2^n.2^{-1}+2^n+2^n.2} = \frac{10.7^n.7+2.7^n}{7^n.7^2-37.7^n} \Rightarrow \frac{3^n.\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+4\right)}{2^n.\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+3\right)} = \frac{72.7^n}{12.7^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3^n.\left(\frac{1+3+36}{9}\right)}{2^n.\left(\frac{1+2+12}{4}\right)} = 6 \Rightarrow \frac{3^n.\left(\frac{40}{9}\right)}{2^n.\left(\frac{15}{4}\right)} = 6 \Rightarrow \frac{3^n}{2^n} = 6.\frac{15}{4}.\frac{9}{40} \Rightarrow \frac{3^n}{2^n} = 3.\frac{3}{4}.\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{3^n}{2^n} = \frac{81}{16} \Rightarrow \frac{3^n}{2^n} = \frac{3^4}{2^4}$. **Logo, n = 4.**

Questão 13 Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, na hora de pagar a conta, que era de R$ 600,00, dois deles perceberam que estavam sem dinheiro; consequentemente, não tinham como pagar suas respectivas partes. Isso fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$ 10,00. Os dois amigos que não tinham levado dinheiro combinaram então que, no dia seguinte, cada um deles depositaria na conta bancária de um dos que pagou a mesma quantia que os demais haviam pago, acrescida de 10% de multa. Com isso seria criada uma caixinha a ser usada em futuros encontros. Assim, a caixinha foi criada com o valor igual a:

(A) R$ 132,00 (B) R$ 120,00 (C) R$ 110,00 (D) R$ 66,00 (E) R$ 60,00

Solução. Considere que N era o número inicial dos amigos que dividiriam a conta. Cada um pagaria $\frac{600}{N}$. Com a retirada de duas contribuições, cada um dos pagantes contribuiu com $\frac{600}{N-2}$. Este valor é R$10,00 maior que o anterior. Isto é: $\frac{600}{N-2} - \frac{600}{N} = 10 \Rightarrow 600N - 600N + 1200 = 10N^2 - 20N \Rightarrow 10N^2 - 20N - 1200 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N^2 - 2N - 120 = 0 \Rightarrow (N-12).(N+10) = 0$. Como N > 0, N = 12.

Dessa forma, a quantia paga por cada contribuinte foi $\frac{600}{12-2} = \frac{600}{10} =$ R$60,00.

Cada amigo que não pagou depositou (60).(1,1) = R$ 66,00. A caixinha foi criada com 2.(R$ 66,00) = R$ 132,00.

Questão 14. O preço do ingresso para uma peça teatral custava R$ 150,00. Certo dia, a administração do teatro fez uma promoção, reduzindo o preço do ingresso. Em consequência, foi observado um aumento de 50% no número de espectadores e um acréscimo de 25% na renda do espetáculo. A redução percentual aproximada no preço do ingresso foi de:

(A) 10% **(B)** 16,6% (C) 20,4% (D) 23,8% (E) 25%

Solução. Considerando N o número de espectadores inicialmente, temos: Renda (R) = 150N.

Após a redução do preço em p, temos: 1,25.R = (150 – p).1,5.N => 1,25.(150N) = (150 – p).1,5.N=>

=> 187,5N = 225N – 1,5p.N =>1,5p = 225 – 187,5 => p = $\frac{37,5}{1,5}$. = R$ 25,00.

Logo, o preço novo foi (150 – 25) = R$ 125,00.

A redução percentual então foi: $\frac{150-125}{150} = \frac{25}{150}$ =0,166 -> 16,6%.

