MATEMÁTICA NÍVEL MÉDIO COMPLETO
CONCURSO IBGE – 2016 – TÉCNICO EM INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS E ESTATÍSTICAS AI – Tipo 1 – BRANCA
(GABARITO COMENTADO - PROFESSOR EDU VICENTE)

36

As meninas Alice, Beatriz e Celia brincam na balança. Alice e Beatriz juntas pesam 100 kg, Alice e Celia juntas pesam 96 kg e Beatriz e Celia juntas pesam 108 kg.

Beatriz pesa:

(A) 48 kg;
(B) 50 kg;
(C) 52 kg;
(D) 54 kg;
(E) 56 kg.

SOLUCÃO:
Considere: Alice: “A” kg; Beatriz: “B” kg; Célia: “C” kg
A+B=100 (I)
A+C=96 (II)
B+C=108 (III)
Somando-se as três equações, (I) + (II) + (III), tem-se:
2A + 2B + 2C = 304
Dividindo os dois membros da igualdade por 2, temos:
A+B+C = 152
Como o problema pede o valor de B e, pela expressão (II), A+C=96, tem-se:
(A+C) + B = 152
96 + B = 152
B = 152 – 96
B = 56 kg
Opção correta: E

37

Considere a sequência infinita

IBGEGBIBGEGBIBGEG...

A 2016ª e a 2017ª letras dessa sequência são, respectivamente:

(A) BG;
(B) GE;
(C) EG;
(D) GB;
(E) BI.

SOLUÇÃO:
Cada ciclo de repetição tem 12 letras: IBGEGBIBGEGB**...............**IBGEGBIBGEG**BI**BGEGBIBGEGB
Como $2016 \div 12 = 168$ (resto zero), temos 168 ciclos completos até a 2016º letra. Assim, o 2016º da sequência é o último termo de um desses ciclos de 12 letras, ou seja, a letra **B.** Logo, o 2017º termo é o primeiro termo do próximo ciclo, ou seja, a letra I.
Opção correta: E

38

A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

(A) 15;

(B) 16;

(C) 18;

(D) 20;

(E) 24.

SOLUÇÃO:

G é diretamente a A

G é inversamente proporcional a B, logo G é diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$

Assim, G é diretamente proporcional a $A \times \frac{1}{B} \Rightarrow G = K \cdot A \cdot \frac{1}{B}$ (1)

Quando A=2B, G=10. Substituindo na equação (1) temos:

$$10 = K \cdot 2B \cdot \frac{1}{B}$$

$$10 = K \cdot \frac{2B}{B}$$

Dividindo numerador e denominador por B, temos:

$10 = K.2$

Assim:

$2k = 10 \Longrightarrow K = \frac{10}{2} \Longrightarrow$ K=5 (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$G = 5 \cdot A \cdot \frac{1}{B}$ (3)

Quando A = 144, B = 40. Substituindo na equação (3), temos:

$$G = 5 \cdot 144 \cdot \frac{1}{40} \Longrightarrow G = \frac{720}{40} \Longrightarrow G = 18$$

Opção correta: C

39

Sobre os números inteiros *w*, *x*, *y* e *z*, sabe-se que

$w > x > 2y > 3z$.

Se $z = 2$, o valor mínimo de *w* é:

(A) 6;

(B) 7;

(C) 8;

(D) 9;

(E) 10.

SOLUÇÃO:

w>x>2y>3z. Sendo w; x; y e z números inteiros. Como z = 2 então 3z = 6

Logo 2y > 3z ⟹ 2y > 6 ⟹ y > 3 ⟹ menor valor inteiro de y é 4, então 2y = 8.

Como w > x > 2y, temos w > x > 8. Como w e x são números inteiros, os menores valores possíveis são x = 9 e w = 10 (10 > 9 > 8). Logo, valor mínimo de w é 10.

Opção correta: E

40

A distância da Terra ao Sol é de 150 milhões de quilômetros e esse valor é chamado de "1 unidade astronômica" (1UA). A estrela Sírius, a mais brilhante do céu, está a 81 trilhões de quilômetros do Sol.

A distância de Sírius ao Sol em UA é:

(A) 5.400;

(B) 54.000;

(C) 540.000;

(D) 5.400.000;

(E) 54.000.000.

