**Análise Combinatória - UERJ / ENEM / PISM – Data: 26/5/2018 - GABARITO**

**1ª Questão**

(UERJ) Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.

Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:



O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

**a)** 624 b) 676 c) 715 d) 720

**Solução 1. A escolha de qualquer carta inicialmente pode ser feita de 52 formas distintas. A segunda carta terá que ser uma com valor dentre os 12 restantes (diferentes da primeira). A terceira, quarta e quinta carta possuem o mesmo valor da segunda, logo com 1 única possibilidade para cada. Pelo princípio multiplicativo, temos: (52).(12).(1).(1).(1) = 624 conjuntos.**

**Solução 2. Escolha da quadra: 13 possibilidades (valores). A quinta carta possui 48 (52 – 4) possibilidades. Total: (13).(48) = 624 conjuntos.**

**2ª Questão**.

(PISM) Em uma agência bancária, a fim de evitar filas com os clientes, implantou-se um sistema de senhas numéricas crescentes, controladas por um painel eletrônico. As senhas são formadas a partir de três algarismos, sem repetição, com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Sabendo que a primeira senha num dado dia foi 123, qual posição ocupará um cliente que nesse dia, possuía a senha 521?

a) 12 b) 48 **c)** 52 d) 600 e) 72

**Solução. Analisando as possibilidades, temos:**

**i) Centena menor que 5: (4 poss) x (4 poss) x (3 possib) = 48**

**ii) Centena igual a 5 e dezena igual a 1: (1 poss) x (1 poss) x (3 possib) = 3**

**Até agora temos 48 + 3 = 51 senhas. A 51ª será 514.**

**A próxima será 521. Logo, ocupa a 52ª posição.**

**3ª Questão**.

(UERJ) A tabela apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano. Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a **n**e no país Y igual a **p***.* A razão corresponde a:

a) 1 **b)** 2 c) 3 d) 6

**Solução. No país X temos que considerar todas as possibilidades de letras e números, mas como se misturam, há repetições nas permutações, por exemplo: MM3K99 e MMK399 onde se os M’s ou 9’s trocarem de lugar seriam contados duas vezes. Logo,** **.**

**No país Y as letras ficam sempre no mesmo bloco e os números também mantendo a posição LN. Logo,** **. Calculando a razão pedida, temos:**

**.**

**4ª Questão**.

(UERJ) Todas as ***n***capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga cada duas capitais. Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas de acordo com o mesmo critério. Determine o número ***n***de capitais, que existiam inicialmente nesse país.

**a)** 10 b) 11 c) 12 d) 13

**Solução. O número inicial de estradas é a combinação de n capitais duas a duas: C(n,2). Com a criação de duas capitais passamos a (n + 2) capitais. Esse acréscimo originou mais 21 estradas. O total de estradas é C(n+2,2). Logo, C(n+2,2) – C(n,2) = 21. Desenvolvendo, temos:**

**.**

**5ª Questão**.

(ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela Internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

**(A)**  B)  (C)  (D)  (E) 

**Solução. Analisando a situação, temos: .**

**6ª Questão**.

(ENEM) As embalagens dos produtos vendidos por uma empresa apresentam uma sequência formada por barras verticais: quatro de de largura 1,5 mm; três de largura 0,5 mm e duas de largura 0,25 mm como na figura abaixo. Cada sequência indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados por essas nove barras?

**a)** 1260 b) 1150 c) 930 d) 815 e) 536

**Solução. Considerando os tipos de larguras como X, L e Z, o número total de preçs será o número de permutações com repetição da sequência (XXXXLLLZZ).**

**.**

**7ª Questão**.

(FGV) Um sistema de código de barras tem extensão de 13 cm, e é composto por barras alternadas de cor branca ou preta, começando e terminando sempre por uma barra preta. Cada barra (branca ou preta) mede 1 ou 2 cm. A figura indica uma possibilidade de código nesse sistema. A leitura de código no sistema sempre é feita da esquerda para a direita. Calcule o total de códigos diferentes que podem ser formados nesse sistema.