Questão 15. Certo dia, Claudete e Alexandre, professores em uma unidade do Ministério da Defesa, receberam alguns recursos sobre provas de um processo externo de seleção para emitir pareceres e os dividiram entre si na razão inversa de suas respectivas idades: 35 e 40 anos. Na execução dessa tarefa, a capacidade operacional de Alexandre foi 75% da de Claudete e ambos a iniciaram quando eram decorridos $\frac{11}{32}$ do dia, trabalhando ininterruptamente até completá-la. Se Alexandre levou 3 horas e 30 minutos para terminar a sua parte, então Claudete completou a parte dela às:

(A) 10 horas e 45 minutos. (B) 11 horas. **(C)** 11 horas e 15 minutos.

(D) 12 horas e 15 minutos. (E) 12 horas e 45 minutos.

Solução. Se um professor emite 10 pareceres em 3 hora, então sua capacidade é C = 10/3.

Genericamente, se um professor tem a capacidade C de emitir X pareceres no tempo T, então ele emite, nesse tempo, um total de X = (C.T) provas. Considerando que o total de pareceres é P e Claudete recebeu X e Alexandre recebeu Y, temos:

i) $\frac{X}{\frac{1}{35}} = \frac{Y}{\frac{1}{40}} = \frac{X+Y}{\frac{15}{280}} => 35X = 40Y = \frac{280P}{15} = \frac{56P}{3}$.

ii) Claudete ficou com $\frac{56P}{105} = \frac{8P}{15}$ e Alexandre com $\frac{56P}{120} = \frac{7P}{15}$.

iii) C(Alê).T(Alê) = $\frac{7P}{15}$ => 0,75.C(Clau).(210 min) = $\frac{7P}{15}$ => $\frac{3}{4}$. C(Clau).(210 min) = $\frac{7P}{15}$ =>

=> C(Clau) = $\left(\frac{7P}{15}\right).\left(\frac{1}{210\,min}\right).\left(\frac{4}{3}\right)$ => > C(Clau) = $\left(\frac{P}{15}\right).\left(\frac{1}{15\,min}\right).\left(\frac{2}{3}\right)$ => C(Clau) = $\frac{2P}{675min}$.

iv) C(Clau).T(Clau) = $\frac{8P}{15}$ => $\frac{2P}{675min}$. T(Clau) = $\frac{8P}{15}$ => T(Clau) = $\left(\frac{8P}{15}\right).\left(\frac{675min}{2P}\right)$ = (4).(45 min) = 180 min.

Logo, Claudete levou 3 horas para emitir seus pareceres.

v) Eles começaram quando eram decorridos $\frac{11}{32}$ do dia = $\frac{11}{32}$.(24 h) = $\frac{33\,h}{4}$ = 8 h + $\frac{1\,h}{4}$ = 8 h 15 min.

Então Claudete completou a parte dela às (8 h 15 minutos + 3 h) = 11 horas e 15 minutos.

Questão 16. *Nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo. O ar exalado tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Cientistas realizaram medidas com um pequeno pássaro do deserto e concluíram que a temperatura do ar exalado é uma função da temperatura ambiente.* (Baseado em estudos científicos divulgados pelo livro "Introdução à Matemática para Biocientistas", de E. Batschelet).

Para uma temperatura ambiente T_A medida em graus Celsius, tal que 20 ºC < T_A < 40 ºC, a temperatura do ar exalado T_E é dada por $T_E = 8{,}5 + 0{,}8T_A$.

Considerando apenas os valores inteiros para a variável T_A, a razão entre o maior e o menor valores obtidos para T_E será aproximadamente igual a:

(A) 1,57 (B) 1,65 (C) 1,75 (D) 1,86 (E) 2

Solução. Utilizando a desigualdade apresentada, temos:

i) $T_A > 20 \Rightarrow T_A = 21$. Logo, $T_E = 8{,}5 + 0{,}8.(21) = 8{,}5 + 16{,}8 = 25{,}3$.