SOLUÇÃO:

150 milhões de km = 1 unidade astronômica

Para saber quanto é a distância 81 trilhões km em unidades astronômicas temos que saber quantas vezes 150 milhões de km cabem dentro de 81 trilhões de km, ou seja, basta dividir 81 trilhões por 150 milhões.

Assim:

$81\ trilhões\ km = 81 \times 10^{12}\ km$

$150\ milhões\ km = 150 \times 10^{6}\ km = 15 \times 10^{7}\ km$

Assim:

$81 \times 10^{12}\ km \div 15 \times 10^{7}\ km$ = $5{,}4 \times 10^{5}\ unidades\ astronômicas$ = $540.000\ unidades\ astronômicas$

Opção correta: C

41

Um segmento de reta de comprimento C é dividido em cinco partes iguais, e a segunda e a quarta partes são retiradas. A seguir, cada uma das partes restantes é também dividida em cinco partes iguais, e as segundas e as quartas partes são retiradas. A soma dos comprimentos das partes restantes é:

(A) $\frac{9C}{25}$;

(B) $\frac{8C}{25}$;

(C) $\frac{6C}{25}$;

(D) $\frac{4C}{5}$;

(E) $\frac{3C}{5}$.

SOLUÇÃO:

Comprimento C dividido em 5 partes. Cada parte mede $\frac{C}{5}$

Se retirarmos as segunda e a quarta partes, ou seja, ao retiramos DUAS PARTES DAS 5 PARTES, sobram:

$$\frac{5C}{5} - \frac{2C}{5} = \frac{3C}{5} = 3 \times \frac{C}{5} \ (1)$$

Cada uma das três partes ($\frac{C}{5}$) restantes é também dividida em 5 partes. Assim cada parte será dividida por 5, ou seja,

$$\frac{C}{5} \div 5 = \frac{C}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{C}{25}$$

Ao retiramos as segundas e quartas partes, ou seja, ao retiramos DUAS PARTES DAS 5 PARTES, sobram:

$$\frac{5C}{25} - \frac{2C}{25} = \frac{3C}{25} \ (2)$$

Como são três partes , temos, substituindo (2) em (1) $\rightarrow 3 \times \frac{3C}{25} = \frac{9C}{25}$

Opção correta: A

42

Uma loja de produtos populares anunciou, para a semana seguinte, uma promoção com desconto de 30% em todos os seus itens. Entretanto, no domingo anterior, o dono da loja aumentou em 20% os preços de todos os itens da loja.

Na semana seguinte, a loja estará oferecendo um desconto real de:

(A) 10%;
(B) 12%;
(C) 15%;
(D) 16%;
(E) 18%.

SOLUÇÃO:

Considere "P" como preço inicial de um item. Com um aumento de 20%, o novo valor do item fica multiplicado por 1,2 (100%+20%=120% = $\frac{120}{100} = 1{,}2$).

Com o desconto de 30%, o novo valor do item fica multiplicado por 0,7 (100% - 30% = 70% = $\frac{70}{100} = 0{,}7$).

Assim: $P, com\ o\ aumento\ de\ 20\% \rightarrow 1{,}2 \times P. Com\ o\ desconto\ de\ 30\% \rightarrow 0{,}7 \times 1{,}2 \times P = 0{,}84 \times P$,
ou seja, o novo preço é 84% do que era antes. **Logo, o desconto real é de $\mathbf{100\% - 84\% = 16\%}$.**

Obs.1: Na verdade, por esse processo, o problema é resolvido usando apenas duas multiplicações e uma subtração:

$$\mathbf{1,2 \times 0,7 = 0,84 = 84\%\ \textit{do preço inicial} \rightarrow \textit{Desconto de}\ 100\% - 84\% = 16\%\ \textit{de desconto}}$$

Obs.2: Como é uma prova de múltipla escolha, podemos particularizar a solução.
Considere um preço inicial de 100 reais.
Aumento de 20%: $20\%\ de\ 100 = 0{,}2 \times 100 = 20\ reais.\ \ Novo\ valor: 100 + 20 = 120\ reais.$
Desconto de 30%: $30\%\ de\ 120 = 0{,}3\ \times 120 = 36\ reais. Novo\ valor\ 120 - 36 = 84\ \ reais.$
Assim, o item que custava 100 reais passou a custar 84 reais, ou seja, desconto real de 16 reais.
16 reais em 100 é um **desconto real de 16%.**
Opção correta:D

43

Rubens percorreu o trajeto de sua casa até o trabalho com uma determinada velocidade média.

