COLÉGIO PEDRO II - CAMPUS SÃO CRISTÓVÃO III
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA – Prof.ª MARIA HELENA M. M. BACCAR
REVISÕES DO ENSINO FUNDAMENTAL

www.professorwaltertadeu.mat.br

Lista 5 – Equações do 2º Grau - GABARITO

1. Resolva as equações:

Solução. Utilizando a fórmula $\begin{array}{|l|}\hline Equação: ax^2+bx+c=0 \\ Solução: x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \hline\end{array}$**, temos:**

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.(2).(-3)}}{2.(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm 7}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}\\ x_2=\dfrac{5+7}{4}=\dfrac{12}{4}=3\end{cases}.$$

$$S=\left\{-\frac{1}{2},3\right\}$$

b) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4.(-2).(5)}}{2.(-2)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{-4}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{-4}=\frac{-3\pm 7}{-4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3-7}{-4}=\dfrac{-10}{-4}=\dfrac{5}{2}\\ x_2=\dfrac{-3+7}{-4}=\dfrac{4}{-4}=-1\end{cases}.$$

$$S=\left\{-1,\frac{5}{2}\right\}$$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

Solução 1. Observe que essa equação corresponde ao trinômio quadrado perfeito.

$$x^2-4x+4=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2\rightarrow duas\ raízes\ iguais.$$
$$S=\{2\rightarrow dupla\}.$$

Obs: Repare que apesar de terminar com x = 2, a equação é do 2º grau. Logo, terá duas raízes iguais a 2. Não é usual colocar S = {2, 2}, então usa-se a palavra dupla.

Solução 2. Usando a fórmula.

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.(1).(4)}}{2.(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4}{2}=2.$$
$$S=\{2\rightarrow dupla\}$$

d) $x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 4,5 = 0$

$$x=\frac{-3\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-4.(1).(4,5)}}{2.(1)}=\frac{-3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-18}}{2}=\frac{-3\sqrt{2}\pm 0}{2}=\frac{-3\sqrt{2}}{2}.$$

$$S=\left\{\frac{-3\sqrt{2}}{2}\rightarrow dupla\right\}$$

e) 4x − x(x − 4) = −9

Solução 1. Utilizando a fórmula.

$$i)\ 4x-.(x-4)=-9\Rightarrow 4x-x^2+4x=-9\Rightarrow -x^2+8x+9=0$$

$$ii)\ x=\frac{-8\pm\sqrt{(8)^2-4.(-1).(9)}}{2.(-1)}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{-2}=\frac{-8\pm 10}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-8-10}{-2}=\dfrac{-18}{-2}=9\\ x_2=\dfrac{-8+10}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1\end{cases}$$

$$S=\{-1,9\}$$

Solução 2. Utilizando a fatoração.

$$i)\ 4x-.(x-4)=-9\Rightarrow 4x-x^2+4x=-9\Rightarrow -x^2+8x+9=0\Rightarrow x^2-8x-9=0$$

$$ii)\ (x-9).(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-9=0\Rightarrow x_1=9\\ x+1=0\Rightarrow x_2=-1\end{cases}$$

$$S=\{-1,9\}$$

2. Se **x** é um número real positivo e se o inverso de x + 1 é x − 1, determine o valor de **x**.

Solução. Utilizando o conceito de inverso, temos:

$$i)\begin{cases}Inverso\ de\ (x+1)=\dfrac{1}{x+1}\\ Inverso\ de\ (x+1)=x-1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x+1}=x-1\Rightarrow(x+1).(x-1)=1\Rightarrow x^2-1=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{2}\\ x_2=-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$ii)\ Como\ x>0\ (positivo)\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

3. Determine a relação entre **a** e **b** para que a equação $\frac{b^2}{2}(x^2+1)+ax=0$ não possua raiz real.

Solução. Para que a equação não possua raiz real o discriminante deve ser negativo.

$$i)\ \frac{b^2}{2}.(x^2+1)+ax=0\Rightarrow\frac{b^2}{2}x^2+\frac{b^2}{2}+ax=0\Rightarrow\frac{b^2}{2}x^2+ax+\frac{b^2}{2}=0$$

$$ii)\ \Delta=a^2-4.\left(\frac{b^2}{2}\right).\left(\frac{b^2}{2}\right)=a^2-\frac{4.b^2}{4}=a^2-b^2$$

$$iii)\ \Delta<0\Rightarrow a^2-b^2<0\Rightarrow a^2<b^2\Rightarrow a^2<b^2\Rightarrow a<b$$

Verificação. Escolhendo valores de <u>a</u> menores que <u>b</u>, a condição será satisfeita.

