QUESTÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS DO ITA DE 1974 A 2017

ENUNCIADOS

1) (ITA 1974) Seja z_k um número complexo, solução da equação $(z+1)^5 + z^5 = 0,$ $k = 0,1,2,3,4.$ Podemos afirmar que:

a) todos os z_k, $k = 0,1,2,3,4$ estão sobre uma circunferência.

b) todos os z_k, $k = 0,1,2,3,4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo real.

c) todos os z_k, $k = 0,1,2,3,4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.

d) a equação não admite solução.

e) n.d.a.

2) (ITA 1975) Se Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 são as raízes da equação $(Z+1)^5 + Z^5 = 0,$ e se $R(Z)$ indica a parte real de Z então podemos afirmar que :

a) $R(Z_k) = 0$ para $k = 1,2,3$ e $R(Z_t) = 1$ para $t = 4,5.$

b) $R(Z_k) = -\frac{1}{2}$ para $k = 1,2,3,4,5.$

c) Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 são números reais (não complexos).

d) $R(Z_k) = 2$ para $k = 1,2,3$ e $R(Z_t) = 0$ para $t = 4,5.$

e) NDA

3) (ITA 1975) Se Z_1 e Z_2 são números complexos, $Z_1 + Z_2$ e $Z_1 \cdot Z_2$ são ambos reais, então podemos afirmar que

a) Z_1 e Z_2 são ambos reais ou $Z_1 = \overline{Z}_2.$

b) Z_1 e Z_2 são números complexos não reais.

c) Z_1 e Z_2 são números reais irracionais.

d) Z_1 é um número complexo puro e Z_2 é um número real.

e) NDA

4) (ITA 1976) As raízes de ordem 4 do número $z = e^{\frac{\pi i}{2}}$, onde i é a unidade imaginária, são:

a) $z_k = \cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k,$ onde $\theta_k = \frac{1+4k}{8}\pi,$ com $k = 0,1,2,3.$

b) $z_k = e^{i\theta}k,$ onde $\theta_k = \frac{1+3k}{8}\pi,$ com $k = 0,1,2,3.$

c) $z_k = e^{i\theta}k,$ onde $\theta_k = 4k\pi,$ com $k = 0,1,2,3.$

d) $z_k = e^{i\theta}k,$ onde $\theta_k = \frac{1-4k}{8}\pi,$ com $k = 0,1,2,3.$

e) n.d.r.a.

5) (ITA 1976) Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, são dois números complexos, tais que $z_1 \cdot z_2 = 2$. Então, temos: (Observação: $\bar{z}$ indica o conjugado de z)
a) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$
b) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
c) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
d) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$
e) n.d.r.a.

6) (ITA 1978) Seja z um número complexo. Se $z + \frac{1}{z}$ é um número real então podemos afirmar:
a) $z \neq 0$ e $\text{Re}(z) \geq 0$.
b) $\text{Im}(z) = 0$ ou $|z| = 1$.
c) z é necessariamente um número real.
d) $z^2 = -1$.
e) n.d.a.

7) (ITA 1978) O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação: $z\bar{z} - z_o\bar{z} - \bar{z}_o z + k = 0$, onde k é um número real positivo e $|z_o^2| > k$, é:
a) uma hipérbole com centro z_o.
b) uma elipse com um dos focos em z_o.
c) uma circunferência com centro em z_o.
d) uma parábola com vértice em z_o.
e) n.d.a.

8) (ITA 1979) Estudando a equação $32z^5 = (z+1)^5$ no plano complexo, podemos afirmar que:
a) A equação possui todas as raízes imaginárias, situadas numa circunferência de raio 1.
b) A equação possui 4 raízes imaginárias, situadas uma em cada quadrante.
c) A equação possui 2 raízes imaginárias, uma no 1º quadrante e outra no 4º quadrante.
d) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 2º quadrante e outras duas no 3º quadrante.
e) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 1º quadrante e outras duas no 4º quadrante.

9) (ITA 1980) Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se n é um número inteiro positivo, $z^n + \frac{1}{z^n}$ é igual a:

a) $\cos(n\theta)$ b) $2\cos(n\theta)$ c) $\text{sen}(n\theta)$
d) $2\,\text{sen}(n\theta)$ e) $\text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta)$

10) (ITA 1981) Sejam a e k constantes reais, sendo $a>0$ e $0<k<1$. De todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z-ai|\le ak$, qual é o de menor argumento?
a) $z=ak\sqrt{1-k^2}+ia\cdot(1-k^2)$
b) $z=k\sqrt{1-k^2}-ia\cdot(1-k^2)$
c) $z=k\sqrt{1-k^2}-i\cdot(1-k^2)$
d) $z=-k\sqrt{1-k^2}-ia\cdot(1-k^2)$
e) $z=a+ik$

11) (ITA 1981) O conjunto A definido por $A=\{z\in\mathbb{C};(z-i)\cdot\overline{(z-i)}=4\}$ representa no plano complexo:
a) uma elipse cujos focos se encontram nos pontos i e $-i$.
b) uma circunferência de centro no ponto $(0,1)$ e raio 2.
c) uma circunferência de centro no ponto $(0,0)$ e raio 4.
d) um par de retas que se cortam no ponto $(1,1)$.
e) nenhuma das anteriores.

12) (ITA 1982) Considere a família de curvas do plano complexo, definida por $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=C$, onde z é um complexo não-nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma:
a) circunferência com centro no eixo real e raio igual a C.
b) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $\frac{1}{C}$.
c) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $\frac{1}{2C}$.
d) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $\frac{1}{2C}$.
e) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a $\frac{1}{C}$.

13) (ITA 1983) Consideremos um número complexo z que possui partes real e imaginárias positivas tal que $\frac{z^2}{\overline{z}i}$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ e $\log_2(z+\overline{z}+2)=3$. Nestas condições, podemos afirmar que:
a) não existe $\ell n\left(\frac{z-\overline{z}}{i}\right)$
b) $z^4+\ell n\left(\frac{z-\overline{z}}{i}\right)=-324$
c) $z+2\overline{z}$ é um número real.
d) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=\frac{1+i}{108}$

e) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{(1+i)}{108}$

14) (ITA 1984) Sabendo-se que n é um número natural tal que $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}{3i}$ é um número real, podemos afirmar que:
a) $n = 6k,\ k = 0,1,2,3,\dots$
b) $n = 3\cdot(2k+1),\ k = 0,1,2,3,\dots$
c) $n = 3k,\ k = 0,1,2,3,\dots$
d) $n = k,\ k = 0,1,2,3,\dots$
e) não existe valor de n natural tal que o número dado seja real

15) (ITA 1985) Seja a um número real. Os valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem $\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{a+(\bar{z})^{10}}{1-i}\right) \in \mathbb{R}$ são
a) $z = -a + i\sqrt[10]{|a|}$
b) não é possível determiná-los
c) $z = -i\sqrt[10]{|a|}$
d) não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que isto aconteça
e) todo $z \in \mathbb{C}$

16) (ITA 1986) No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos seja α tal que $|\alpha| < 1$. O lugar geométrico dos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem a igualdade $\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = 1$ é:
a) Uma circunferência de centro na origem e raio 1.
b) Uma hipérbole.
c) Uma elipse de semieixo maior ou igual a 2.
d) Uma parábola.
e) Formado por duas retas concorrentes.
Nota: A notação $\bar{\alpha}$ é usada para denotar o conjugado complexo de α.

17) (ITA 1987) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u = z\cdot w + \bar{z}\cdot\bar{w}$, então o conjugado de u será necessariamente:
a) igual à $|z||w|$.
b) um número imaginário puro.
c) igual ao dobro da parte real de $z+w$.
d) igual ao dobro da parte real do número $z\cdot w$.
e) diferente de u.

18) (ITA 1987) Seja N o número de soluções reais da equação $\operatorname{sen} x = |2+3i|$. Então, temos:
a) $N > 50$
b) $N = \text{zero}$
c) $N = 2$
d) $N = 1$
e) $N > 2$ e $N < 10$

19) (ITA 1987) A soma de todas as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ é:

a) 1 b) 2 c) zero d) $-2\sqrt{2}i$ e) $2 + \sqrt{3}i$

20) (ITA 1987) Seja S a coleção de todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z| - z = 1 + 2i$, onde i é a unidade imaginária. Então, podemos garantir que:

a) $S = \left\{\frac{3}{2} - 2i\right\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} - 2i\right\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{4} + 4k\pi;\ k = 1, 2, 3\right\}$

d) $S = \left\{\frac{1}{4} + 3i\right\}$

e) $S = \{1 + 2ki;\ k = 1, 2, 3\}$

21) (ITA 1988) O número natural n tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$ onde i é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:

a) 6 b) 3 c) 7 d) 4 e) não existe n

22) (ITA 1988) Seja a equação $z^4 - a - bi = 0$ onde a e b são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:

a) Uma delas é um imaginário puro.

b) Os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt[4]{|a + bi|}$.

c) O seu produto é um imaginário puro.

d) Cada uma tem argumento igual a $\frac{\arg(a + bi)}{4}$.

e) A sua soma é zero.

Nota: $\arg(a + bi)$ denota o argumento do número $a + bi$.

23) (ITA 1989) O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:

a) $\frac{6}{5} - \frac{8i}{5}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{2i}{5}$

c) $-\frac{8}{5} - \frac{8i}{5}$

d) $2 + 2i$

e) não existe nenhum número complexo que pertença à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

24) (ITA 1989) Considerando que a imagem da função arcsen é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $i=\sqrt{-1}$, podemos garantir que $\operatorname{arcsen}\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|$, onde $x \in \mathbb{R}$, está definida:

a) apenas para $x=0$ e vale $\frac{\pi}{2}$.

b) para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale $\frac{\pi}{2}$.

c) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x|<1$ e seu valor depende do valor de x.
d) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 1$ e seu valor é π.
e) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de x.

25) (ITA 1989) O valor da expressão $|1-z|^2+|1+z|^2$, sendo z um número complexo, é:
a) 5 se $|z| \leq 1$.
b) 4, se $|z|=1$.
c) 0, se $\operatorname{Im}(z)=0$.
d) 2, para todo z.
e) 3, se $\operatorname{Re}(z)=0$.

26) (ITA 1990) A igualdade $1+|z|=|1+z|$, onde $z \in \mathbb{C}$, é satisfeita:
a) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z)=0$ e $\operatorname{Im}(z)<0$.
b) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ e $\operatorname{Im}(z)=0$.
c) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|=1$.
d) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z)=0$.
e) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|<1$.
Nota: $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos, $\operatorname{Re}(z)$ a parte real de z e $\operatorname{Im}(z)$ a parte imaginária de z.

27) (ITA 1990) Considere as equações $z^3=i$ e $z^2+(2+i)z+2i=0$ onde z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então:
a) $S_1 \cap S_2$ é vazio.
b) $S_1 \cap S_2 \subset \mathbb{R}$.
c) S_1 possui apenas dois elementos distintos.
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário.
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

28) (ITA 1991) Se $z=\cos t+i \operatorname{sen} t$, onde $0<t<2\pi$, então podemos afirmar que $w=\frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i \operatorname{cotg}\frac{t}{2}$ b) $i \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ c) $i \operatorname{cotg} t$ d) $i \operatorname{tg} t$ e) n.d.a.

29) (ITA 1991) Sejam $w = a + bi$, com $b \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:
a) um par de retas paralelas.
b) uma circunferência.
c) uma elipse.
d) uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.
e) n.d.a.

30) (ITA 1992) Sabe-se que $2\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{20}\right)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$. Um subconjunto de S é:
a) $\left\{2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right), 2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right\}$
b) $\left\{2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right), 2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right)\right\}$
c) $\left\{2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right), 2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right\}$
d) $\left\{2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right), 2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right\}$
e) nda

31) (ITA 1992) Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Seja S o conjunto dos valores de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

a) 4 b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ c) 8 d) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ e) nda

32) (ITA 1993) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2 + z}$ no conjunto dos números complexos, sobre as soluções conclui-se que:
a) nenhuma delas é um número inteiro.
b) a soma delas é 2.
c) estas são em número de 2 e são distintas.
d) estas são em número de 4 e são 2 a 2 distintas.
e) uma delas é da forma $z = bi$ com b real não nulo.
Nota: Por $\overline{a}$ denotamos o conjugado do número complexo a.

33) (ITA 1993) Seja <u>a</u> o módulo do número complexo $\left(2 - 2\sqrt{3}\cdot i\right)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

a) $\frac{10}{11}$ b) -2 c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{5}$

34) (ITA 1994) Considere as afirmações:
1. $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^{10} = \cos(10\theta) + i\,\text{sen}(10\theta)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{5i}{2+i} = 1 + 2i$
3. $(1-i)^4 = -4$
4. Se $z^2 = (\bar{z})^2$, então z é real ou imaginário puro.
5. O polinômio $x^4 + x^3 - x - 1$ possui apenas raízes reais.
Podemos concluir que:
a) Todas são verdadeiras
b) Apenas quatro são verdadeiras
c) Apenas três são verdadeiras
d) Apenas duas são verdadeiras
e) Apenas uma é verdadeira

35) (ITA 1994) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x+iy)^2 = (x+y)\cdot i$. Então:
a) x e y são números irracionais.
b) $x > 0$ e $y < 0$
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$.
d) $x < 0$ e $y = x$
e) $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$

36) (ITA 1995) Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$, então a soma das raízes reais é igual a
a) -1 b) $-1 + 2^{1/2}$ c) $1 - 2^{1/3}$ d) $1 + 3^{1/2}$ e) $-1 + 3^{1/2}$

37) (ITA 1995) Seja z um número complexo satisfazendo $\text{Re}(z) > 0$ e $(z+i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$. Se n é o menor natural para o qual z^n é um imaginário puro, então n é igual a
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

38) (ITA 1996) O valor da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:
a) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ d) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} i$ e) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} + i$

39) (ITA 1997) Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem, simultaneamente, as equações: $|z - 3i| = 3$ e $|z + i| = |z - 2 - i|$. O produto de todos os elementos de S é igual a:
a) $-2 + i\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$ d) $-3 + 3i$ e) $-2 + 2i$

40) (ITA 1997) Considere no plano complexo um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente por $z_1, z_2, \ldots, z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$ é igual a

a) $2+4i$

b) $(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+3)i$

c) $\sqrt{6}+(\sqrt{2}+2)i$

d) $(2\sqrt{3}-1)+(2\sqrt{3}+3)i$

e) $\sqrt{2}+(\sqrt{6}+2)i$

41) (ITA 1997) Considere os números complexos $z = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$ e $w = 1+i\sqrt{3}$. Se $m = \left|\dfrac{w^6+3z^4+4i}{z^2+w^3+6-2i}\right|^2$, então m vale:

a) 34 b) 26 c) 16 d) 4 e) 1

42) (ITA 1998) Sejam x e y números reais tais que: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$. Então, o número complexo $z = x+iy$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

a) $1-i$ e $\sqrt[6]{2}$ b) $1+i$ e $\sqrt[6]{2}$ c) i e 1 d) $-i$ e 1 e) $1+i$ e $\sqrt[3]{2}$