Rubinho, filho de Rubens, percorreu o mesmo trajeto com uma velocidade média 60% maior do que a de Rubens.

Em relação ao tempo que Rubens levou para percorrer o trajeto, o tempo de Rubinho foi:

(A) 12,5% maior;
(B) 37,5% menor;
(C) 60% menor;
(D) 60% maior;
(E) 62,5% menor.

SOLUÇÃO:

$$Rubens: velocidade\ V; tempo\ T$$
$$Rubinho: velocidade\ 1{,}6V; tempo\ x$$

(obs.: com um aumento de 60%, a velocidade de Rubinho fica multiplicada por 1,6 (vide questão 42 dessa prova))
Como as grandezas são inversamente proporcionais, ou seja, quanto maior a velocidade, menor o tempo de percurso, temos que inverter uma das razões na proporção. Assim:

$$\frac{V}{1{,}6V} = \frac{x}{T} \Longrightarrow \frac{1}{1{,}6} = \frac{x}{T} \Longrightarrow 1{,}6x = T \Longrightarrow x = \frac{T}{1{,}6} \Longrightarrow x = 0{,}625T \Longrightarrow x = 62{,}5\%T$$

Então, o tempo de Rubinho corresponde a 62,5% do tempo do pai, ou seja, $100\% - 62{,}5\% = \boldsymbol{37{,}5\%\ menor}$
Opção correta: B

44

Uma senha de 4 símbolos deve ser feita de forma a conter dois elementos distintos do conjunto {A, B, C, D, E} e dois elementos distintos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5}, em qualquer ordem. Por exemplo, a senha 2EC4 é uma das senhas possíveis.

Nesse sistema, o número de senhas possíveis é:

(A) 2400;

(B) 3600;

(C) 4000;

(D) 4800;

(E) 6400.

SOLUÇÃO:
Considere Letra como "**L**" e Algarismo como "**A**"
Temos 5 letras, $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\}$ e 6 algarismos, $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$
Senha deve ter 2 letras e 2 algarismos, como por exemplo 2EC4, ou seja, essa senha é uma sequência (**A,L,L,A**).
Assim cada senha é uma sequência do tipo (**L,L,A,A**) em qualquer ordem, sem repetição, uma vez que são elementos distintos.
Número de sequências (**L,L,A,A**) nessa ordem:
$5 \times 4 \times 6 \times 5 = 600\ sequências, nessa\ ordem, primeiro\ duas\ letras\ e\ depois\ dois\ algarismos.$
Para cada uma dessas 600 sequências, podemos permutar a ordem (**L,L,A,A**), ou seja, permutação de 4 elementos com dois elementos iguais a **L** e dois elementos iguais a **A.** $(\boldsymbol{P_4^{2,2}})$
Usando-se a fórmula de permutações com elementos repetidos:

$$\boldsymbol{P_4^{2,2}} = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{2! \times 2!}} = \frac{\mathbf{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\mathbf{2 \times 1 \times 2 \times 1}} = \mathbf{6}\ \boldsymbol{permutações\ da\ sequência}\ (\mathbf{L, L, A, A})$$

Assim, o total de senhas é:
$6 \times 600 = \mathbf{3600}\ \boldsymbol{senhas\ possíveis}$
Opção correta: B

45

Quando contamos os números pares em ordem crescente de 1000 até 2500, o número 2016 ocupa a 509ª posição.

Quando contamos os números pares em ordem decrescente de 2500 até 1000, o número 2016 ocupa a posição:

(A) 240;

(B) 241;

(C) 242;

(D) 243;

(E) 244.

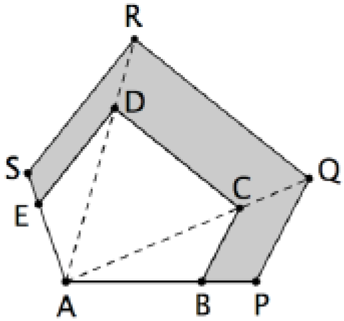
SOLUÇÃO:
Ordem decrescente: (2500; 2498; 2496; ....; 2016; ....; 2000)
A sequência é uma Progressão Aritmética (P.A) cujo primeiro termo **a1 = 2500** e a razão **r = 2498 - 2500 = - 2**
O termo geral da PA é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \times r}$
Como é pedida a posição do número 2016, vamos fazer $\boldsymbol{a_n = 2016}$**,** assim:

$$\mathbf{2016 = 2500 + (\boldsymbol{n} - 1) \times (-2)}$$
$$\mathbf{2 \times (\boldsymbol{n} - 1) = 2500 - 2016}$$

$$2 \times (n-1) = 484$$
$$(n-1) = \frac{484}{2}$$
$$n - 1 = 242$$
$$n = 243$$
Opção correta: D