Exemplo: a = 1 e b = 2:

$$i)\ \frac{2^2}{2}.(x^2+1)+(1).x=0\Rightarrow\frac{4}{2}x^2+x=0\Rightarrow 2x^2+x=0$$

$$ii)\ \Delta=1^2-4.(2).(0)=1-8=-7<0\rightarrow\sqrt{-7}\notin IR$$

4. Determine o valor de **m** para que o produto das raízes da equação $5x^2 - 8x + 2m - 1 = 0$ seja igual a 20.

Solução. Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos: $\begin{array}{l}Soma\ (raízes)=-\dfrac{b}{a}\\ Produto\ (raízes)=\dfrac{c}{a}\end{array}$. **Temos:**

$$i)\ 5x^2-8x+2m-1=0\Rightarrow Produto\ (raízes)=\frac{2m-1}{5}$$

$$ii)\ \frac{2m-1}{5}=20\Rightarrow 2m-1=100\Rightarrow 2m=100+1\Rightarrow m=\frac{101}{2}$$

5. Determine **m** para que a equação $3x^2 + (5m - 2)x + m - 1 = 0$ admita raízes simétricas.

Solução. Se as raízes são simétricas, a soma delas é nula. Temos:

$$i)\ 3x^2 + (5m-2)x + m - 1 = 0$$
$$ii)\ Soma\ (raízes) = -\frac{b}{a} \Rightarrow Soma\ (raízes) = -\frac{5m-2}{3}$$
$$iii)\ Raízes\ simétricas \to Soma = 0 \Rightarrow -\frac{5m-2}{3} = 0 \Rightarrow 5m - 2 = 0 \Rightarrow 5m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$$

6. Determine a média aritmética das raízes da equação $x^2 - (p - m)x + 3p - 4m = 0$.

Solução. A média aritmética das raízes será a metade da soma das raízes:

$$i)\ \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-\dfrac{2b}{2a}}{2} = -\frac{2b}{4a} = -\frac{b}{2a}$$
$$ii)\ x^2 - (p-m)x + 3p - 4m = 0 \Rightarrow M_{aritmética} = -\frac{-(p-m)}{2.(1)} = \frac{p-m}{2}$$

7. Determine os valores de **k** para os quais a equação $(2k - 3)x^2 - (5k + 6)x + k + 4 = 0$.

a) Tenha raízes simétricas.

Solução. Se as raízes são simétricas, a soma delas é nula. Temos:

$$i)\ (2k-3)x^2 - (5k+6)x + +k + 4 = 0$$
$$ii)\ Soma\ (raízes) = -\frac{b}{a} \Rightarrow Soma\ (raízes) = -\frac{-(5k+6)}{2k-3} = \frac{5k+6}{2k-3}$$
$$iii)\ Raízes\ simétricas \to Soma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5k+6}{2k-3} = 0 \\ 2k-3 \neq 0 \to deno\min ador \end{cases} \Rightarrow 5k + 6 = 0 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$$

b) Tenha uma só raiz nula.

Solução. Se x = 0 é uma solução e somente ela é nula, a equação é da forma $ax^2 + bx = 0$. Isto é, c = 0.

$$i)\ (2k-3)x^2 - (5k+6)x + +k + 4 = 0$$
$$ii)\ c = 0 \Rightarrow k + 4 = 0 \Rightarrow k = -4$$

8. Determine o valor de **m** de modo que o número 3 seja uma das raízes da equação $2x^2 - (4m + 1)x - m + 2 = 0$.

Solução. Se x = 3 é uma solução, a equação se anula para x = 3.

$$i)\ 2x^2 - (4m+1)x - m + 2 = 0$$
$$ii)\ x = 3\ é\ solução \Rightarrow 2.(3)^2 - (4m+1).(3) - m + 2 = 0 \Rightarrow 2.(9) - 12m - 3 - m + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 18 - 13m - 1 = 0 \Rightarrow -13m = -17 \Rightarrow m = \frac{17}{13}$$

9. Determine a equação do 2º grau cujas raízes são:

Solução. Considerando a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde S = soma das raízes e P o produto das raízes, temos:

a) 6 e –4: $\begin{cases} Soma: 6+(-4)=2 \\ Produto: (6).(-4)=-24 \end{cases} \Rightarrow Equação: x^2-2x-24=0$.

b) 4 + √3 e 4 − √3: $\begin{cases} Soma: (4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})=8 \\ Produto: (4+\sqrt{3}).(4-\sqrt{3})=16-3=13 \end{cases} \Rightarrow Equação: x^2-8x+13=0$.

c) $\frac{3}{5}$ e -2: $\begin{cases} Soma: \left(\frac{3}{5}\right)+(-2)=\frac{3-10}{5}=-\frac{7}{5} \\ Produto: \left(\frac{3}{5}\right).(-2)=-\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow Equação: x^2+\frac{7}{5}x-\frac{6}{5}=0$.