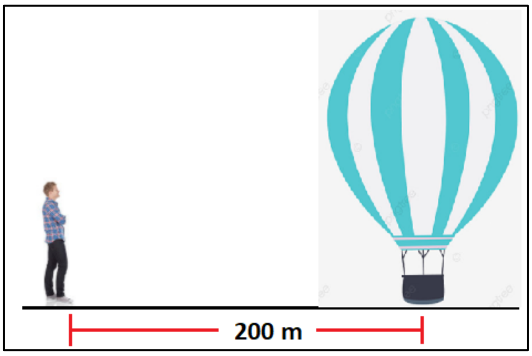
ii) $T_A < 40 \Rightarrow T_A = 39$. Logo, $T_E = 8{,}5 + 0{,}8.(39) = 8{,}5 + 31{,}2 = 39{,}7$.

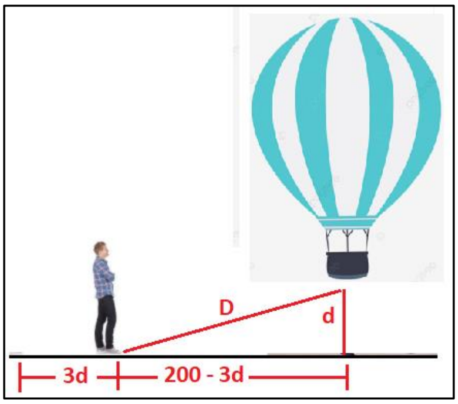
iii) Razão = $\frac{39{,}7}{25{,}3} \cong 1{,}569 \to 1{,}57$.

Questão 17. Uma das maiores atrações turísticas da Capadócia é o passeio de balão. Estando de férias naquela localidade, Ademar resolveu conhecer de perto a atividade, dirigindo-se de táxi ao local indicado. No mesmo instante em que avista um balão azul que inicia sua subida vertical com velocidade uniforme de 1 metro por segundo, ele começa a correr, em linha reta num plano horizontal, em direção ao balão com velocidade uniforme de 3 metros por segundo.
Se, no momento inicial, em que o balão ainda se encontrava em terra, a distância medida na horizontal entre Ademar e o balão era de 200 metros, a menor distância existente entre eles será de:

(A) $15\sqrt{10}$ metros. **(B)** $20\sqrt{10}$ metros. (C) $30\sqrt{10}$ metros. (D) $40\sqrt{10}$ metros. (E) $50\sqrt{10}$ metros.

Solução. A velocidade de Ademar é o triplo da velocidade do balão. Isto significa que num mesmo tempo, quando o balão de desloca de <u>d</u> metros, Ademar se desloca <u>3d</u> metros. Observe as figuras.





A distância D ente Ademar e o balão é dada por $D^2 = d^2 + (200 - 3d)^2 = d^2 + 40\,000 - 1\,200d + 9d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \sqrt{10d^2 - 1\,200d + 40\,000}$.

A expressão no radicando é quadrática e admite mínimo. Temos:

$$D(\text{mínimo}) = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} = \sqrt{-\frac{(-1\,200)^2 - 4.(10).(40\,000)}{4(10)}} = \sqrt{-\frac{1\,440\,000 - 1\,600\,000}{40}} = \sqrt{\frac{160\,000}{40}} =$$

$$= \sqrt{4000} = \sqrt{2^2.10^2.10} = 20\sqrt{10}\ metros.$$

Questão 18. Na variável x, a equação $3(mx - p + 1) - 4x = 2(-px + m - 4)$ admite uma infinidade de soluções. A soma dos valores reais de **m** e **p** é igual a:

(A) 3 (B) 2 (C) 0 (D) – 2 (E) – 3

Solução. Desenvolvendo ambos os membros e observando os coeficientes da mesma parte literal, temos:

$3(mx - p + 1) - 4x = 2(-px + m - 4) \Rightarrow 3mx - 3p + 3 - 4x = -2px + 2m - 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3m - 4)x - 3p + 3 = -2px + 2m - 8 \Rightarrow \begin{cases} 3m - 4 = -2p \Rightarrow 3m + 2p = 4 \\ -3p + 3 = 2m - 8 \Rightarrow 2m + 3p = 11 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos: $\begin{cases} 3m + 2p = 4 \rightarrow (\times -2) \\ 2m + 3p = 11 \rightarrow (\times 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6m - 4p = -8 \\ 6m + 9p = 33 \end{cases}$ **=> 5p = 25 => p = 5.**

Logo, 3m + 2(5) = 4 => 3m = 4 – 10 => 3m = – 6 => m = – 2. A soma m + p = 5 + (– 2) = 3.