43) (ITA 1998) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) π d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ e) 2π

44) (ITA 1999) O conjunto de todos os números complexos z, $z \neq 0$, que satisfazem a igualdade $|z+1+i| = \big||z|-|1+i|\big|$ é:

a) $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ e } \arg z = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{2} \text{ e } \arg z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45) (ITA 1999) Sejam a_k e b_k números reais com $k = 1, 2, \ldots, 6.$ Os números complexos $z_k = a_k + i \cdot b_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0,$ para todo $k = 1, 2, \ldots, 6.$ Se $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{5}$ e soma 9, então z_3 é igual a:

a) 2i
b) $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$
c) $\sqrt{3} + i$
d) $\frac{-3\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{73}}{5}i$
e) $\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{17}}{5}i$

46) (ITA 2000) Seja z_o o número complexo $1 + i.$ Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_o| = |z + z_o| = 2,$ então o produto dos elementos de S é igual a

a) $4(1 - i)$
b) $2(1 + i)$
c) $2(i - 1)$
d) $-2i$
e) $2i$

47) (ITA 2001) A parte imaginária de $((1 + \cos 2x) + i \operatorname{sen} 2x)^k,$ k inteiro positivo, e real, é

a) $2 \operatorname{sen}^k x \cos^k x$
b) $\operatorname{sen}^k x \cos^k x$
c) $2^k \operatorname{sen} kx \cos^k x$
d) $2^k \operatorname{sen}^k x \cos^k x$
e) $\operatorname{sen} kx \cos^k x$

48) (ITA 2001) O número complexo $z = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} + i \frac{1 - 2\cos a + 2 \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a},$ $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$ tem argumento $\frac{\pi}{4}.$ Nesse caso, a é igual a:

a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{5}$
e) $\frac{\pi}{9}$

49) (ITA 2001) Seja $z = 1 + i\sqrt{3},$ $z \cdot \bar{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de $z \cdot w,$ então α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$
b) π
c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{3}$
e) $\frac{3\pi}{2}$

50) (ITA 2002) Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0.$ Se $z, w \in \mathbb{C}$ satisfazem a $\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases},$ determine o valor de $|a|$ de forma que $|zw| = 1.$

51) (ITA 2002) Seja a equação em $\mathbb{C},$ $z^4 - z^2 + 1 = 0.$ Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $-i$
e) $\frac{i}{2}$

52) (ITA 2003) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número $w = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) esse conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

53) (ITA 2003) Seja $z \in \mathbb{C}$. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $w = \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{w} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II. Se $z \neq 0$ e $w = \frac{2iz + 3i + 3}{(1+2i)z}$, então $|w| \leq \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$.

III. Se $w = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \frac{\pi}{12}$ é um argumento de w.

é(são) verdadeira(s):

a) todas
b) apenas I e II
c) apenas II e III
d) apenas I e III
e) apenas II

54) (ITA 2004) Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}\right|$.

55) (ITA 2004) A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, é igual a

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

56) (ITA 2004) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2\cos x + 2i \operatorname{sen} x$. Então, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, o valor do produto $f(x) \cdot f(y)$ é igual a

a) $f(x+y)$
b) $2f(x+y)$
c) $4if(x+y)$
d) $f(xy)$
e) $2f(x) + 2if(y)$

57) (ITA 2005) Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\frac{1 - \bar{z}w}{z - w}\right|$ assume valor

a) maior que 1, para todo w com $|w| > 1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w| < 1$.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$.
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

58) (ITA 2006) Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = i \operatorname{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que:

a) $2n\alpha$ é múltiplo de 2α.
b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π.

c) $n\alpha-\frac{\pi}{4}$ é múltiplo de $\frac{\pi}{2}$.
d) $2n\alpha-\pi$ é múltiplo não nulo de 2.
e) $n\alpha-2\pi$ é múltiplo de π.

59) (ITA 2006) Se para todo $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então, para todo $z\in\mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z)+f(1)\overline{f(z)}$ é igual a:

a) 1 b) $2z$ c) $2\operatorname{Re}z$ d) $2\operatorname{Im}z$ e) $2|z|^2$

60) (ITA 2007) Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que $\frac{\bar{z}}{z-2i}+\frac{2z}{\bar{z}+2i}=3$ e $0<|z-2i|\le 1$.

61) (ITA 2007) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo $\frac{1}{1+i\operatorname{cotg}x}$, $x\ne k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

a) $|\cos x|$ b) $\frac{1+\operatorname{sen}x}{2}$ c) $\cos^2 x$ d) $|\operatorname{cossec}x|$ e) $|\operatorname{sen}x|$ |

62) (ITA 2007) Considere a equação $16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3=\left(\frac{1+1}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)^4$. Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é
a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

63) (ITA 2008) Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6+256=0$, na forma $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$, que pertençam a $S=\{z\in\mathbb{C};\ 1<|z+2|<3\}$.

64) (ITA 2008) Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tais que $|\alpha|=|\beta|=1$ e $|\alpha-\beta|=\sqrt{2}$. Então $\alpha^2+\beta^2$ é igual a
a) – 2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

65) (ITA 2009) Sejam $x,y\in\mathbb{R}$ e
$w=x^2(1+3i)+y^2(4-i)-x(2+6i)+y(-16+4i)\in\mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \operatorname{Re}w\le -13 \text{ e } \operatorname{Im}w\le 4\right\}.$$

66) (ITA 2009) Se $a=\cos\frac{\pi}{5}$ e $b=\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$, então o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

a) $a+bi$ b) $-a+bi$ c) $(1-2a^2b^2)+ab(1+b^2)i$
d) $a-bi$ e) $(1-4a^2b^2)+2ab(1-b^2)i$

67) (ITA 2010) Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0=-1$ e $a_n=1+i\cdot a_{n-1},\ n=1,2,\ldots,15$. Das afirmações:

I. $p(-1)\notin\mathbb{R}$,

II. $|p(x)|\le 4\cdot\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right),\ \forall x\in[-1,1]$,

III. $a_8=a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

68) (ITA 2010) Os argumentos principais das soluções da equação em z, $iz+3\bar{z}+(z+\bar{z})^2-i=0$, pertence a

a) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$. b) $\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$. c) $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$.

d) $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right[$. e) $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4},2\pi\right[$.

69) (ITA 2010) Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$, $z-\bar{z}+|z|^2=-\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}-i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$, pode-se afirmar que

a) $i\left(z-\bar{z}\right)<0$. b) $i\left(z-\bar{z}\right)>0$. c) $|z|\in[5,6]$. d) $|z|\in[6,7]$. e) $\left|z+\frac{1}{\bar{z}}\right|>8$.

70) (ITA 2011) Sejam $n\ge 3$ ímpar, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $z_1,z_2,\ldots,z_n$ as raízes de $z^n=1$. Calcule o número de valores $\left|z_i-z_j\right|$, $i,j=1,2,\ldots,n$, com $i\ne j$, distintos entre si.

71) (ITA 2011) A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}: z^2+|z|^2+iz-1=0$ é igual a

a) 2. b) $\frac{i}{2}$. c) 0. d) $-\frac{1}{2}$. e) $-2i$.

72) (ITA 2011) Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I. $|z_1-z_2|\le\left||z_1|-|z_2|\right|$.

II. $|\bar{z}_1\cdot z_2|=\left||\bar{z}_1|.|\bar{z}_2|\right|$.

III. Se $z_1=|z_1|(\cos\theta+i\ \text{sen}\theta)\ne 0$, $z_1^{-1}=|z_1|^{-1}(\cos\theta-i\ \text{sen}\theta)$.

é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas II e III. e) todas.

73) (ITA 2011) Dado $z=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

a) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\,i$. b) -1 c) 0 d) 1 e) $\frac{89}{6}\sqrt{3}\,i$

74) (ITA 2012) Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{7\pi}{4}$

75) (ITA 2012) Seja $z = n^2(\cos 45^\circ + i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)$ e $w = n(\cos 15^\circ + i\,\mathrm{sen}\,15^\circ)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3}+i$. b) $2(\sqrt{3}+i)$. c) $2(\sqrt{2}+i)$. d) $2(\sqrt{2}-i)$. e) $2(\sqrt{3}-i)$.

76) (ITA 2013) Para $z = 1+iy$, $y > 0$, determine todos os pares (a, y), $a > 1$, tais que $z^{10} = a$. Escreva a e y em função de $\mathrm{Arg}\,z$.

77) (ITA 2013) Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17} = 12$. Então a soma das soluções z, com $\mathrm{Re}\,z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) 4 e) 16

78) (ITA 2013) Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z-5+3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{41}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$

79) (ITA 2013) A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

80) (ITA 2014) a) Determine o valor máximo de $|z+i|$, sabendo que $|z-2| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.
b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0.

81) (ITA 2014) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

II. $(z+\overline{w})^2 - (z-\overline{w})^2 = 4z\overline{w}$;

III. $|z+w|^2 - |z-w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III.
d) apenas II e III. e) todas.

82) (ITA 2014) Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3|z|^4(z^2 - \overline{z}^2) - \overline{z}^6$ é igual a

a) $(z^2 - \overline{z}^2)^3$ b) $z^6 - \overline{z}^6$ c) $(z^3 - \overline{z}^3)^2$

d) $(z-\overline{z})^6$ e) $(z-\overline{z})^2(z^4-\overline{z}^4)$

83) (ITA 2015) Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M=\{|z^2+az-1|:\ z\in\mathbb{C} \text{ e } |z|=1\}$, com $a\in\mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a.

84) (ITA 2015) Se $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de $2\,\text{arcsen}(\text{Re}(z))+5\,\text{arctg}(2\,\text{Im}(z))$ é igual a

a) $-\dfrac{2\pi}{3}$. b) $-\dfrac{\pi}{3}$. c) $\dfrac{2\pi}{3}$. d) $\dfrac{4\pi}{3}$. e) $\dfrac{5\pi}{3}$.

85) (ITA 2015) Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A=\{z\in\mathbb{C}:|z+2-3i|<\sqrt{19}\}$, $B=\{z\in\mathbb{C}:|z+i|<7/2\}$ e $C=\{z\in\mathbb{C}:z^2+6z+10=0\}$. Então, $(A\setminus B)\cap C$ é o conjunto

a) $\{-1-3i,-1+3i\}$ b) $\{-3-i,-3+i\}$ c) $\{-3+i\}$
d) $\{-3-i\}$ e) $\{-1+3i\}$

86) (ITA 2016) Considere as afirmações a seguir:
I. Se z e w são números complexos tais que $z-iw=1-2i$ e $w-z=2+3i$, então $z^2+w^2=-3+6i$.
II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2+z^2=4+2i$ é igual a zero.
III. Se $z=1-i$, então $z^{59}=2^{29}(-1+i)$.
É (são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas 1 e III.
d) apenas II e III. e) I, II e III.

87) (ITA 2017) O lugar geométrico dos pontos $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z\in\mathbb{C}$, $z^2+z+2-(a+ib)=0$ possua uma raiz puramente imaginária é
a) uma circunferência. b) uma parábola. c) uma hipérbole.
d) uma reta. e) duas retas paralelas.

88) (ITA 2017) Considere a equação $(a-bi)^{501}=\dfrac{2(a+bi)}{(a^2+b^2)^{250}+1}$. O número de pares ordenados $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é
a) 500 b) 501 c) 502 d) 503 e) 504

RESPOSTAS

1) c; 2) b; 3) a; 4) a; 5) c; 6) b; 7) c; **8) d;** 9) b; **10) a;** 11) b; 12) d; 13) e; 14) b; 15) e; **16) a;** 17) d; 18) b; 19) a; 20) a; 21) b; 22) e; 23) a; 24) b; **25) b;** 26) b; 27) d; 28) a; 29) d; 30) d; 31) a; 32) c; 33) a; 34) b; 35) c; 36) c; 37) b; 38) a; **39) d; 40) b;** 41) a; 42) b; 43) d; 44) a; 45) b; 46) e; 47) c; 48) a; 49) c; 50) DISC; 51) d; **52) DISC;** **53) a;** 54) DISC; 55) a; 56) b; 57) d; 58) b; **59) c;** 60) DISC; 61) e; 62) b; **63) DISC;** 64) b; **65) DISC;** 66) b; 67) e; 68) c; 69) e; **70) DISC;** 71) e; 72) d; 73) b; 74) e; 75) b; 76) DISC; 77) b; 78) b; 79) c; **80) DISC;** 81) e; 82) a; **83) DISC;** 84) d; 85) c; 86) b; 87) b; 88) d

RESOLUÇÕES

1) (ITA 1974) Seja z_k um número complexo, solução da equação $(z+1)^5 + z^5 = 0$, $k = 0,1,2,3,4.$ Podemos afirmar que:

a) todos os z_k, $k = 0,1,2,3,4$ estão sobre uma circunferência.

b) todos os z_k, $k = 0,1,2,3,4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo real.

c) todos os z_k, $k = 0,1,2,3,4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.

d) a equação não admite solução.

e) n.d.a.

RESOLUÇÃO: c

Inicialmente, observemos que $z = 0$ não é solução, então $z \neq 0$.

$$(z+1)^5 + z^5 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^5 = -z^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{z}\right)^5 = \text{cis}\,\pi$$

$$1+\frac{1}{z_k} = \text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{5},\ k = 0,1,2,3,4 \Leftrightarrow \frac{1}{z_k} = -1+\text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{5},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow z_k = \frac{1}{-1+\text{cis}\,\frac{\pi+2k\pi}{5}} = \frac{-1+\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{5}}{\left(-1+\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)^2 + \left(\text{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)^2},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow z_k = \frac{-1+\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{5}}{2-2\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow z_k = \frac{-1+\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}}{2\left(1-\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)} - i\frac{\text{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{5}}{2\left(1-\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow z_k = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\text{cotg}\,\frac{\pi+2k\pi}{10},\ k = 0,1,2,3,4$$

Na parte imaginária da expressão anterior, utilizamos a relação:

$$\frac{\text{sen}\,2\theta}{2(1-\cos 2\theta)} = \frac{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{2\cdot 2\,\text{sen}^2\,\theta} = \frac{1}{2}\text{cotg}\,\theta$$

Como todos os z_k têm parte real igual a $-\frac{1}{2}$, então eles estão todos sobre a reta $x=-\frac{1}{2}$, ou seja, estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.