**Solução. O número de barras deve ser ímpar, pois começa e termina com a barra preta. Considerando x o número de barras de 1 cm (simples) e y, o número de barras de 2 cm (duplas), temos que x + 2y = 13 e (x + y) é ímpar. Logo as opções são:**

**i) x = 1 e y = 2=> 1 + 2.6: permutação de SDDDDDD: .**

**ii) x = 5 e y = 4 => 5 + 2.4: permutação de SSSSSDDDD: .**

**iii) x = 9 e y = 2 => 9 + 2.2: permutação de SSSSSSSSSDD: .**

**iv) x = 13 e y = 0 => 13 + 2.0: permutação de SSSSSSSSSSSSS: .**

**Logo, são 7 + 126 + 55 + 1 = 189 possibilidades.**

**8ª Questão**.

(UERJ)Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas. Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel:



O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a **x** minutos e **y** segundos, sendo y < 60. Os valores respectivos de **x** e **y** são:

a) 4 e 12 **b)** 8 e 24 c) 25 e 12 d) 50 e 24

**Solução. Como há nove seções, considere as sequências AAVBBBBBB e AVVBBBBBB onde A = azul, V = vermelha e B = branca. O cálculo consiste em encontrar todas as permutações com repetição de cada sequência. Temos para um dos casos:** **.**

**Como são duas possibilidades, temos 252 x 2 = 504 formas de mudar a cor. Logo, serão feitas em 504 segundos ou 504 ÷ 60 = 8 minutos e 24 segundos.**

**9ª Questão.**

(ENEM) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura. O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

(A) 6. **(B)** 7. (C) 8. (D) 9. (E) 10.

**Solução. Analisando as opções, temos:**

**i) Fundo azul: 2 cores para a casa e 2 cores para a palmeira: 2 x 2 = 4;**

**ii) Fundo cinza: 3 cores para a casa e 1 cor para a palmeira: 3 x 1 = 3;**

**Logo, há 4 + 3 = 7 possibilidades de variação.**

**10ª Questão.**

(ENEM) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

a) 14. b) 12. c) 8. **d)** 6. e) 4.

**Solução. Analisando as opções, temos: PPBPP, PBBBP, PBPBP, BBPBB, BPPPB, BPBPB.**

**A operação pode ser representada por (2 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1) – (todas pretas) – (todas brancas) = 6.**

**11ª Questão.**

****(ENEM) Um artesão de joias tem a sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6 **b)** 12 c) 18 d) 24 e) 36

**Solução. Como a figura é um losango, as ordenações ABCD e ADCB correspondem á mesma escolha. Analisando as opções, temos:**

**i) A e C mesmas cores: 3 possibilidades.**

 **B e D cores iguais: 2 possibilidades. Logo, há 3 x 1 x 2 x 1 = 6 casos.**

**ii) A e C mesmas cores: 3 possibilidades.**

 **B e D cores diferentes: 2 possibilidades, mas como BD e DB não caracteriza outra figura, temos: 3 x 1 x (2 x 1) ÷ 2 = 3 casos.**

**ii) A e C cores diferentes: (3 x 2) ÷ 2 = 3 possibilidades, pois trocar A com C mantém a mesma figura.**

 **B e D tem que ter as mesmas cores: temos: 3 x 1 = 3 casos.**

**Logo, o total será 6 + 3 + 3 = 12.**

**12ª Questão.**

(ENEM) Claudia ganhou um porta-tempero giratório, com capacidade para doze temperos, divididos em dois níveis com a mesma quantidade de temperos, dispostos em roda.

Ela comprou, então, doze temperos diferentes para colocar em seu porta-tempero, um em cada pote. O número de maneiras distintas de Cláudia arrumar esses temperos é igual a:

a) 12! b)  **c)**  d)  e) 5!.6!

**Solução. Como a situação é circular, temos:**

**i) Forma de escolher as posições dos temperos em cada nível: .**

**OBS: Uma vez determinado os temperos de um nível os 6 restantes estão no outro nível.**

**ii) Efetuar a permutação circular dos temperos nos dois níveis: .**

**Pelo Princípio Multiplicativo, temos: .**

**13ª Questão.**

(UERJ) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação ao lado. Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos percorrendo **X** caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a ***d***. Sabendo que ***d***corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, **X** equivale a:

a) 20 **b)** 15 c) 12 d) 10

**Solução. Considere “C” para cima e “E” para esquerda. Qualquer um dos x caminhos menores caminhos possíveis é uma permutação (com elementos repetidos) da sequência do tipo: (C,C,E,E,E,E) ou (E, C, E, E, E, C). Logo, o total de caminhos é:** **.**

**14ª Questão.**

(Enem 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

**a)**  b)  c)  d)  e) 

**Solução 1. Pelo principio multiplicativo, a 1ª pessoa pode escolher 9 lugares, a 2ª escolhe 8 lugares, e assim até a 7ª pessoa escolher o restante.**

**Assim temos: 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 = .**

**Solução 2. São 9 lugares. Se forem utilizados 7 lugares, ficarão 2 vazios. Assim o número de formas de ocupação será a permutação com repetição (ABCDEFGOO): .**

**15ª Questão.**

(ENEM) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 **e)** 972

**Solução. Para resolver a questão precisamos supor que o examinador quer que sejam utilizadas as cores (quaisquer das cores) da bandeira nacional, não exatamente todas as 4 cores.**

**Pelo principio multiplicativo temos 4 x 35 = 972.**

**OBS: Para garantir que todas as 4 cores fossem utilizadas, o resultado seria 600. O cálculo seria: .**

**16ª Questão.**

(ENEM) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha e formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.