46

O pentágono ABCDE tem área de 125 m^2. Esse pentágono foi ampliado a partir do vértice A, como mostra a figura a seguir, transformando-se no pentágono APQRS cujos lados PQ, QR e RS são, respectivamente, paralelos aos lados BC, CD e DE do pentágono original.



Se AB = 10 m e BP = 2 m , a área da região sombreada na figura é, em m^2:

(A) 55;

(B) 64;

(C) 72;

(D) 75;

(E) 80.

SOLUÇÃO:

Os triângulos ADC e ARQ são semelhantes

A razão de semelhança é $K = \frac{AB}{AP}$

Como AB = 10 m e BP = 2 m, então AP = 12.

Assim a razão de semelhança é $K = \frac{AB}{AP} = \frac{10}{12}$.

Dividindo-se numerador e denominador por 2, temos:

$K = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, que é a mesma razão de semelhança dos pentágonos ABCDE e APQRS.

É dado que a área do pentágono ABCDE é igual a 125 m^2, e é sabido que a razão de semelhança entres as áreas é K^2.

Assim:

$$\frac{Área(ABCDE)}{ÁREA(APQRS)} = K^2$$
$$\frac{125\ m^2}{ÁREA(APQRS)} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\frac{125\ m^2}{ÁREA(APQRS)} = \frac{25}{36}$$
$$ÁREA(APQRS) = \frac{36 \times 125\ m^2}{25}$$

$$(APQRS) = \ 180\ m^2$$

Logo, a área sombreada = ÁREA(APQRS) – ÁREA(ABCDE) = $180\ m^2 - \ 125\ m^2 = 55m^2$

Opção correta: A

47

Lucas foi a uma feira de jogos levando 45 cartas vermelhas e 45 cartas azuis. Em um quiosque ele pode trocar duas cartas vermelhas por uma carta dourada e uma carta azul. Em outro quiosque ele pode trocar três cartas azuis por uma carta dourada e uma carta vermelha.

Lucas fez todas as trocas possíveis para conseguir o máximo de cartas douradas.

O número de cartas douradas que Lucas conseguiu com as trocas foi:

(A) 59;

(B) 60;

(C) 61;

(D) 62;

(E) 63.

SOLUÇÃO:

Quiosque 1:

DUAS CARTAS VERMELHAS ↔ UMA CARTA DOURADA E UMA CARTA AZUL

Quiosque 2:

TRÊS CARTAS AZUIS ↔ UMA CARTA DOURADA E UM CARTA VERMELHA.

Como 45 é múltiplo de 3, Lucas começa pelo quiosque 2 para não sobrar cartas.

45 AZUIS ÷ 3 = 15 GRUPOS DE 3 CARTAS AZUIS ↔ **15 DOURADAS (1)** E 15 VERMELHAS.

Juntando as 15 cartas vermelhas adquiridas agora com as 45 vermelhas que tinha anteriormente, Lucas agora tem 15+45= 60 cartas vermelhas.

Lucas vai agora para o quiosque 1.

60 VERMELHAS ÷ 2 = 30 GRUPOS DE DUAS CARTAS VERMELHAS ↔ **30 DOURADAS (2)** E 30 AZUIS.

Lucas volta ao quiosque 2 com as 30 cartas azuis.

30 AZUIS ÷ 3 = 10 GRUPOS DE 3 CARTAS AZUIS ↔ **10 DOURADAS (3)** E 10 VERMELHAS.

Lucas volta ao quiosque 1 com as 10 cartas vermelhas.

10 VERMELHAS ÷ 2 = 5 GRUPOS DE 2 CARTAS VERMELHAS ↔ **5 DOURADAS (4)** E 5 AZUIS.

Lucas volta ao quiosque 2 com 5 cartas azuis. Mas, obviamente, usará 3 e descartará as outras duas.