Note ainda que, quando $k=2$, temos $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}$, que é a única raiz real da equação.

2) (ITA 1975) Se Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 são as raízes da equação $(Z+1)^5+Z^5=0$, e se $R(Z)$ indica a parte real de Z então podemos afirmar que :

a) $R(Z_k)=0$ para $k=1,2,3$ e $R(Z_t)=1$ para $t=4,5$.

b) $R(Z_k)=-\frac{1}{2}$ para $k=1,2,3,4,5$.

c) Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 são números reais (não complexos).

d) $R(Z_k)=2$ para $k=1,2,3$ e $R(Z_t)=0$ para $t=4,5$.

e) NDA

RESOLUÇÃO: b

Pela solução da questão 1, sabemos que:

$$Z_k=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi+2k\pi}{10},\ k=1,2,3,4,5$$

$$\Rightarrow R(Z_k)=-\frac{1}{2},\ k=1,2,3,4,5$$

3) (ITA 1975) Se Z_1 e Z_2 são números complexos, Z_1+Z_2 e $Z_1\cdot Z_2$ são ambos reais, então podemos afirmar que

a) Z_1 e Z_2 são ambos reais ou $Z_1=\overline{Z}_2$.

b) Z_1 e Z_2 são números complexos não reais.

c) Z_1 e Z_2 são números reais irracionais.

d) Z_1 é um número complexo puro e Z_2 é um número real.

e) NDA

RESOLUÇÃO: a

Sejam $Z_1=a+bi$ e $Z_2=c+di$, onde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, então

$$Z_1+Z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b+d=0\Leftrightarrow d=-b$$

$$Z_1\cdot Z_2=(a+bi)\cdot(c-bi)=\left(ac+b^2\right)+b(c-a)i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b=0\vee c=a$$

Assim, temos duas possibilidades:

$$b=0\Rightarrow Z_1=a\wedge Z_2=c$$

$$c=a\Rightarrow Z_1=a+bi\wedge Z_2=a-bi$$

Assim, Z_1 e Z_2 são ambos reais ou complexos conjugados.

4) (ITA 1976) As raízes de ordem 4 do número $z = e^{\frac{\pi i}{2}}$, onde i é a unidade imaginária, são:

a) $z_k = \cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k$, onde $\theta_k = \frac{1+4k}{8}\pi$, com $k = 0,1,2,3$.

b) $z_k = e^{i\theta}k$, onde $\theta_k = \frac{1+3k}{8}\pi$, com $k = 0,1,2,3$.

c) $z_k = e^{i\theta}k$, onde $\theta_k = 4k\pi$, com $k = 0,1,2,3$.

d) $z_k = e^{i\theta}k$, onde $\theta_k = \frac{1-4k}{8}\pi$, com $k = 0,1,2,3$.

e) n.d.r.a.

RESOLUÇÃO: a

Pela fórmula de Euler, temos: $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

Aplicando a 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$$w^4 = z = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \Rightarrow w = \operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} = \operatorname{cis}\frac{1+4k}{8}\cdot\pi,\ k = 0,1,2,3$$

5) (ITA 1976) Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, são dois números complexos, tais que $z_1 \cdot z_2 = 2$. Então, temos: (Observação: $\overline{z}$ indica o conjugado de z)

a) $z_1 = \overline{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$

b) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

c) $z_1 = \overline{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

d) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$

e) n.d.r.a.

RESOLUÇÃO: c

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \Rightarrow (a+xi)\cdot(a+yi) = 2 \Leftrightarrow \left(a^2 - xy\right) + a(x+y)i = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - xy = 2 \\ a(x+y) = 0 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \end{cases}$$

$$x = -y \Rightarrow a^2 - xy = 2 \Leftrightarrow a^2 - x(-x) = 2 \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 2$$

$$\Rightarrow |z_1| = \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{2} \ \wedge\ |z_2| = \sqrt{a^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{2}$$

$$x = -y \Rightarrow z_1 = \overline{z}_2$$

6) (ITA 1978) Seja z um número complexo. Se $z+\frac{1}{z}$ é um número real então podemos afirmar:

a) $z \neq 0$ e $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.
b) $\mathrm{Im}(z)=0$ ou $|z|=1$.
c) z é necessariamente um número real.
d) $z^2=-1$.
e) n.d.a.

RESOLUÇÃO: b
Seja $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ a representação do número complexo z na forma trigonométrica, então

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r\,\mathrm{cis}\,\theta}=\frac{1}{r}\mathrm{cis}(-\theta)$$

$$z+\frac{1}{z}=r\,\mathrm{cis}\,\theta+\frac{1}{r}\mathrm{cis}(-\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\cdot\left(r-\frac{1}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\left(r-\frac{1}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta=0\Leftrightarrow r-\frac{1}{r}=0\ \vee\ \mathrm{sen}\,\theta=0$$

1º) $r-\frac{1}{r}=0\Leftrightarrow r=\frac{1}{r}\Leftrightarrow r^2=1\overset{r\geq 0}{\Leftrightarrow} r=1\Rightarrow |z|=1$

2º) $\mathrm{sen}\,\theta=0\Rightarrow \mathrm{Im}(z)=0$

Logo, $\mathrm{Im}(z)=0$ ou $|z|=1$.

7) (ITA 1978) O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação: $z\bar{z}-z_o\bar{z}-\bar{z}_o z+k=0$, onde k é um número real positivo e $\left|z_o^2\right|>k$, é:

a) uma hipérbole com centro z_o.
b) uma elipse com um dos focos em z_o.
c) uma circunferência com centro em z_o.
d) uma parábola com vértice em z_o.
e) n.d.a.

RESOLUÇÃO: c
Sabemos que para qualquer número complexo z, temos $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. Assim, temos:

$$z\bar{z}-z_o\bar{z}-\bar{z}_o z+k=0\Leftrightarrow(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o)=z_o\bar{z}_o-k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-z_o)\overline{(z-z_o)}=z_o\bar{z}_o-k\Leftrightarrow|z-z_o|^2=|z_o|^2-k$$

$$\left|z_o^2\right|>k\Leftrightarrow\left|z_o^2\right|-k>0\Rightarrow|z-z_o|=\sqrt{|z_o|^2-k}$$

A equação anterior representa uma circunferência de centro em z_o e raio $\sqrt{|z_o|^2-k}$.

8) (ITA 1979) Estudando a equação $32z^5 = (z+1)^5$ no plano complexo, podemos afirmar que:
a) A equação possui todas as raízes imaginárias, situadas numa circunferência de raio 1.
b) A equação possui 4 raízes imaginárias, situadas uma em cada quadrante.
c) A equação possui 2 raízes imaginárias, uma no 1º quadrante e outra no 4º quadrante.
d) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 2º quadrante e outras duas no 3º quadrante.
e) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 1º quadrante e outras duas no 4º quadrante.

RESOLUÇÃO: d
Como $z = 0$ não é raiz, então podemos utilizar $z \neq 0$.

$$32z^5 = (z+1)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = 32 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{z}\right)^5 32\operatorname{cis} 0$$

Pela 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$$1+\frac{1}{z} = 2\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{5},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = -1+2\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{5},\ k = 0,1,2,3,4 \Leftrightarrow z = \frac{1}{-1+2\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{5}},\ k = 0,1,2,3,4$$

Multiplicando em cima e embaixo pelo conjugado do denominador, temos:

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+2\cos\frac{2k\pi}{5} - i\cdot 2\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5}}{\left(-1+2\cos\frac{2k\pi}{5}\right)^2 + \left(-2\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5}\right)^2},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+2\cos\frac{2k\pi}{5} - i\cdot 2\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5}}{5-4\cos\frac{2k\pi}{5}},\ k = 0,1,2,3,4$$

$$-1 \leq \cos\frac{2k\pi}{5} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq -4\cos\frac{2k\pi}{4} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 5-4\cos\frac{2k\pi}{5} \leq 9$$

Logo, o denominador é sempre positivo.

$$z_0 = \frac{-1+2\cos 0 - i\cdot 2\operatorname{sen} 0}{5-4\cos 0} = 1$$

$$z_1 = \frac{-1+2\cos\frac{2\pi}{5} - i\cdot 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}}{5-4\cos\frac{2\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \frac{-1+2\cos\frac{2\pi}{5}}{5-4\cos\frac{2\pi}{5}} < 0 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z_1) = \frac{-2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}}{5-4\cos\frac{2\pi}{5}} < 0 \Rightarrow z_1 \in Q_{III}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} < \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 < 0 \ \wedge \ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} > 0$$

$$z_2=\frac{-1+2\cos\frac{4\pi}{5}-i\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5}}{5-4\cos\frac{4\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_2)=\frac{-1+2\cos\frac{4\pi}{5}}{5-4\cos\frac{4\pi}{5}}<0 \wedge \text{Im}(z_2)=\frac{-2\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5}}{5-4\cos\frac{4\pi}{5}}<0 \Rightarrow z_2\in Q_{III}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5}<0 \ \wedge \ \text{sen}\,\frac{4\pi}{5}>0$$

$$z_3=\frac{-1+2\cos\frac{6\pi}{5}-i\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5}}{5-4\cos\frac{6\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_3)=\frac{-1+2\cos\frac{6\pi}{5}}{5-4\cos\frac{6\pi}{5}}<0 \wedge \text{Im}(z_3)=\frac{-2\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5}}{5-4\cos\frac{6\pi}{5}}>0 \Rightarrow z_2\in Q_{II}$$

$$\cos\frac{6\pi}{5}<0 \ \wedge \ \text{sen}\,\frac{6\pi}{5}<0$$

$$z_4=\frac{-1+2\cos\frac{8\pi}{5}-i\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5}}{5-4\cos\frac{8\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_4)=\frac{-1+2\cos\frac{8\pi}{5}}{5-4\cos\frac{8\pi}{5}}<0 \wedge \text{Im}(z_4)=\frac{-2\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5}}{5-4\cos\frac{8\pi}{5}}>0 \Rightarrow z_2\in Q_{II}$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}<\cos\frac{8\pi}{5}<\cos\frac{5\pi}{3}\Leftrightarrow 0<\cos\frac{8\pi}{5}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\cos\frac{8\pi}{5}-1<0 \ \wedge \ \text{sen}\,\frac{8\pi}{5}<0$$

Logo, a equação possui uma raiz real, duas raízes imaginárias no 2º quadrante e duas raízes imaginárias no 3º quadrante.

9) (ITA 1980) Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se n é um número inteiro positivo, $z^n+\frac{1}{z^n}$ é igual a:

a) $\cos(n\theta)$
b) $2\cos(n\theta)$
c) $\text{sen}(n\theta)$
d) $2\,\text{sen}(n\theta)$
e) $\text{sen}(n\theta)+\cos(n\theta)$

RESOLUÇÃO: b

Como $|z|=1$ e o argumento de z é θ, então sua representação na forma trigonométrica é $z=1\,\text{cis}\,\theta$.

Pela 1ª fórmula de De Moivre, temos:

$$z^n=\text{cis}(n\theta)=\cos(n\theta)+i\,\text{sen}(n\theta)$$

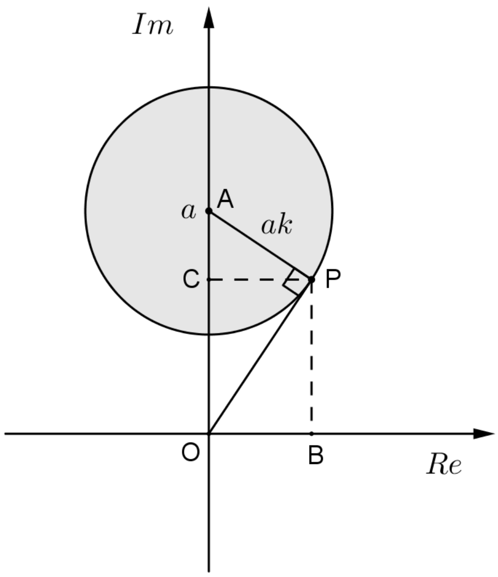
$z^{-n} = \text{cis}(-n\theta) = \cos(-n\theta) + i\,\text{sen}(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta)$, então

$\Rightarrow z^n + \dfrac{1}{z^n} = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta) = 2\cos(n\theta)$

10) (ITA 1981) Sejam a e k constantes reais, sendo $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z - ai| \le ak$, qual é o de menor argumento?

a) $z = ak\sqrt{1-k^2} + ia \cdot (1-k^2)$
b) $z = k\sqrt{1-k^2} - ia \cdot (1-k^2)$
c) $z = k\sqrt{1-k^2} - i \cdot (1-k^2)$
d) $z = -k\sqrt{1-k^2} - ia \cdot (1-k^2)$
e) $z = a + ik$

RESOLUÇÃO: a
$a > 0 \wedge 0 < k < 1 \Rightarrow 0 < ak < a$
A equação $|z - ai| \le ak$ corresponde a um disco de circunferência de centro $(0, a)$ e raio ak, representado na figura a seguir.



Seja OP tangente à circunferência, então o ponto P é afixo do complexo de menor argumento. Vamos calcular as partes real OA e imaginária OB desse número complexo.
No triângulo retângulo OPA, temos:

$OP^2 = OA^2 - AP^2 = a^2 - a^2k^2 = a^2(1-k^2) \Leftrightarrow OP = a\sqrt{1-k^2}$

$OA \cdot PC = AP \cdot OP \Leftrightarrow a \cdot PC = ak \cdot a\sqrt{1-k^2} \Leftrightarrow PC = ak\sqrt{1-k^2}$

$OP^2 = OA \cdot OC \Leftrightarrow a^2(1-k^2) = a \cdot OC \Leftrightarrow OC = a(1-k^2)$

Logo, o complexo de menor argumento é $z = ak\sqrt{1-k^2} + a(1-k^2) \cdot i$.

11) (ITA 1981) O conjunto A definido por $A=\{z\in\mathbb{C};(z-i)\cdot\overline{(z-i)}=4\}$ representa no plano complexo:
a) uma elipse cujos focos se encontram nos pontos i e $-i$.
b) uma circunferência de centro no ponto $(0,1)$ e raio 2.
c) uma circunferência de centro no ponto $(0,0)$ e raio 4.
d) um par de retas que se cortam no ponto $(1,1)$.
e) nenhuma das anteriores.

RESOLUÇÃO: b
$(z-i)\cdot\overline{(z-i)}=4\Leftrightarrow|z-i|^2=4\Leftrightarrow|z-i|=2$
Essa equação significa que a distância entre os complexos z e o complexo i (ponto $(0,1)$), no plano de Argand-Gauss, é constante e igual a 2.
Logo, o conjunto A representa uma circunferência de centro $(0,1)$ e raio 2.