Questão 19. Dentre as afirmativas abaixo, assinale a **FALSA**.

(A) Seja **a** um número real não nulo. Então, $\mathbf{a}^{-1} \in$ IR.

(B) Para qualquer número inteiro, a raiz quadrada desse número elevado ao quadrado é igual ao próprio número.

(C) Para qualquer inteiro, o sucessor do antecessor do número é o próprio número.

(D) A média aritmética simples de dois inteiros negativos não é necessariamente um inteiro negativo.

(E) Todo número real negativo possui inverso.

Solução. Analisando as afirmativas, temos:

(A) Verdadeira. O número real a^{-1} é o inverso de a.

(B) Falsa. O número (– 2) é inteiro e $\left(\sqrt{-2}\right)^2 \neq -2$. Não existe raiz quadrada de número negativo em IR.

(C) Verdadeira. Dado N, seu antecessor é (N – 1) e o sucessor (N – 1) é (N – 1) + 1 = N.

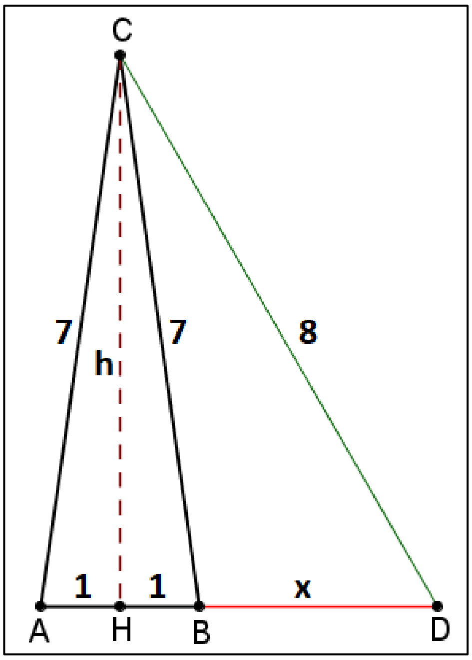
(D) Verdadeira. A média aritmética dos inteiros (– 2) e (– 5) é $\frac{(-2)+(-5)}{2} = -\frac{7}{2}$ = – 3,5 que não é inteiro.

(E) Verdadeira. O produto de qualquer número real pelo seu inverso é 1, que é o elemento neutro da multiplicação.

Questão 20. Seja o triângulo isósceles ABC, com AC = BC = 7 cm e AB = 2 cm. Seja D um ponto situado na reta que contém o lado AB, de tal modo que tenhamos o ponto B situado entre os pontos A e D, e CD = 8 cm. Nestas condições, a medida de BD, em cm, vale:

(A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4

(D) 5 (E) $4\sqrt{2}$



Solução. A altura em relação ao lado diferente é mediana também. Assim, temos os triângulos retângulos CHB e CHD. Utilizando a relação de Pitágoras, temos:

i) $7^2 = h^2 + 1^2 \Rightarrow h = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$;

ii) $8^2 = h^2 + (1 + x)^2 \Rightarrow 64 = 48 + (1 + x)^2 \Rightarrow (1 + x)^2 = 64 - 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + x)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} 1 + x = -4 \Rightarrow x = -5 < 0 \rightarrow \textit{Não convém.} \\ 1 + x = 4 \Rightarrow x = 3 \rightarrow \textit{ok.} \end{cases}$

Dessa forma BD = 3 cm.