****

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, e feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) C(6,4) **b)** C(9,3) c) C(10,4) d) 64 e) 46

**Solução. São 10 carrinhos e pelo menos um dos carrinhos deve ser pintado com uma das quatro cores. Então, se já forem pintados 4 carrinhos, sobram seis carrinhos que para serem pintados. O número de formas de serem pintados é a combinação completa: .**

**17ª Questão.**

(UERJ) Uma turma de pós-graduação tem aulas às segundas, quartas e sextas, das 13h 30min às 15h e das 15h 30min às 17h. As matérias são Topologia, Equações Diferenciais e Combinatória, cada uma com duas aulas por semana, em dias diferentes. O número de modos diferentes de fazer o horário dessa turma é:

a) 268 **b)** 48 c) 36 d) 12 e ) 6

**Solução. São 3 dias com dois tempos cada, totalizando 6 tempos no total.**

**6 horários para escolher 2 tempos da 1ª disciplina: .**

**Como dois tempos não podem ser no mesmo dia, retiramos os 3 casos que podem ocorrer. Logo, há 12 possibilidades para a 1ª disciplina.**

**Para a 2ª disciplina temos 4 horários: .**

**Novamente temos que retirar dois casos:**

**i) Os dois tempos estão no mesmo dia em que tem 2 horários vagos;**

**ii) Os dois tempos estão no mesmo dia da 1ª disciplina. Isso não pode ocorrer, pois a terceira disciplina teria dois tempos no mesmo dia.**

**A terceira disciplina será preenchida de uma única forma.**

**Então a quantidade pedida na questão será: 12.4.1 = 48 maneiras**

**18ª Questão.**

(E.N.) O atual campeão carioca de futebol, Botafogo, possui escudo baseado em um pentagrama, conforme figuras abaixo.



O pentagrama é um polígono estrelado de 5 vértices, que podem ser igualmente distribuídos em uma circunferência (formando cinco arcos congruentes). O pentagrama, através de seus segmentos, determina 6 regiões internas, 5 triângulos e 1 pentágono. O pentágono é vizinho de todos os triângulos e não existem triângulos vizinhos entre si. Sendo assim, utilizando até 6 cores distintas (preto, branco, cinza, verde, amarelo e azul), de quantas maneiras essas regiões do pentagrama, conforme Figura 2, podem ser coloridas, de forma que não haja duas regiões vizinhas com cores iguais?

a) 720 b) 120 c) 6 480 d) 3 750 **e)** 3 774

**Solução. A estrela pode ser apresentada de 5 formas semelhantes por rotação devido à sua simetria. Veja um exemplo, mantendo a cor preta no pentágono, em que as cores das pontas, branca, cinza, verde, amarela e azul mantém essa ordem. Logo, todas as estrelas representam a mesma forma de pintar, com 5 visões diferentes.**



**Repare que se as pontas tiverem a mesma cor, não haverá 5 visões diferentes. Veja um exemplo mantendo a cor preta no pentágono, todas as pontas são verdes.**

****

**Para evitar contagem dupla, vamos retirar inicialmente o caso em que todas as pontas estão pintadas da mesma cor. Então Temos que para a cor central podemos escolher 6 cores e para cada uma das pontas podemos escolher 5 cores, já que podem ser iguais entre si, mas diferente da cor do pentágono. Logo, há 6.55 = 18 720 formas diferentes. Dentre essas as que não geram 5 visões são retiradas. Há 6.5 = 30 tipos.**

**Então como há 5 visões diferentes em (18 720 – 30) formas de pintar, temos que dividir esse resultado por 5. Logo, há** $\frac{18750-30}{5}=\frac{18 720}{5}= $**3 744 formas de pintar as regiões sem todas as pontas de mesma cor.**

**Acrescentando as 30 retiradas, temos: 3 744 + 30 = 3 774 formas de pintar as regiões do pentagrama.**