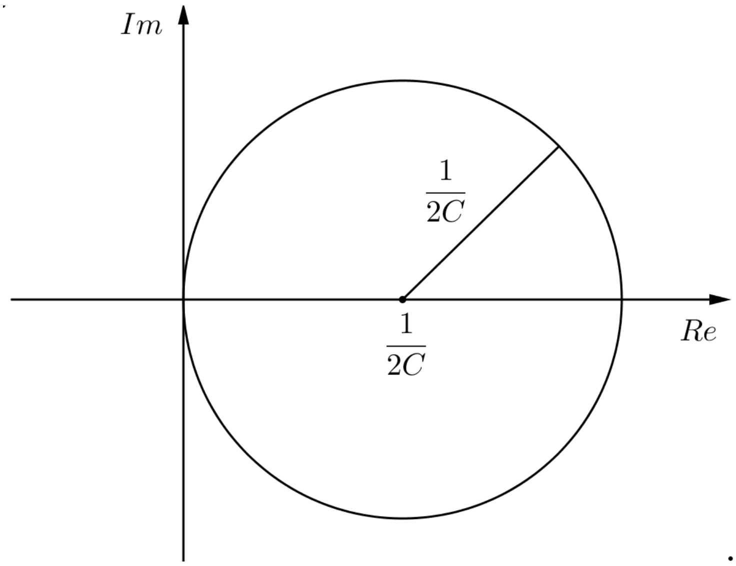
12) (ITA 1982) Considere a família de curvas do plano complexo, definida por $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=C,$ onde z é um complexo não-nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma:
a) circunferência com centro no eixo real e raio igual a C.
b) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $\frac{1}{C}$.
c) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $\frac{1}{2C}$.
d) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $\frac{1}{2C}$.
e) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a $\frac{1}{C}$.

RESOLUÇÃO: d
Seja $z=x+yi,$ com $x,y\in\mathbb{R},$ então

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i\Rightarrow\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=C$$

$$\Rightarrow\frac{x}{C}=x^2+y^2\Leftrightarrow x^2-2\cdot\frac{1}{2C}x+\frac{1}{4C^2}+y^2=\frac{1}{4C^2}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2C}\right)^2$$

Essa equação representa uma circunferência de centro $\left(\frac{1}{2C},0\right)$ e raio $\frac{1}{2C},$ que tangencia o eixo imaginário e está representada na figura a seguir.



13) (ITA 1983) Consideremos um número complexo z que possui partes real e imaginárias positivas tal que $\frac{z^2}{\overline{z}i}$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ e $\log_2(z+\overline{z}+2)=3.$ Nestas condições, podemos afirmar que:

a) não existe $\ell n\left(\frac{z-\overline{z}}{i}\right)$

b) $z^4+\ell n\left(\frac{z-\overline{z}}{i}\right)=-324$

c) $z+2\overline{z}$ é um número real.

d) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=\frac{1+i}{108}$

e) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=-\frac{(1+i)}{108}$

RESOLUÇÃO: e

$\log_2(z+\overline{z}+2)=3 \Leftrightarrow z+\overline{z}+2=2^3 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z)=6 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=3$

Seja $z=r\operatorname{cis}\theta$ a representação de z na forma trigonométrica, então

$$\frac{z^2}{\overline{z}i}=\frac{(r\operatorname{cis}\theta)^2}{r\operatorname{cis}(-\theta)\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=\frac{r^2\operatorname{cis}(2\theta)}{r\operatorname{cis}(-\theta)\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=r\operatorname{cis}\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

Como z tem partes real e imaginárias positivas, então

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<3\theta<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<3\theta-\frac{\pi}{2}<\pi.$$

$$\Rightarrow 3\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 3\theta=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)=3\Rightarrow z=3+3i=3\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{z-\bar{z}}{i}=\frac{(3+3i)-(3-3i)}{i}=6\Rightarrow \text{ existe } \ell n\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)=\ell n6$$

$$z^4=\left(3\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4=324\operatorname{cis}\pi=-324\Rightarrow z^4+\ell n\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)=-324+\ell n6$$

$$z+2\bar{z}=(3+3i)+2\cdot(3-3i)=9-3i\notin\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^3=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}\right)^3=\frac{1}{27\cdot 2\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{54\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{1+i}{108}$$

14) (ITA 1984) Sabendo-se que n é um número natural tal que $\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{3i}$ é um número real, podemos afirmar que:

a) $n=6k,\ k=0,1,2,3,\ldots$
b) $n=3\cdot(2k+1),\ k=0,1,2,3,\ldots$
c) $n=3k,\ k=0,1,2,3,\ldots$
d) $n=k,\ k=0,1,2,3,\ldots$
e) não existe valor de n natural tal que o número dado seja real

RESOLUÇÃO: b

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{3i}=\frac{\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n}{3\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=\frac{2^n\operatorname{cis}\frac{n\pi}{6}}{3\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}=\frac{2^n}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2^n}{3}\operatorname{cis}\frac{(n-3)\pi}{6}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-3)\pi}{6}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=6k+3=3\cdot(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$$

15) (ITA 1985) Seja a um número real. Os valores de $z\in\mathbb{C}$ que satisfazem $\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{a+(\bar{z})^{10}}{1-i}\right)\in\mathbb{R}$ são

a) $z=-a+i\sqrt[10]{|a|}$
b) não é possível determiná-los
c) $z=-i\sqrt[10]{|a|}$
d) não existe $z\in\mathbb{C}$ tal que isto aconteça
e) todo $z\in\mathbb{C}$

RESOLUÇÃO: e

$$\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{a+(\overline{z})^{10}}{1-i}\right)=\frac{a^2+a(\overline{z})^{10}+az^{10}+z^{10}(\overline{z})^{10}}{1^2-i^2}=$$

$$=\frac{a^2+a\left[z^{10}+(\overline{z})^{10}\right]+(z\overline{z})^{10}}{2}=\frac{a^2+\left(|z|^2\right)^{10}+a\left[z^{10}+(\overline{z})^{10}\right]}{2}$$

$$z=r\operatorname{cis}\theta\Rightarrow\overline{z}=r\operatorname{cis}(-\theta)\Rightarrow z^{10}+(\overline{z})^{10}=r^{10}\operatorname{cis}(10\theta)+r^{10}\operatorname{cis}(-10\theta)=$$

$$=r^{10}\left(\cos(10\theta)+i\operatorname{sen}(10\theta)\right)+r^{10}\left(\cos(-10\theta)+i\operatorname{sen}(-10\theta)\right)=$$

$$=r^{10}\left(\cos(10\theta)+i\operatorname{sen}(10\theta)\right)+r^{10}\left(\cos(10\theta)-i\operatorname{sen}(10\theta)\right)=2r^{10}\cos(10\theta)\in\mathbb{R}$$

Como $z^{10}+(\overline{z})^{10}\in\mathbb{R}$, então

$$\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{a+(\overline{z})^{10}}{1-i}\right)=\frac{a^2+|z|^{20}+a\left[z^{10}+(\overline{z})^{10}\right]}{2}\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$$

16) (ITA 1986) No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos seja α tal que $|\alpha|<1$. O lugar geométrico dos pontos $z\in\mathbb{C}$ que satisfazem a igualdade $\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|=1$ é:

a) Uma circunferência de centro na origem e raio 1.
b) Uma hipérbole.
c) Uma elipse de semieixo maior ou igual a 2.
d) Uma parábola.
e) Formado por duas retas concorrentes.
Nota: A notação $\overline{\alpha}$ é usada para denotar o conjugado complexo de α.

RESOLUÇÃO: a

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|=1\Leftrightarrow|z-\alpha|=|1-\overline{\alpha}z|\Leftrightarrow|z-\alpha|^2=|1-\overline{\alpha}z|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=(1-\overline{\alpha}z)\overline{(1-\overline{\alpha}z)}\Leftrightarrow(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(1-\overline{\alpha}z)(1-\overline{\overline{\alpha}}\overline{z})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})\Leftrightarrow z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=1-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|z|^2+|\alpha|^2-1-|\alpha|^2|z|^2=0\Leftrightarrow\left(|\alpha|^2-1\right)\left(1-|z|^2\right)=0$$

Sabemos que: $|\alpha|<1\Rightarrow|\alpha|^2<1\Leftrightarrow|\alpha|^2-1<0$

$\Rightarrow1-|z|^2=0\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1$

Portanto, o lugar geométrico dos complexos z que satisfazem à equação é uma circunferência de centro na origem e raio 1.

17) (ITA 1987) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u=z\cdot w+\overline{z}\cdot\overline{w}$, então o conjugado de u será necessariamente:

a) igual à $|z||w|$.
b) um número imaginário puro.
c) igual ao dobro da parte real de $z+w$.
d) igual ao dobro da parte real do número $z\cdot w$.
e) diferente de u.

RESOLUÇÃO: d

$u = z \cdot w + \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot w + \overline{z \cdot w} = 2\,\text{Re}(z \cdot w)$

18) (ITA 1987) Seja N o número de soluções reais da equação $\operatorname{sen} x = |2+3i|$. Então, temos:

a) $N > 50$ b) $N = \text{zero}$ c) $N = 2$
d) $N = 1$ e) $N > 2$ e $N < 10$

RESOLUÇÃO: b

$\operatorname{sen} x = |2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} > 1$

Como $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, para todo x, então não existe x que satisfaça a equação acima. Portanto, $N = 0$.

19) (ITA 1987) A soma de todas as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ é:

a) 1 b) 2 c) zero d) $-2\sqrt{2}i$ e) $2+\sqrt{3}i$

RESOLUÇÃO: c

Pelas relações de Girard, a soma das raízes é dada pelo simétrico do coeficiente do termo do 2º grau dividido pelo coeficiente do termo do 3º grau. Como o coeficiente do termo do 2º grau é zero, então a soma das raízes é zero.

20) (ITA 1987) Seja S a coleção de todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z| - z = 1+2i$, onde i é a unidade imaginária. Então, podemos garantir que:

a) $S = \left\{\frac{3}{2} - 2i\right\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} - 2i\right\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{4} + 4k\pi;\ k = 1, 2, 3\right\}$

d) $S = \left\{\frac{1}{4} + 3i\right\}$

e) $S = \{1+2ki;\ k = 1, 2, 3\}$

RESOLUÇÃO: a

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$|z| - z = 1+2i \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} - (x+yi) = 1+2i \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) - yi = 1+2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \Leftrightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(-2)^2}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=x+1 \Leftrightarrow x^2+4=x^2+2x+1 \ \wedge \ x+1\geq 0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow z=\frac{3}{2}-2i \Rightarrow S=\left\{\frac{3}{2}-2i\right\}$$

21) (ITA 1988) O número natural n tal que $(2i)^n+(1+i)^{2n}=-16i$ onde i é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:
a) 6 b) 3 c) 7 d) 4 e) não existe n

RESOLUÇÃO: b

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$$

$$(2i)^n+(1+i)^{2n}=-16i \Leftrightarrow (2i)^n+(2i)^n=-16i \Leftrightarrow (2i)^n=-8i$$

$$\Leftrightarrow 2^n\cdot i^n=2^3\cdot(-i) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n=2^3 \\ i^n=-i \end{cases} \Leftrightarrow n=3$$

22) (ITA 1988) Seja a equação $z^4-a-bi=0$ onde a e b são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:
a) Uma delas é um imaginário puro.
b) Os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt[4]{|a+bi|}$.
c) O seu produto é um imaginário puro.
d) Cada uma tem argumento igual a $\frac{\arg(a+bi)}{4}$.
e) A sua soma é zero.
Nota: $\arg(a+bi)$ denota o argumento do número $a+bi$.

RESOLUÇÃO: e

Pelas relações de Girard, sabemos que a soma das raízes da equação $z^4-a-bi=0$ é nula, pois é igual ao simétrico do coeficiente do termo de 3º grau dividido pelo coeficiente do termo de 4º grau. Logo, a alternativa e) é a correta.
Ainda pela relações de Girard, sabemos que o produto das raízes é $-a-bi$ que não é imaginário puro, pois a e b são reais não nulos. Isso implica que a alternativa c) está incorreta.
Seja $a+bi=r\,\mathrm{cis}\,\theta$ a representação desse número complexo na forma trigonométrica, então

$$r=|a+bi|$$

$$\theta=\arg(a+bi)$$

$$z^4-a-bi=0 \Leftrightarrow z^4=a+bi=r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

Pela 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$$z=\sqrt[4]{r}\,\mathrm{cis}\,\frac{\theta+2k\pi}{4}=\sqrt[4]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta}{4}+\frac{k\pi}{2}\right), k=0,1,2,3.$$

Logo, todas as raízes têm o mesmo módulo $\sqrt[4]{r}$ e seus argumentos são $\left(\frac{\theta}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$, com $k=0,1,2,3$. Assim, as alternativas b) e d) estão incorretas.
Vamos analisar agora a alternativa a).
Supondo que uma das raízes seja um imaginário puro, temos:
$\frac{\theta}{4}+\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k'\pi$, com $k,k'\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \theta+2k\pi=2\pi+4k'\pi \Leftrightarrow \theta=2\pi(2k'-k+1), k,k'\in\mathbb{Z}$
Isso implica $b=0$, o que contraria o enunciado.
Logo, a alternativa a) também está incorreta.

23) (ITA 1989) O produto dos números complexos $z=x+yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y=2x-1$ contida no plano complexo, é igual a:
a) $\frac{6}{5}-\frac{8i}{5}$
b) $\frac{4}{5}-\frac{2i}{5}$
c) $-\frac{8}{5}-\frac{8i}{5}$
d) $2+2i$
e) não existe nenhum número complexo que pertença à reta $y=2x-1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

RESOLUÇÃO: a
Se z está sobre a reta $y=2x-1$, então $z=x+yi=x+(2x-1)i$.
$|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |z|^2=2\Leftrightarrow x^2+(2x-1)^2=2\Leftrightarrow x^2+4x^2-4x+1=2\Leftrightarrow 5x^2-4x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=1\Rightarrow z=1+(2\cdot 1-1)i=1+i \\ \vee \\ x=-\frac{1}{5}\Rightarrow z=\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)-1\right)i=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i \end{array}\right.$$

Logo, o produto dos números complexos z que satisfazem às condições do enunciado é
$(1+i)\left(-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i\right)=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i-\frac{1}{5}i+\frac{7}{5}=\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i.$

24) (ITA 1989) Considerando que a imagem da função arcsen é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $i=\sqrt{-1}$, podemos garantir que $\operatorname{arcsen}\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|$, onde $x\in\mathbb{R}$, está definida:
a) apenas para $x=0$ e vale $\frac{\pi}{2}$.

b) para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale $\frac{\pi}{2}$.

c) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$ e seu valor depende do valor de x.
d) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 1$ e seu valor é π.
e) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de x.