10. Resolva a equação $x^2 - 3kx + 2k^2 = 0$.

Solução 1. Por fatoração, temos:

$$x^2-3kx+2k^2=0 \Rightarrow (x-k).(x-2k)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-k=0 \Rightarrow x_1=k \\ x-2k=0 \Rightarrow x_2=2k \end{cases}.$$

$$S=\{k,\ 2k\}$$

Solução 2. Utilizando a fórmula.

$$i)\ x^2-3kx+2k^2=0$$

$$ii)\ x=\frac{-(-3k)\pm\sqrt{(3k)^2-4.(1).(2k^2)}}{2.(1)}=\frac{3k\pm\sqrt{9k^2-8k^2}}{2}=\frac{3k\pm\sqrt{k^2}}{2}=\frac{3k\pm k}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{3k-k}{2}=\frac{2k}{2}=k \\ x_2=\frac{3k+k}{2}=\frac{4k}{2}=2k \end{cases}.$$

$$S=\{k,\ 2k\}$$

11. Ao se inscrever para participar de uma feira, um expositor recebeu a informação de que seu stand deveria ocupar uma área de 21,25 m^2, ter formato retangular e perímetro igual a 22 m. Se o expositor prefere a frente estreita para ter mais profundidade no stand, determine as dimensões do stand.

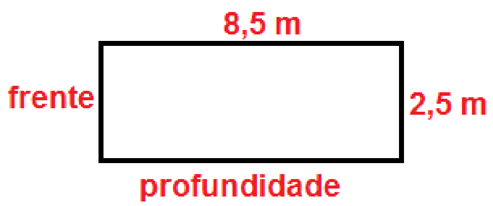
Solução. Considere as dimensões como <u>x</u> e <u>y</u>. Considerando os conceitos de perímetro e área, temos:

$$i)\begin{cases} Perímetro=2x+2y \\ Perímetro=22 \end{cases} \Rightarrow 2x+2y=22 \Rightarrow x+y=11 \Rightarrow y=11-x$$

$$ii)\begin{cases} Área=x.y=x.(11-x) \\ Área=21{,}25 \end{cases} \Rightarrow -x^2+11x=21{,}25 \Rightarrow -x^2+11x-21{,}25=0$$

$$iii)\ x=\frac{-11\pm\sqrt{(11)^2-4.(-1).(-21{,}25)}}{2.(-1)}=\frac{-11\pm\sqrt{121-85}}{-2}=\frac{-11\pm\sqrt{36}}{-2}=\frac{-11\pm 6}{-2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{-11-6}{-2}=8{,}5 \\ x_2=\frac{-11+6}{-2}=2{,}5 \end{cases}.$$

$$iv)\begin{cases} Frente=2{,}5\,m \\ Profundidade=8{,}5\,cm \end{cases}$$



12. Numa turma de pré-vestibular havia 50 pessoas entre homens e mulheres. Descubra quantos homens e quantas mulheres estavam presentes, sabendo que o produto das quantidades dos dois grupos é 621 e que a quantidade de mulheres é maior que a quantidade de homens.

Solução. Considere as quantidades como <u>x</u> e <u>y</u>. Temos:

$$i)\ x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$$

$$ii)\ x.y = 50 \Rightarrow x.(50 - x) = 621 \Rightarrow -x^2 + 50x - 621 = 0$$

$$iii)\ x = \frac{-(50) \pm \sqrt{(50)^2 - 4.(-1).(-621)}}{2.(-1)} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 2484}}{-2} = \frac{-50 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-50 \pm 4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-50-4}{-2} = 27 \\ x_2 = \dfrac{-50+4}{-2} = 23 \end{cases}$$

$$iv) \begin{cases} Mulheres = 27 \\ Homens = 23 \end{cases}$$

13. Uma embalagem comporta bolas de tênis em linhas e colunas, uma do lado da outra sem sobreposição. Em cada coluna cabem 4 bolas a menos que em cada linha. Se essa caixa comporta um total de 96 bolas determine o número bolas em cada linha e em cada coluna.