3 AZUIS ↔ **1 DOURADA (5)** E 1 VERMELHA.

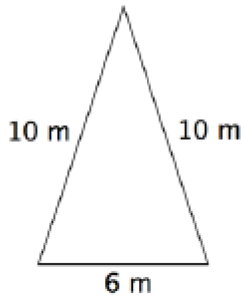
O total de cartas douradas conseguidas com as trocas é **(1) + (2) + (3) + (4) + (5), ou seja**

15 + 30 + 10 + 5 + 1 = 61 cartas douradas.

Opção correta: C

48

Uma pirâmide regular é construída com um quadrado de 6 m de lado e quatro triângulos iguais ao da figura abaixo.



O volume dessa pirâmide em m^3 é aproximadamente:

(A) 84;

(B) 90;

(C) 96;

(D) 108;

(E) 144.

obs.

VOLUME DA PIRÂMIDE

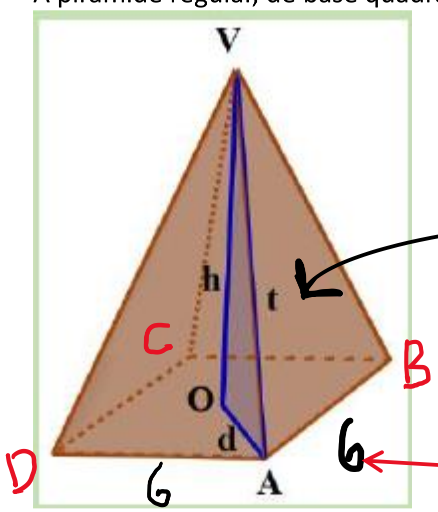
$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}$$

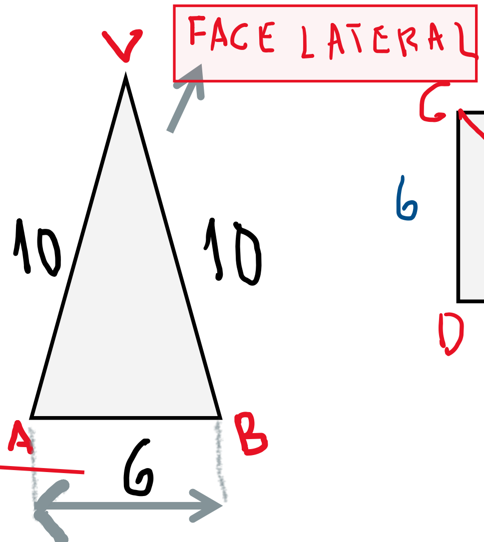
$A_b \to$ ÁREA DA BASE

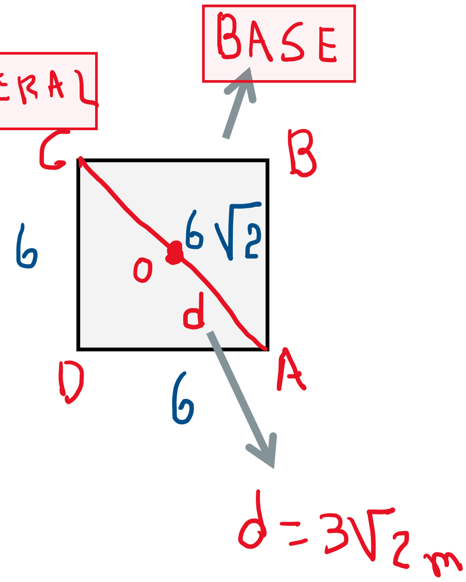
$h \to$ ALTURA

SOLUÇÃO:

A pirâmide regular, de base quadrada, está representada na figura a seguir:







Cálculo da altura "h"

"t" = 10 m porque é o lado VA do triângulo isósceles VAB, que forma a face lateral da pirâmide (vide a figura fornecida no enunciado do problema)

"d" é a metade da diagonal AC do quadrado ABCD que forma a base da pirâmide. O lado desse quadrado mede 6 m porque ele é o lado AB do triângulo isósceles VAB, que forma a face lateral da pirâmide.

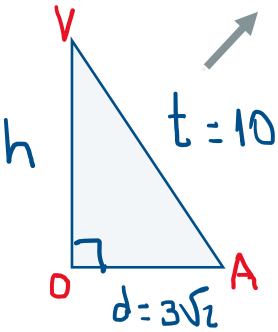
A diagonal do quadrado de lado "L" é dada pela fórmula $Diagonal = L \times \sqrt{2}$

Assim, a diagonal AC do quadrado ABCD é: $Diagonal = 6 \times \sqrt{2}$ ou seja $6\sqrt{2}$ m e o valor de **"d" é igual a $3\sqrt{2}$ m**.