RESOLUÇÃO: b

$$\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right| = \frac{|1+xi|}{|1-xi|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(-x)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{arc\,sen}\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right| = \operatorname{arc\,sen}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Logo, a função está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale $\frac{\pi}{2}$.

25) (ITA 1989) O valor da expressão $|1-z|^2 + |1+z|^2$, sendo z um número complexo, é:

a) 5 se $|z| \leq 1$.
b) 4, se $|z| = 1$.
c) 0, se $\operatorname{Im}(z) = 0$.
d) 2, para todo z.
e) 3, se $\operatorname{Re}(z) = 0$.

RESOLUÇÃO: b

Sabendo que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, temos:

$$|1-z|^2 + |1+z|^2 = (1-z)\overline{(1-z)} + (1+z)\overline{(1+z)} = (1-z)(1-\bar{z}) + (1+z)(1+\bar{z}) =$$

$$= 1 - z - \bar{z} + z\bar{z} + 1 + z + \bar{z} + z\bar{z} = 2 + 2z\bar{z} = 2\left(1+|z|^2\right)$$

Se $|z| = 1$, então $|1-z|^2 + |1+z|^2 = 2\left(1+|z|^2\right) = 2\left(1+1^2\right) = 4$.

26) (ITA 1990) A igualdade $1 + |z| = |1+z|$, onde $z \in \mathbb{C}$, é satisfeita:

a) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Im}(z) < 0$.
b) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ e $\operatorname{Im}(z) = 0$.
c) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$.
d) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z) = 0$.
e) Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$.

Nota: $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos, $\operatorname{Re}(z)$ a parte real de z e $\operatorname{Im}(z)$ a parte imaginária de z.

RESOLUÇÃO: b

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$$1 + |z| = |1+z| \Rightarrow 1 + |x+yi| = |1 + (x+yi)| \Leftrightarrow 1 + |x+yi| = |(x+1) + yi| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2=x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2 \wedge x\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2 \wedge x\ge 0 \Leftrightarrow y=0 \wedge x\ge 0$

Logo, a igualdade é satisfeita $\forall z\in\mathbb{C}$ tal que $x=\operatorname{Re}(z)\ge 0$ e $y=\operatorname{Im}(z)=0$.

27) (ITA 1990) Considere as equações $z^3=i$ e $z^2+(2+i)z+2i=0$ onde z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então:

a) $S_1\cap S_2$ é vazio.

b) $S_1\cap S_2\subset\mathbb{R}$.

c) S_1 possui apenas dois elementos distintos.

d) $S_1\cap S_2$ é unitário.

e) $S_1\cap S_2$ possui dois elementos.

RESOLUÇÃO: d

$$z^3=i=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k=0,1,2 \Leftrightarrow z=\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \vee z=\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6} \vee z=\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$S_1=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-i\right\}$$

$$z^2+(2+i)z+2i=0 \Leftrightarrow z^2-(-2-i)z+(-2)(-i)=0 \Leftrightarrow z=-2 \ \vee\ z=-i$$

$$S_2=\{-2,-i\}$$

$\Rightarrow S_1\cap S_2=\{-i\}$ que é um conjunto unitário

28) (ITA 1991) Se $z=\cos t+i\operatorname{sen} t$, onde $0<t<2\pi$, então podemos afirmar que $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i\operatorname{cotg}\dfrac{t}{2}$ b) $i\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ c) $i\operatorname{cotg} t$ d) $i\operatorname{tg} t$ e) n.d.a.

RESOLUÇÃO: a

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+(\cos t+i\operatorname{sen} t)}{1-(\cos t+i\operatorname{sen} t)}=\frac{(1+\cos t)+i\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)-i\operatorname{sen} t}\cdot\frac{(1-\cos t)+i\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)+i\operatorname{sen} t}=$$

$$=\frac{1-\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t+2i\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)^2+\operatorname{sen}^2 t}=\frac{1-1+i\cdot 2\operatorname{sen} t}{1-2\cos t+\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}=\frac{i\cdot 2\operatorname{sen} t}{2(1-\cos t)}$$

Pela fórmula de arco duplo, temos: $\cos t=1-2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \Leftrightarrow 1-\cos t=2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$

$$\Rightarrow w=\frac{i\cdot 2\cdot 2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cdot 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{t}{2}}=i\frac{\cos\frac{t}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}=i\,\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2}$$

29) (ITA 1991) Sejam $w=a+bi$, com $b\neq 0$ e $a,b,c\in\mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz+\overline{wz}+c=0$, descreve:
a) um par de retas paralelas.
b) uma circunferência.
c) uma elipse.
d) uma reta com coeficiente angular $m=\frac{a}{b}$.
e) n.d.a.

RESOLUÇÃO: d
Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, tal que $wz+\overline{wz}+c=0$, então

$$wz=(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+i(ay+bx)$$

$$wz+\overline{wz}=2\,\mathrm{Re}(wz)=2(ax-by)$$

$$wz+\overline{wz}+c=0\Leftrightarrow 2(ax-by)+c=0\Leftrightarrow 2ax-2by+c=0\Leftrightarrow y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{2b}$$

Logo, o conjunto dos números complexos z descreve uma reta com coeficiente angular $m=\frac{a}{b}$.

30) (ITA 1992) Sabe-se que $2\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{20}\right)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4-2z^2+\frac{w-16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}}=0$. Um subconjunto de S é:

a) $\left\{2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right),2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

b) $\left\{2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right),2^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right)\right\}$

c) $\left\{2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right),2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

d) $\left\{2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right),2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

e) nda

RESOLUÇÃO: d
Se $2\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{20}\right)$ é uma raiz quíntupla de w, então

$$w=\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{20}\right)^5=2^5\operatorname{cis}\frac{5\pi}{20}=32\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=32\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=16\sqrt{2}+16\sqrt{2}\cdot i$$

$$\frac{w-16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}}=\frac{\left(16\sqrt{2}+16\sqrt{2}i\right)-16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=2$$

$$\Rightarrow z^4-2z^2+\frac{w-16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}}=0\Leftrightarrow z^4-2z^2+2=0\Leftrightarrow z^2=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

Pela 2ª fórmula de De Moivre, temos:

1º) $z^2=1+i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow z=2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2},\ k=0,1\Leftrightarrow z=2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{8}\ \vee\ z=2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{9\pi}{8}$$

2º) $z^2=1-i=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$

$$\Rightarrow z=2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{2},\ k=0,1\Leftrightarrow z=2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}\ \vee\ z=2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{15\pi}{8}$$

$$\Rightarrow S=\left\{2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{8},\ 2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{9\pi}{8},\ 2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8},\ 2^{1/4}\operatorname{cis}\frac{15\pi}{8}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right),\ 2^{1/4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)\right\}\subset S$$

31) (ITA 1992) Considere o número complexo $z=a+2i$ cujo argumento está no intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Seja S o conjunto dos valores de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:

a) 4 b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ c) 8 d) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ e) nda

RESOLUÇÃO: a

Seja $z=a+2i=r\operatorname{cis}\theta$ a forma trigonométrica do número complexo z, então, pela 1ª fórmula de De Moivre, temos $z^6=r^6\operatorname{cis}(6\theta)=r^6(\cos 6\theta+i\operatorname{sen}6\theta)$.

Para que z^6 seja um número real, devemos ter

$$\operatorname{sen}6\theta=0\Leftrightarrow 6\theta=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\frac{k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \wedge\ \theta=\frac{k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\theta\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$z=a+2i\Rightarrow\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{a}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{2}{a}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}$$

$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2}{a} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Portanto, $S = \left\{2\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$ e o produto dos seus elementos é $2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4.$

32) (ITA 1993) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, sobre as soluções conclui-se que:
a) nenhuma delas é um número inteiro.
b) a soma delas é 2.
c) estas são em número de 2 e são distintas.
d) estas são em número de 4 e são 2 a 2 distintas.
e) uma delas é da forma $z = bi$ com b real não nulo.
Nota: Por $\overline{a}$ denotamos o conjugado do número complexo a.

RESOLUÇÃO: c
Seja $z = x + yi,$ com $x, y \in \mathbb{R}.$

$z^2 = \overline{2+z} \Leftrightarrow (x+yi)^2 = \overline{2+(x+yi)} \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = \overline{(x+2)+yi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = (x+2) - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x + 2 \\ 2xy = -y \end{cases}$

$2xy = -y \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - y^2 = x + 2 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow y \notin \mathbb{R}$

Logo, $z = -1$ ou $z = 2,$ ou seja, há duas raízes distintas.

33) (ITA 1993) Seja a o módulo do número complexo $\left(2 - 2\sqrt{3} \cdot i\right)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

a) $\frac{10}{11}$ b) -2 c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{5}$

RESOLUÇÃO: a

$a = \left|\left(2 - 2\sqrt{3} \cdot i\right)^{10}\right| = \left|2 - 2\sqrt{3} \cdot i\right|^{10} = \left(\sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2}\right)^{10} = (16)^5 = \left(2^4\right)^5 = 2^{20}$

$(4a)^x = a \Rightarrow \left(2^2 \cdot 2^{20}\right)^x = 2^{20} \Leftrightarrow 2^{22x} = 2^{20} \Leftrightarrow 22x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{10}{11}$

34) (ITA 1994) Considere as afirmações:
1. $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^{10} = \cos(10\theta) + i\,\text{sen}(10\theta),$ para todo $\theta \in \mathbb{R}.$

2. $\frac{5i}{2+i}=1+2i$

3. $(1-i)^4=-4$

4. Se $z^2=(\bar{z})^2$, então z é real ou imaginário puro.

5. O polinômio x^4+x^3-x-1 possui apenas raízes reais.

Podemos concluir que:
a) Todas são verdadeiras
b) Apenas quatro são verdadeiras
c) Apenas três são verdadeiras
d) Apenas duas são verdadeiras
e) Apenas uma é verdadeira

RESOLUÇÃO: b
1. VERDADEIRA
Essa afirmativa é uma aplicação da 1ª fórmula de De Moivre.
2. VERDADEIRA

$$\frac{5i}{2+i}=\frac{5i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{10i+5}{4+1}=1+2i$$

3. VERDADEIRA

$$(1-i)^4=\left((1-i)^2\right)^2=\left(1-2i+i^2\right)^2=(1-2i-1)^2=(-2i)^2=4i^2=-4$$

4. VERDADEIRA

$$z^2=(\bar{z})^2\Leftrightarrow z^2-(\bar{z})^2=0\Leftrightarrow(z+\bar{z})(z-\bar{z})=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l} z+\bar{z}=0\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z)=0\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z)=0 \\ \text{ou} \\ z-\bar{z}=0\Leftrightarrow 2\operatorname{Im}(z)=0\Leftrightarrow\operatorname{Im}(z)=0\end{array}\right.$$

Logo, z é real ou imaginário puro.
5. FALSA

$$x^4+x^3-x-1=x^3(x+1)-1(x+1)=(x+1)\left(x^3-1\right)=(x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

Como x^2+x+1 tem discriminante $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0,$ então esse fator não possui raízes reais. Logo, o polinômio x^4+x^3-x-1 possui duas raízes reais $(1\,\text{e}\,-1)$ e duas complexas.

35) (ITA 1994) Sejam x e y números reais, com $x\neq0,$ satisfazendo $(x+iy)^2=(x+y)\cdot i.$ Então:
a) x e y são números irracionais.
b) $x>0$ e $y<0$
c) x é uma raiz da equação $x^3+3x^2+2x-6=0.$
d) $x<0$ e $y=x$
e) $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$

RESOLUÇÃO: c

$(x+iy)^2=(x+y)\cdot i \Leftrightarrow (x^2-y^2)+2xyi=(x+y)i$

Vamos igualar as partes reais e imaginárias em ambo os lados.

Partes reais: $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)=0 \Leftrightarrow x+y=0 \ \vee \ x-y=0$

Partes imaginárias: $2xy=x+y$

Se $x+y=0 \Rightarrow 2xy=x+y=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} y=0 \Rightarrow x=0$ (não convém)

Se $x-y=0 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow 2xy=x+y \Rightarrow 2x^2=2x \Leftrightarrow x=y=1$

Como $1^3+3\cdot 1^2+2\cdot 1-6=0,$ então $x=1$ é raiz de $x^3+3x^2+2x-6=0.$

36) (ITA 1995) Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1|=|z_2|=4.$ Se 1 é uma raiz da equação $z_1z^6+z_2z^3-8=0,$ então a soma das raízes reais é igual a

a) -1 b) $-1+2^{1/2}$ c) $1-2^{1/3}$ d) $1+3^{1/2}$ e) $-1+3^{1/2}$

RESOLUÇÃO: c

Se 1 é uma raiz da equação $z_1z^6+z_2z^3-8=0,$ então

$z_1\cdot 1^6+z_2\cdot 1^3-8=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=8$

Como $z_1+z_2=8,$ então suas partes imaginárias são simétricas. Como $|z_1|=|z_2|=4,$ então suas partes reais são iguais ou simétricas, mas como a soma é não-nula, então $R(z_1)=R(z_2)=\frac{8}{2}=4.$

Como $|z_1|=\text{Re}(z_1)=|z_2|=\text{Re}(z_2)=4,$ então $\text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_2)=0.$ Portanto, $z_1=z_2=4.$

Assim, a equação resultante é dada por:

$4z^6+4z^3-8=0 \Leftrightarrow z^6+z^3-2=0 \Leftrightarrow (z^3-1)(z^3+2)=0 \Leftrightarrow z^3=1 \ \wedge \ z^3=-2$

As raízes reais da equação são 1 e $-\sqrt[3]{2},$ cuja soma é $1-\sqrt[3]{2}.$

37) (ITA 1995) Seja z um número complexo satisfazendo $\text{Re}(z)>0$ e $(z+i)^2+|\overline{z}+i|^2=6.$ Se n é o menor natural para o qual z^n é um imaginário puro, então n é igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO: b

Seja $z=x+yi,$ com $x,y\in\mathbb{R}$ e $\text{Re}(z)=x>0.$

$(z+i)^2+|\bar{z}+i|^2=6 \Leftrightarrow ((x+yi)+i)^2+|(x-yi)+i|^2=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+(y+1)i)^2+|x+(1-y)i|^2=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x(y+1)i-(y+1)^2+x^2+(1-y)^2=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4y+2x(y+1)i=6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4y=6 \\ 2x(y+1)=0 \end{cases}$$

$2x(y+1)=0 \ \wedge \ x>0 \Rightarrow y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

$\Rightarrow 2x^2=4y+6=4\cdot(-1)+6=2 \Leftrightarrow x^2=1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$

$\Rightarrow z=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$

Vamos usar a 1ª fórmula de De Moivre para obter z^n.