Solução. O número de bolas em cada linha será <u>x</u> e o número de bolas em cada coluna será (x – 4). O produto dessas quantidades será 96. Temos:

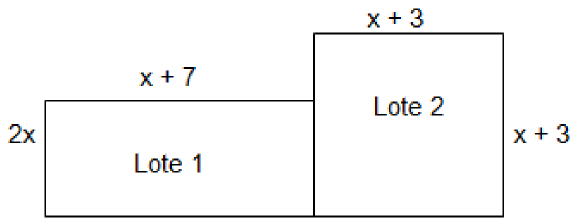
$$i)\ x.(x-4) = 96 \Rightarrow x^2 - 4x - 96 = 0$$

$$ii)\ x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(1).(-96)}}{2.(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 384}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{4 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4-20}{2} = -8 < 0 \\ x_2 = \dfrac{4+20}{2} = 12 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} Linhas = 12\ bolas \\ Colunas = 8\ bolas \end{cases}$$

14. O Sr. Guimarães tem um sítio e quer dividi-lo em dois lotes para presentear seus filhos Glória e Afonso. Os lotes e suas dimensões estão representados na figura abaixo:

Glória ficará com o lote 1 e Afonso com o lote 2. Os lotes, apesar das dimensões diferentes, terão a mesma área. Calcule as dimensões do lote de Glória.

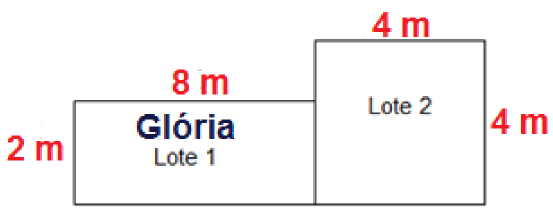


Solução. Igualando as áreas, temos:

$$i)\ 2x.(x+7) = (x+3)^2 \Rightarrow 2x^2 + 14x = x^2 + 6x = 9 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$ii)\ x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4.(1).(-9)}}{2.(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8-10}{2} = -9 < 0 \\ x_2 = \dfrac{-8+10}{2} = 1 \end{cases}$$

$$iii)\ Glória : Lote\,1 = \begin{cases} 2.(1) = 2 \\ 1 + 7 = 8 \end{cases}$$



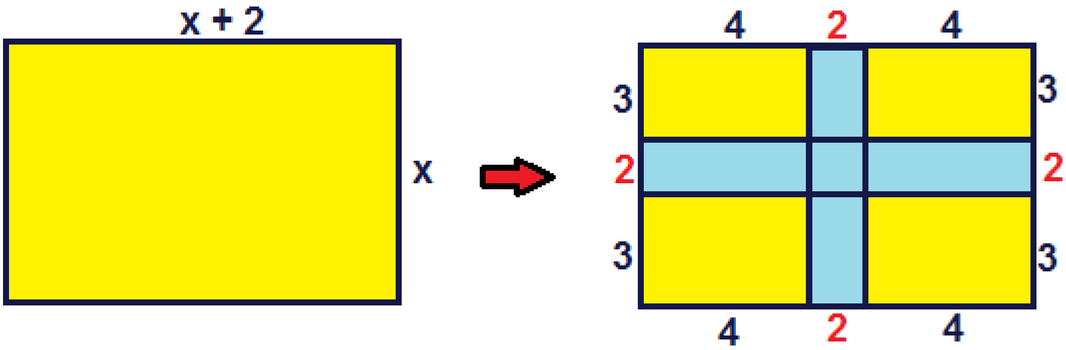
15. Em certa cidade há um terreno de formato retangular de 80 m^2 de área, em que um lado tem 2 m a mais que o outro. O prefeito da cidade pretende construir nesse terreno uma praça, fazendo ainda duas passarelas perpendiculares que dividirão a praça em quatro retângulos congruentes. Qual será a área ocupada pelas passarelas se elas tiverem 2 m de largura.

Solução. As dimensões da praça serão: x e x + 2. Temos:

$$i)\ x.(x+2)=80 \Rightarrow x^2+2x-80=0$$

$$ii)\ x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4.(1).(-80)}}{2.(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+320}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-2\pm18}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-2-18}{2}=-10<0\\ x_2=\dfrac{-2+18}{2}=8\end{cases}$$

$$iii)\begin{cases}Lado\ maior=10\\ Lado\ maior=8\end{cases}$$



A área ocupada pelas passarelas será:

1ª forma: (2 x 3) + (2 x 3) + (2 x 4) + (2 x 4) + (2 x 2) = 6 + 6 + 8 + 8 + 4 = 12 + 16 + 4 = 32 m^2.

2ª forma: (2 x 8) + (2 x 10) – (2 x 2) = 16 + 20 – 4 = 32 m^2.

3ª forma: 80 – 4 x (4 x 3) = 80 – 4 x 12 = 80 – 48 = 32 m^2.