Pelo teorema de Pitágoras: $t^2 = h^2 + d^2$

Com **t = 10m e d = $3\sqrt{2}$ m** $\Longrightarrow 10^2 = h^2 + (3\sqrt{2})^2 \Longrightarrow 100 = h^2 + 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \Longrightarrow 100 = h^2 + 18 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow h^2 = 100 - 18 \Longrightarrow h^2 = 82 \Longrightarrow h = \sqrt{82} \Longrightarrow h \cong 9$ m



Cálculo da Área da base (Área do quadrado ABCD)

$A_b = (6\,m)^2 = 36m^2$

Logo, o **volume da pirâmide** é:

$V = \frac{1}{3} \cdot 36\,m^2 \cdot 9m \Longrightarrow \boldsymbol{V = 108m^3}$

Opção correta: D

49

Cinco pessoas estão sentadas em cinco cadeiras em linha, cada uma com uma moeda na mão. As moedas são todas bem equilibradas, de modo que a probabilidade de sair cara ou coroa em cada uma delas é $\frac{1}{2}$. Em um determinado momento, as cinco pessoas jogam suas respectivas moedas. Aquelas que obtiverem cara continuam sentadas, e as que obtiverem coroa levantam-se.

Após esse procedimento, a probabilidade de que NÃO haja duas pessoas adjacentes, ambas sentadas ou ambas de pé, é de:

(A) $\frac{1}{2}$;

(B) $\frac{1}{8}$;

(C) $\frac{1}{16}$;

(D) $\frac{3}{32}$;

(E) $\frac{5}{32}$.

Solução:
Considere K → CARA (A pessoa continua sentada) e C → COROA (A pessoa se levanta).

Para que NÃO haja duas pessoas adjacentes, ambas sentadas ou ambas em pé, após lançamento das moedas, somente duas sequências são possíveis:
Sequência 1: (K; C; K; C; K) **ou** Sequência 2: (C; K; C; K; C)

Probabilidade da Sequência 1:
$$P(sequência\ 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Probabilidade da Sequência 2 :
$$P(sequência\ 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Logo, a probabilidade de ocorrer a sequência 1 **OU** a sequência 2 é dada pela **SOMA** das probabilidades de cada uma das sequências. Assim:
$$P(sequência\ 1\ ou\ sequência\ 2) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{2}{32}$$
Dividindo-se numerador e denominador por 2, temos:
$$\boldsymbol{P(sequência\ 1\ ou\ sequência\ 2) = \frac{1}{16}}$$

Opção correta: C

50

Duas grandezas positivas X e Y são tais que, quando a primeira diminui de 1 unidade, a segunda aumenta de 2 unidades. Os valores iniciais dessas grandezas são $X = 50$ e $Y = 36$. O valor máximo do produto $P = XY$ é:

(A) 2312;
(B) 2264;
(C) 2216;
(D) 2180;
(E) 2124.

Solução:
Quando x diminui uma unidade, y aumenta 2 unidades. Assim, se tivermos "n" diminuições de uma unidade em x, y aumentará "2n" unidades. Sendo os valores iniciais , x = 50 e y = 36, temos:
$X = 50 - n$ e $Y = 36 + 2n$
Substituindo os valores de X e Y em $P = X.Y$, temos:

$P = (50 - n) \cdot (36 + 2n) \Longrightarrow P = 180 + 100n - 36n - 2n^2 \Longrightarrow P = -2n^2 + 64n + 180$
P é uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$; com a = −2; b = 64 e c = 180.
Quando a < 0, a função quadrática possui valor máximo, e esse valor ocorre quando $x = -\frac{b}{a}$
Assim, o valor máximo de P ocorre para $n = -\frac{b}{a} = -\frac{64}{2\cdot(-2)} = -\frac{64}{-4} = 16$
Para n = 16
$X = 50 - 16 \Longrightarrow X = 34$
$Y = 36 + 2n \Longrightarrow Y = 36 + 2 \cdot 16 \Longrightarrow Y = 36 + 32 \Longrightarrow Y = 68$
Logo, o valor máximo de P=XY é $P = 34 \times 68 \Longrightarrow \boldsymbol{P = 2312}$

Opção correta: A