$z^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\operatorname{cis}\frac{7n\pi}{4}$

Para $n=2,$ temos:

$z^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\operatorname{cis}\frac{7\cdot 2\pi}{4}=2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{2}=2\operatorname{cis}\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}=-2i$

que é um imaginário puro.

Logo, $n=2$ é o menor valor natural que satisfaz as condições pedidas.

38) (ITA 1996) O valor da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

a) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ d) $\left(\sqrt{2}\right)^{93}i$ e) $\left(\sqrt{2}\right)^{93}+i$

RESOLUÇÃO: a

$\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}=\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}=\left(\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\right)^{93}=\operatorname{cis}\frac{93\cdot 7\pi}{4}=\operatorname{cis}\frac{651\pi}{4}=\operatorname{cis}\left(81\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}=$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

39) (ITA 1997) Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem, simultaneamente, as equações: $|z-3i|=3$ e $|z+i|=|z-2-i|$. O produto de todos os elementos de S é igual a:

a) $-2+i\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}+3i\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}-2i\sqrt{3}$ d) $-3+3i$ e) $-2+2i$

RESOLUÇÃO: d

A equação $|z-3i|=3$ corresponde no plano de Argand-Gauss a uma circunferência de centro em $3i$ e raio 3.

A equação $|z+i|=|z-2-i|$ corresponde no plano de Argand-Gauss à reta mediatriz entre $-i$ e $2+i$.

A interseção dessa reta mediatriz com a circunferência são dois pontos. Vamos usar um argumento algébrico para identificar esses pontos.

Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, então

$$|z-3i|=3\Leftrightarrow\left|x+(y-3)i\right|=3\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=3^2$$

$$|z+i|=|z-2-i|\Leftrightarrow\left|x+(y+1)i\right|=\left|(x-2)+(y-1)i\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2-4x+4+y^2-2y+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+4y=4\Leftrightarrow y=-x+1$$

Substituindo $y=-x+1$ na equação da circunferência, temos:

$$x^2+(-x+1-3)^2=9\Leftrightarrow x^2+(x+2)^2=9\Leftrightarrow 2x^2+4x-5=0\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=-1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow y=2-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow z_1=\left(-1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(2-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)i \\ x=-1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow y=2+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow z_2=\left(-1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(2+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\{z_1,z_2\}$$

O produto de todos os elementos de S é

$$z_1\cdot z_2=\left[\left(-1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(2-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)i\right]\cdot\left[\left(-1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(2+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)i\right]=$$

$$=\left(1-\frac{14}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)i+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)i-\left(4-\frac{14}{4}\right)=-3+3i$$

40) (ITA 1997) Considere no plano complexo um hexágono regular centrado em $z_0=i$. Represente por $z_1,z_2,\ldots,z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1=1$ então $2z_3$ é igual a

a) $2+4i$

b) $\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+3\right)i$

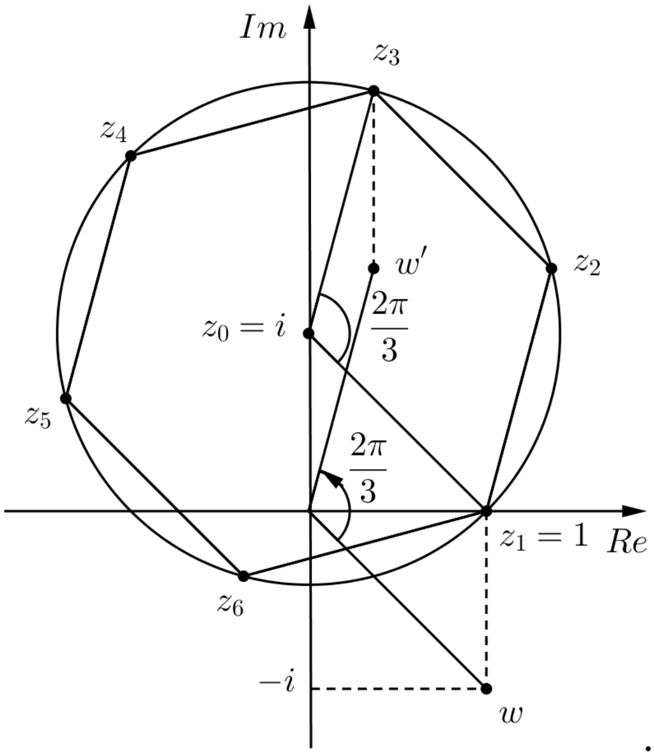
c) $\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+2\right)i$

d) $\left(2\sqrt{3}-1\right)+\left(2\sqrt{3}+3\right)i$

e) $\sqrt{2}+\left(\sqrt{6}+2\right)i$

RESOLUÇÃO: b

A figura a seguir representa os números complexos citados no enunciado no plano de Argand-Gauss.



Seja $w = z_1 - z_0 = 1 - i$. Vamos obter w' a partir da rotação de w por um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ no sentido anti-horário. Assim, temos:

$$w' = (1-i)\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{12} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

O número complexo $z_3 = w' + i$, então

$$\Rightarrow z_3 = w' + i = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i + i = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+3}{2}i$$

$$\Rightarrow 2z_3 = w' + i = \left(\sqrt{3}-1\right) + \left(\sqrt{3}+3\right)i$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}45^\circ\cos30^\circ - \operatorname{sen}30^\circ\cos45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = \cos15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos45^\circ\cos30^\circ + \operatorname{sen}30^\circ\operatorname{sen}45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

41) (ITA 1997) Considere os números complexos $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ e $w=1+i\sqrt{3}$. Se $m=\left|\dfrac{w^6+3z^4+4i}{z^2+w^3+6-2i}\right|^2$, então m vale:

a) 34 b) 26 c) 16 d) 4 e) 1

RESOLUÇÃO: a
Vamos representar os números complexos z e w na forma trigonométrica.

$$z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$w=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$$

Pela 1ª fórmula de De Moivre, temos:

$$w^6=2^6\operatorname{cis}\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)=64\cdot\operatorname{cis}2\pi=64$$

$$w^3=2^3\operatorname{cis}\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=8\cdot\operatorname{cis}\pi=-8$$

$$z^4=2^4\operatorname{cis}\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)=16\cdot\operatorname{cis}\pi=-16$$

$$z^2=2^2\operatorname{cis}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=4\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}=4i$$

Assim, temos:

$$m=\left|\frac{w^6+3z^4+4i}{z^2+w^3+6-2i}\right|^2=\left|\frac{64+3\cdot(-16)+4i}{4i+(-8)+6-2i}\right|^2=\left|\frac{16+4i}{-2+2i}\right|^2=\frac{|8+2i|^2}{|-1+i|^2}=\frac{8^2+2^2}{(-1)^2+1^2}=34$$

42) (ITA 1998) Sejam x e y números reais tais que: $\begin{cases}x^3-3xy^2=1\\3x^2y-y^3=1\end{cases}$. Então, o número complexo $z=x+iy$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

a) $1-i$ e $\sqrt[6]{2}$ b) $1+i$ e $\sqrt[6]{2}$ c) i e 1 d) $-i$ e 1 e) $1+i$ e $\sqrt[3]{2}$

RESOLUÇÃO: b

$$z=x+iy\Rightarrow z^3=(x+yi)^3=x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+y^3i^3=$$
$$=\left(x^3-3xy^2\right)+\left(3x^2y-y^3\right)i=1+i$$

$$|z|^3=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\Rightarrow|z|=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$$

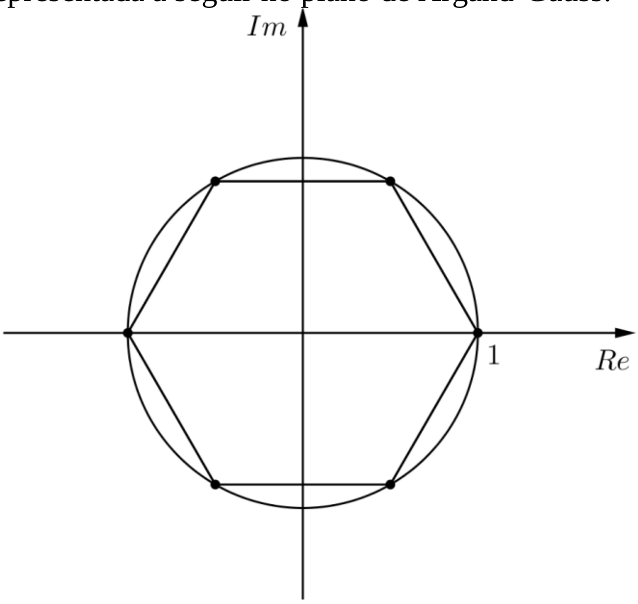
43) (ITA 1998) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6=1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) π d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) 2π

RESOLUÇÃO: d

As soluções da equação $z^6=1$ formam, no plano de Argand-Gauss, um hexágono inscrito em uma circunferência de raio 1. Portanto, sua área é $S=6\cdot\frac{1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Essa situação está representada a seguir no plano de Argand-Gauss:



Observe, ainda, que, pela 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$z^6=1=\text{cis}0 \Leftrightarrow z=1\text{cis}\frac{2k\pi}{6},\ k=0,1,2,\ldots,5.$

44) (ITA 1999) O conjunto de todos os números complexos z, $z\neq 0$, que satisfazem a igualdade $|z+1+i|=\big||z|-|1+i|\big|$ é:

a) $\left\{z\in\mathbb{C}:\arg z=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{z\in\mathbb{C}:\arg z=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\ \text{ e }\ \arg z=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=\sqrt{2}\ \text{ e }\ \arg z=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{z\in\mathbb{C}:\arg z=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

RESOLUÇÃO: a

Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, então

$|z+1+i|=\big||z|-|1+i|\big| \Leftrightarrow \left|(x+1)+(y+1)i\right|^2=\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{1^2+1^2}\right|^2 \Leftrightarrow$

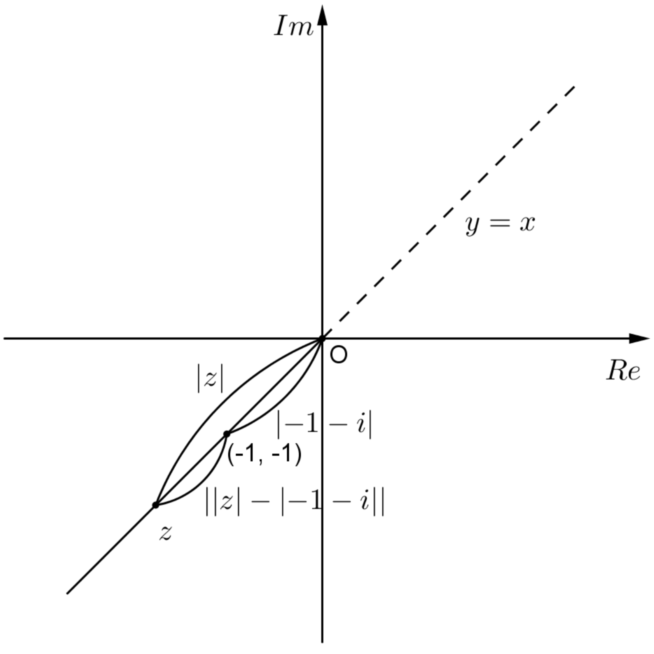
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 = x^2+y^2-2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1 = x^2+y^2-2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = -x-y$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right) = x^2+2xy+y^2 \wedge x+y\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=0 \wedge x+y\le 0 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \wedge x+y\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=y\le 0$$

Assim, $z=x+ix$, com $x\le 0$, o que implica que $|z|=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}\cdot|x|=-\sqrt{2}\cdot x$. Note que, como $x\le 0$, então $|x|=-x$.

Logo, a forma trigonométrica de z é $z=-\sqrt{2}x\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}x\cdot \text{cis}\frac{5\pi}{4}$.

Como x assume qualquer valor real não-positivo, então o conjunto de todos os números complexos z corresponde ao conjunto de todos os números complexos de argumento $\frac{5\pi}{4}$, ou seja, $\left\{z\in\mathbb{C}:\arg z=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Observe ainda que $|z+1+i|=\left||z|-|1+i|\right| \Leftrightarrow |z-(-1-i)|=\left||z|-|-1-i|\right|$ é uma expressão da desigualdade triangular, onde a igualdade ocorre apenas quando os vértices do triângulo estão alinhados, conforme representação a seguir no plano de Argand-Gauss.



Note que se z estivesse no primeiro quadrante teríamos $|z-(-1-i)|=\left||z|+|-1-i|\right|$.

45) (ITA 1999) Sejam a_k e b_k números reais com $k=1,2,\dots,6$. Os números complexos $z_k=a_k+i\cdot b_k$ são tais que $|z_k|=2$ e $b_k\ge 0$, para todo $k=1,2,\dots,6$. Se $(a_1,a_2,\dots,a_6)$ é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{5}$ e soma 9, então z_3 é igual a:

a) $2i$ b) $\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$ c) $\sqrt{3}$ + i

d) $\frac{-3\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{73}}{5}i$ e) $\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{17}}{5}i$

RESOLUÇÃO: b

A $PA:(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ tem razão $r=-\frac{1}{5}$ e soma $S_6=9$, então

$$S_6=\frac{\left(2a_1+5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right)\cdot 6}{2}=9\Leftrightarrow 2a_1-1=3\Leftrightarrow a_1=2$$

$$\Rightarrow a_3=a_1+2r=2+2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}$$

$$|z_3|=2\Rightarrow a_3^2+b_3^2=2^2\Leftrightarrow\left(\frac{8}{5}\right)^2+b_3^2=4\Leftrightarrow b_3^2=\frac{36}{25}$$

$$b_3\geq 0\Rightarrow b_3=\frac{6}{5}\Rightarrow z_3=a_3+ib_3=\frac{8}{5}+i\cdot\frac{6}{5}$$

46) (ITA 2000) Seja z_o o número complexo $1+i$. Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z-z_o|=|z+z_o|=2$, então o produto dos elementos de S é igual a

a) $4(1-i)$ b) $2(1+i)$ c) $2(i-1)$ d) $-2i$ e) $2i$

RESOLUÇÃO: e

Observe, inicialmente, que os números complexos z correspondem aos dois pontos de interseção entre a circunferência de centro $(1,1)$ e raio 2 e a circunferência de centro $(-1,-1)$ e raio 2 no plano de Argand-Gauss.

Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, então

$$|z-z_o|=2\Leftrightarrow|(x+yi)-(1+i)|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=2^2$$

$$|z+z_o|=2\Leftrightarrow|(x+yi)+(1+i)|=2\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+1)^2=2^2$$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow(x+1)^2-(x-1)^2=(y-1)^2-(y+1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot 2=2y\cdot(-2)\Leftrightarrow x=-y$$

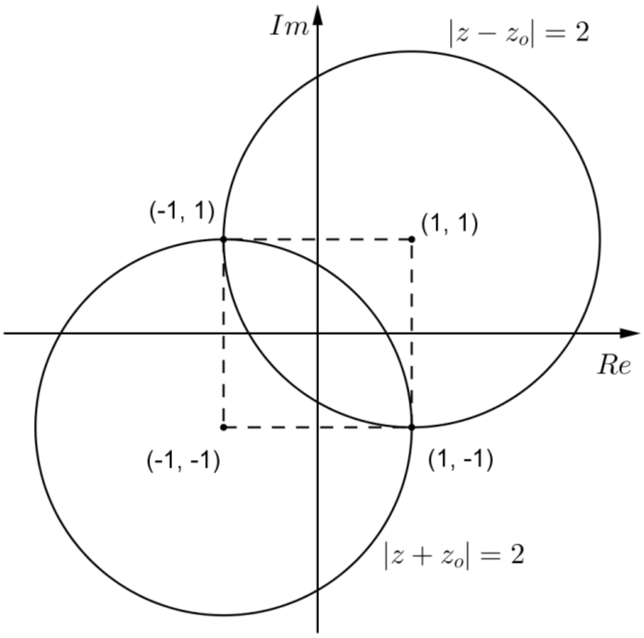
$$\Rightarrow(x-1)^2+(-x-1)^2=4\Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2+2x+1=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1\Leftrightarrow y=\mp 1$$

$$(x,y)\in\{(1,-1);(-1,1)\}\Rightarrow S=\{1-i,-1+i\}$$

Logo, o produto dos elementos de S é $(1-i)\cdot(-1+i)=2i$.

A situação do problema está representada a seguir no plano de Argand-Gauss.



47) (ITA 2001) A parte imaginária de $((1+\cos 2x)+i\,\text{sen}\,2x)^k$, k inteiro positivo, e real, é

a) $2\,\text{sen}^k\,x\cos^k x$ b) $\text{sen}^k\,x\cos^k x$

c) $2^k\,\text{sen}\,kx\cos^k x$ d) $2^k\,\text{sen}^k\,x\cos^k x$

e) $\text{sen}\,kx\cos^k x$

RESOLUÇÃO: c

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow 1+\cos 2x = 2\cos^2 x$

$z = ((1+\cos 2x)+i\,\text{sen}\,2x)^k = \left(2\cos^2 x + i\cdot 2\,\text{sen}\,x\cos x\right)^k =$

$= (2\cos x)^k(\cos x + i\,\text{sen}\,x)^k = 2^k\cdot\cos^k x(\cos kx + i\,\text{sen}\,kx)$

$\Rightarrow \text{Im}(z) = 2^k\cdot\cos^k x\cdot\text{sen}\,kx$

48) (ITA 2001) O número complexo $z = \dfrac{1-\cos a}{\text{sen}\,a\cos a} + i\dfrac{1-2\cos a+2\,\text{sen}\,a}{\text{sen}\,2a}$, $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem argumento $\dfrac{\pi}{4}$. Nesse caso, a é igual a:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{\pi}{5}$ e) $\dfrac{\pi}{9}$

RESOLUÇÃO: a

Inicialmente, observemos que, como $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, então $\text{sen}\,a$ e $\cos a$ são não-nulos.

Como $z=\frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a\cos a}+i\frac{1-2\cos a+2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}$ tem argumento $\frac{\pi}{4}$, então

$$\frac{\frac{1-2\cos a+2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}}{\frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a\cos a}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow\frac{1-2\cos a+2\operatorname{sen} a}{2\operatorname{sen} a\cos a}=\frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a\cos a}\Leftrightarrow$$

$$1-2\cos a+2\operatorname{sen} a=2-2\cos a\Leftrightarrow\operatorname{sen} a=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} a=\frac{1}{2}\ \wedge\ a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow a=\frac{\pi}{6}$$

49) (ITA 2001) Seja $z=1+i\sqrt{3}$, $z\cdot\bar{w}=1$ e $\alpha\in[0,2\pi]$ é um argumento de $z\cdot w$, então α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

RESOLUÇÃO: c

$$z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$$

$$z\cdot\bar{w}=1\Leftrightarrow\bar{w}=\frac{1}{z}=\frac{1}{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow w=\frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z\cdot w=\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)=1\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha\in[0,2\pi]\Rightarrow\alpha=\frac{2\pi}{3}$$

50) (ITA 2002) Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2+b^2=0$. Se $z,w\in\mathbb{C}$ satisfazem a $\begin{cases}\bar{z}w+z\bar{w}=6a\\ \bar{z}w-z\bar{w}=8b\end{cases}$, determine o valor de $|a|$ de forma que $|zw|=1$.

RESOLUÇÃO:

$$(zw)\cdot\overline{(zw)}=|zw|^2=1\Leftrightarrow zw\cdot\bar{z}\bar{w}=1\Leftrightarrow(\bar{z}w)\cdot(z\bar{w})=1$$

$$a^2+b^2=0\Rightarrow\left(\frac{\bar{z}w+z\bar{w}}{6}\right)^2+\left(\frac{\bar{z}w-z\bar{w}}{8}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\bar{z}w)^2+2(z\bar{w})(z\bar{w})+(z\bar{w})^2}{36}+\frac{(\bar{z}w)^2-2(z\bar{w})(z\bar{w})+(z\bar{w})^2}{64}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot\left((\bar{z}w)^2+2+(z\bar{w})^2\right)+9\cdot\left((\bar{z}w)^2-2+(z\bar{w})^2\right)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 25\cdot\left((\bar{z}w)^2+(z\bar{w})^2\right)=-14 \Leftrightarrow (\bar{z}w)^2+(z\bar{w})^2=-\frac{14}{25}$

$a^2=\left(\frac{\bar{z}w+z\bar{w}}{6}\right)^2=\frac{(\bar{z}w)^2+2(z\bar{w})(z\bar{w})+(z\bar{w})^2}{36}=\frac{(\bar{z}w)^2+(z\bar{w})^2+2}{36}=\frac{-\frac{14}{25}+2}{36}=\frac{1}{25}$

$\Leftrightarrow |a|=\frac{1}{5}$

51) (ITA 2002) Seja a equação em $\mathbb{C}$, $z^4-z^2+1=0$. Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-i$ e) $\frac{i}{2}$

RESOLUÇÃO: d

$z^2=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$z^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{cis}\frac{\pi}{3}\Rightarrow z=\text{cis}\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2},\ k=0,1$

$k=0\Rightarrow z_1=\text{cis}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$

$k=1\Rightarrow z_2=\text{cis}\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}=\text{cis}\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}$

$z^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{cis}\frac{5\pi}{3}\Rightarrow z=\text{cis}\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{2},\ k=0,1$

$k=0\Rightarrow z_3=\text{cis}\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$

$k=1\Rightarrow z_4=\text{cis}\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{2}=\text{cis}\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z_2+z_4=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-i$

Portanto, a soma de duas raízes dessa equação é $-i$.

52) (ITA 2003) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número $w=\frac{z+\bar{z}+2}{\sqrt{|z-1|+|z+1|-3}}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) esse conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

RESOLUÇÃO:

$z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)\Rightarrow z+\bar{z}+2=2\operatorname{Re}(z)+2\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$

$w=\dfrac{z+\bar{z}+2}{\sqrt{|z-1|+|z+1|-3}}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\sqrt{|z-1|+|z+1|-3}\in\mathbb{R}^*$

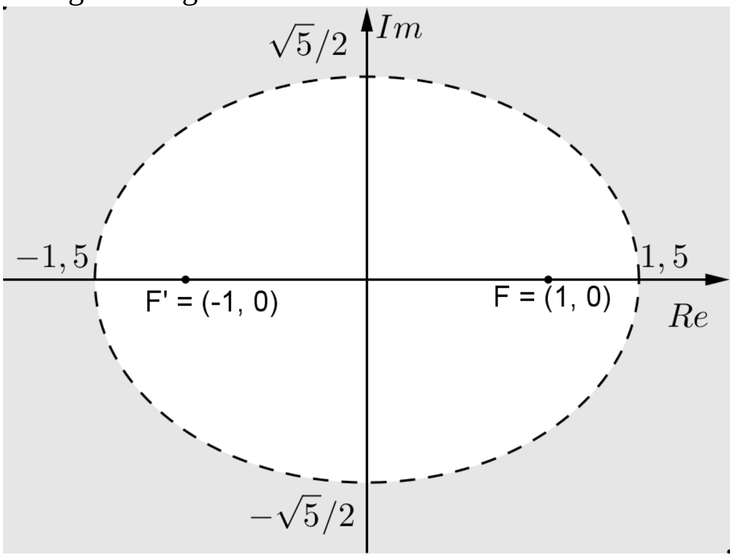
Observe que $|z-1|+|z+1|-3$, então para que w será um número real se, e somente se, o raiz quadrada estiver definida e for não-nula, o que ocorre quando o radicando é positivo.

$\Leftrightarrow|z-1|+|z+1|-3>0\Leftrightarrow|z-1|+|z-(-1)|>3$

Sabemos que $|z-1|$ representa a distância de z ao ponto $(1,0)$ e $|z+1|$ representa a distância de z ao ponto $(-1,0)$, então a equação $|z-1|+|z-(-1)|=3$ significa que a soma das distâncias de z aos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$ é igual a 3, ou seja, z está sobre uma elipse de focos $(1,0)$ e $(-1,0)$ e eixo maior $2a=3.$ O semieixo menor é dado por

$b^2=a^2-c^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-1^2=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

A equação $|z-1|+|z-(-1)|>3$ representa a região exterior à elipse descrita acima, conforme mostra a figura a seguir.



53) (ITA 2003) Seja $z\in\mathbb{C}.$ Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $w=\dfrac{2iz^2+5\bar{z}-i}{1+3\bar{z}^2+2iz+3|z|^2+2|z|}$, então $\bar{w}=\dfrac{-2i\bar{z}^2+5z+i}{1+3z^2-2i\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|}.$

II. Se $z\neq0$ e $w=\dfrac{2iz+3i+3}{(1+2i)z}$, então $|w|\le\dfrac{2|z|+3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}.$

III. Se $w=\dfrac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3}+4i}$, então $2\arg z+\dfrac{\pi}{12}$ é um argumento de w.

é(são) verdadeira(s):

a) todas
b) apenas I e II
c) apenas II e III
d) apenas I e III
e) apenas II

RESOLUÇÃO: a

I. VERDADEIRA

$$z=\frac{z_1}{z_2}\Rightarrow z\cdot\bar{z}=|z|^2\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\cdot\bar{z}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}\cdot\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_1}{z_2.\bar{z}_2}\cdot\frac{z_2}{z_1}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$|z|=|\bar{z}|$

$$\bar{w}=\frac{\overline{2iz^2+5\bar{z}-i}}{\overline{1+3z^2+2iz+3|z|^2+2|z|}}=\frac{2(-i)\bar{z}^2+5z+i}{1+3\bar{z}^2+2(-i)\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|}=$$

$$=\frac{-2i\bar{z}^2+5z+i}{1+3z^2-2i\bar{z}+3|\bar{z}|^2+2|z|}$$

II. VERDADEIRA

Sabemos, pela desigualdade triangular, que $|p+q|\le|p|+|q|$, então

$$|w|=\frac{|2iz+3i+3|}{|(1+2i)z|}=\frac{|2iz+3(1+i)|}{|1+2i||z|}\le\frac{|2iz|+|3(1+i)|}{\sqrt{5}|z|}=\frac{2|z|+3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$$

III. VERDADEIRA

Seja $z=r\,\mathrm{cis}\,\theta$ a representação de z na forma trigonométrica.

$$w=\frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3}+4i}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^2}{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}\cdot r^2\,\mathrm{cis}(2\theta)}{8\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{r^2\sqrt{2}}{8}\mathrm{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{r^2\sqrt{2}}{8}\mathrm{cis}\left(2\theta+\frac{\pi}{12}\right)$$

Como $\theta=\arg z$, então um argumento de w é $2\arg z+\frac{\pi}{12}$.

54) (ITA 2004) Sendo $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60}z^n\right|=\left|z+z^2+z^3+\ldots+z^{60}\right|$.

RESOLUÇÃO:

A expressão $S_{60}=z+z^2+z^3+\ldots+z^{60}$ é a soma dos 60 primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1=z$ e razão $q=z$, então $S_{60}=\frac{z\cdot(z^{60}-1)}{z-1}$.

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}\Rightarrow z^{60}=\mathrm{cis}\frac{60\pi}{4}=\mathrm{cis}\,15\pi=\mathrm{cis}\,\pi=-1$$

$$z-1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}-1=\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\Rightarrow|z-1|^2=\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2-4\sqrt{2}+4+2}{4}=2-\sqrt{2}\Rightarrow|z-1|=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z+z^2+z^3+\ldots+z^{60}\right| = \left|\frac{z\left(z^{60}-1\right)}{z-1}\right| = \frac{|z||-1-1|}{|z-1|} =$$

$$= \frac{1\cdot 2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

55) (ITA 2004) A soma das raízes da equação $z^3+z^2-|z|^2+2z=0,\ z\in\mathbb{C},$ é igual a
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

RESOLUÇÃO: a
Sabemos que $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, então

$$z^3+z^2-|z|^2+2z=0 \Leftrightarrow z^3+z^2-z\cdot\bar{z}+2z=0 \Leftrightarrow z\cdot\left(z^2+z-\bar{z}+2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=0 \ \vee\ z^2+z-\bar{z}+2=0$$

Seja $z=x+yi,$ com $x,y\in\mathbb{R},$ então

$$z^2+z-\bar{z}+2=0 \Leftrightarrow (x+yi)^2+(x+yi)-(x-yi)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi+2yi+2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-y^2+2\right)+2y(x+1)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2=0 \\ 2y(x+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \ \vee\ x=-1 \end{cases}$$

$$y=0 \Rightarrow x^2=y^2-2=0^2-2=-2 \Rightarrow x\notin\mathbb{R}$$

$$x=-1 \Rightarrow y^2=x^2+2=(-1)^2+2=3 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

Logo, as raízes são $z_1=0,\ z_2=-1+\sqrt{3}$ e $z_3=-1-\sqrt{3},$ cuja soma é -2.

56) (ITA 2004) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad f(x)=2\cos x+2i\,\mathrm{sen}\,x.$ Então, $\forall x,y\in\mathbb{R},$ o valor do produto $f(x)\cdot f(y)$ é igual a
a) $f(x+y)$ b) $2f(x+y)$ c) $4if(x+y)$
d) $f(xy)$ e) $2f(x)+2if(y)$

RESOLUÇÃO: b

$$f(x)=2\cos x+2i\,\mathrm{sen}\,x=2(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x)=2\,\mathrm{cis}\,x$$

$$f(y)=2\cos y+2i\,\mathrm{sen}\,y=2(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y)=2\,\mathrm{cis}\,y$$

Considerando que, para multiplicar números complexos na forma trigonométrica, devemos multiplicar seus módulos e somar os seus argumentos, então temos:

$$f(x)\cdot f(y)=2\,\mathrm{cis}\,x\cdot 2\,\mathrm{cis}\,y=4\,\mathrm{cis}(x+y)=2\cdot 2\,\mathrm{cis}(x+y)=2\cdot f(x+y)$$

Observe que $f(x+y)=2\cos(x+y)+2i\,\mathrm{sen}(x+y)=2\,\mathrm{cis}(x+y).$

57) (ITA 2005) Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\dfrac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor

a) maior que 1, para todo w com $|w| > 1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w| < 1$.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$.
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

RESOLUÇÃO: d
Sabemos que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, então $|z| = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1^2 = 1$. Vamos substituir 1 por $z \cdot \bar{z}$ na expressão a seguir.

$$\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right| = \left|\frac{z\bar{z}-\bar{z}w}{z-w}\right| = \frac{|\bar{z}(z-w)|}{|z-w|} = \frac{|\bar{z}||z-w|}{|z-w|} = |\bar{z}| = 1, \text{ para } w \neq z.$$

58) (ITA 2006) Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^n = i\,\text{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que:

a) $2n\alpha$ é múltiplo de 2α.
b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π.
c) $n\alpha - \dfrac{\pi}{4}$ é múltiplo de $\dfrac{\pi}{2}$.
d) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2.
e) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π.

RESOLUÇÃO: b
A representação de z na forma trigonométrica é $z = |z| \text{cis}\,\alpha$, então

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = \left(\frac{|z|\text{cis}\,\alpha}{|z|}\right)^n = (\text{cis}\,\alpha)^n = \text{cis}(n\alpha) = \cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha) = i\,\text{sen}(n\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n\alpha - \pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π.

59) (ITA 2006) Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a:

a) 1 b) $2z$ c) $2\,\text{Re}\,z$ d) $2\,\text{Im}\,z$ e) $2|z|^2$

RESOLUÇÃO: c
Para resolver essa questão, vamos usar a relação $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Assim, temos:

$$|f(z) - f(1)| = |z-1| \Rightarrow |f(z) - f(1)|^2 = |z-1|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(z) - f(1))\overline{(f(z) - f(1))} = (z-1)\overline{(z-1)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(f(z)-f(1)\right)\left(\overline{f(z)}-\overline{f(1)}\right)=(z-1)(\overline{z}-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(z)\cdot\overline{f(z)}-f(z)\cdot\overline{f(1)}-f(1)\cdot\overline{f(z)}+f(1)\cdot\overline{f(1)}=z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f(z)|^2-f(z)\cdot\overline{f(1)}-f(1)\cdot\overline{f(z)}+|f(1)|^2=|z|^2-z-\overline{z}+1\Leftrightarrow$

Vamos substituir $|f(z)|=|z|$ e $|f(1)|=|1|=1$ na igualdade acima.

$\Leftrightarrow |z|^2-f(z)\cdot\overline{f(1)}-f(1)\cdot\overline{f(z)}+1^2=|z|^2-z-\overline{z}+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(z)\cdot\overline{f(1)}+f(1)\cdot\overline{f(z)}=z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$

60) (ITA 2007) Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que $\dfrac{\overline{z}}{z-2i}+\dfrac{2z}{\overline{z}+2i}=3$ e $0<|z-2i|\le 1$.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, notemos que $\dfrac{\overline{z}}{z-2i}=\overline{\left(\dfrac{z}{\overline{z}+2i}\right)}$. Fazendo $\dfrac{z}{\overline{z}+2i}=w=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, temos:

$\dfrac{\overline{z}}{z-2i}+\dfrac{2z}{\overline{z}+2i}=3\Rightarrow \overline{w}+2w=3\Rightarrow (x-yi)+2(x+yi)=3\Leftrightarrow$

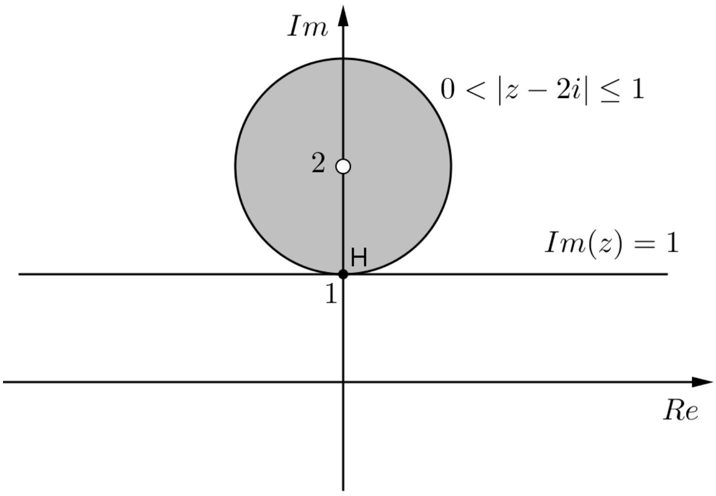
$\Leftrightarrow 3x+yi=3\Leftrightarrow 3x=3\wedge y=0\Leftrightarrow x=1\wedge y=0$

$\Rightarrow \dfrac{z}{\overline{z}+2i}=1\Leftrightarrow z=\overline{z}+2i\Leftrightarrow z-\overline{z}=2i\Leftrightarrow 2\cdot\operatorname{Im}(z)\cdot i=2i\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=1$

Logo, o conjunto dos números complexos z que satisfazem $\dfrac{\overline{z}}{z-2i}+\dfrac{2z}{\overline{z}+2i}=3$ é a reta $y=1$ no plano de Argand-Gauss.

A desigualdade $0<|z-2i|\le 1$ corresponde a um disco de circunferência de centro $(0,2)$ e raio 1, exceto o centro.

Como a reta $y=1$ tangencia a circunferência de centro $(0,2)$ e raio 1 no ponto $(0,1)$, então o conjunto A dos números complexos que satisfazem às duas expressões é composto apenas pelo ponto de tangência, ou seja, $A=\{i\}$.



Note que o número complexo i é afixo do ponto $(0,1)$ do plano de Argand-Gauss.

61) (ITA 2007) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo $\frac{1}{1+i\cot g\,x}$, $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

a) $|\cos x|$ b) $\frac{1+\operatorname{sen} x}{2}$ c) $\cos^2 x$ d) $|\operatorname{cossec} x|$ e) $|\operatorname{sen} x|$ |

RESOLUÇÃO: e

$|1+i\cot g\ x| = \sqrt{1+\cot g^2\ x} = \sqrt{\operatorname{cossec}^2\ x} = |\operatorname{cossec}\ x| = \frac{1}{|\operatorname{sen}\ x|}$.

Assim, $\left|\frac{1}{1+i\cot g\ x}\right| = \frac{1}{|1+i\cot g\ x|} = |\operatorname{sen}\ x|$

62) (ITA 2007) Considere a equação $16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = \left(\frac{1+1}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^4$. Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

RESOLUÇÃO: b

$16\left(\frac{1-i\,x}{1+i\,x}\right)^3 = (2i)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{1-i\,x}{1+i\,x}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow (1+i\,x)^3 - (1-i\,x)^3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2i\,x)(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{3}$

Logo, a soma dos quadrados é $0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$.

63) (ITA 2008) Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a $S = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z+2| < 3\}$.

RESOLUÇÃO:

$4z^6 + 256 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -64 \Leftrightarrow z^6 = 64\ \text{cis}\ \pi$

Pela 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$$z = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right),\ k = 0,1,2,3,4,5 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow z_1 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i \\ k = 1 \Rightarrow z_2 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{2} = 2i \\ k = 2 \Rightarrow z_3 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i \\ k = 3 \Rightarrow z_4 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} - i \\ k = 4 \Rightarrow z_5 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{2} = -2i \\ k = 5 \Rightarrow z_6 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{11\pi}{6} = \sqrt{3} - i \end{array}\right.$$

Observe que as raízes da equação são vértices de um hexágono inscrito em uma circunferência de raio 2 e centro na origem.

A equação $S = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z + 2| < 3\}$ representa o interior de uma coroa circular de centro em $(-2, 0)$ e raios 1 e 3.

A fim de verificar quais raízes pertencem a S, podemos calcular $|z_i + 2|^2$, para $i = 1, 2, \ldots, 6$, e verificar se o resultado pertence a $]1, 9[$, pois $1 < |z + 2| < 3 \Leftrightarrow 1 < |z + 2|^2 < 3^2 = 9$.

$$|z_1 + 2|^2 = \left|\left(\sqrt{3} + i\right) + 2\right|^2 = \left|\left(2 + \sqrt{3}\right) + i\right|^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 8 + 4\sqrt{3} > 9$$

$$|z_2 + 2|^2 = |2i + 2|^2 = 2^2 + 2^2 = 4 \in]1, 9[$$

$$|z_3 + 2|^2 = \left|\left(-\sqrt{3} + i\right) + 2\right|^2 = \left|\left(2 - \sqrt{3}\right) + i\right|^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1{,}08 \in]1, 9[$$

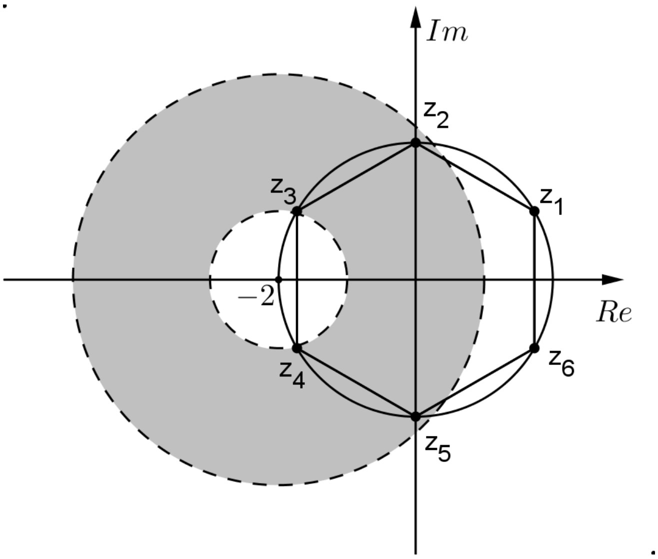
$$|z_4 + 2|^2 = \left|\left(-\sqrt{3} - i\right) + 2\right|^2 = \left|\left(2 - \sqrt{3}\right) - i\right|^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1{,}08 \in]1, 9[$$

$$|z_5 + 2|^2 = |-2i + 2|^2 = 2^2 + (-2)^2 = 4 \in]1, 9[$$

$$|z_6 + 2|^2 = \left|\left(\sqrt{3} - i\right) + 2\right|^2 = \left|\left(2 + \sqrt{3}\right) - i\right|^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 = 8 + 4\sqrt{3} > 9$$

Logos, as raízes que pertencem a S são $\pm 2i$ e $-\sqrt{3} \pm i$.

A figura a seguir é uma representação no plano de Argand-Gauss da situação descrita no problema.



64) (ITA 2008) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

a) – 2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

RESOLUÇÃO: b

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$$

$$\beta \cdot \overline{\beta} = |\beta|^2 = 1$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)\overline{(\alpha - \beta)} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)\left(\overline{\alpha} - \overline{\beta}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\alpha\overline{\alpha}} - \alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha} + \cancel{\beta\overline{\beta}} = \cancel{2} \Leftrightarrow \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

65) (ITA 2009) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \text{Re } w \le -13 \text{ e } \text{Im } w \le 4\right\}.$$

RESOLUÇÃO:

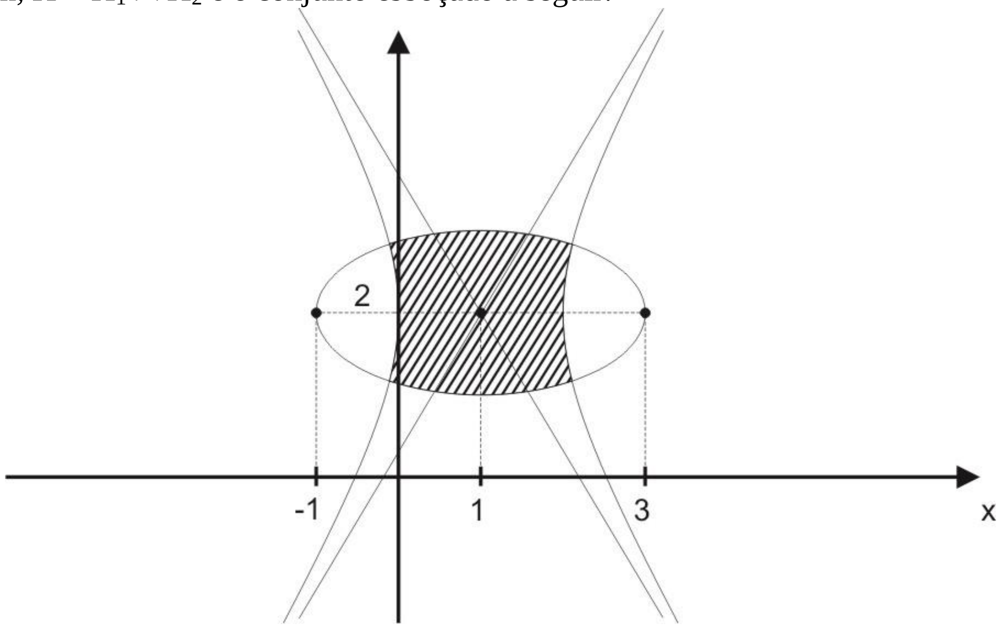
$$w = (\underbrace{x^2 + 4y^2 - 2x - 16y}_{\in \mathbb{R}}) + (\underbrace{3x^2 - y^2 - 6x + 4y}_{\in \mathbb{R}})i$$

$$\text{Re } w \le -13 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 \le 1.$$

(Elipse de centro (1, 2), semieixo 2 paralelo a Ox e semieixo 1 paralelo a Oy e seu interior: conjunto Ω_1.)

$\text{Im } w \le 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} \le 1.$

(Hipérbole de centro (1,2), semieixo real 1 paralelo a Ox e semieixo imaginário $\sqrt{3}$ paralelo a Oy e a região delimitada por ela que contém a origem (0, 0): conjunto Ω_2.)
Assim, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ é o conjunto esboçado a seguir:



66) (ITA 2009) Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \text{sen}\,\frac{\pi}{5}$, então o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

a) $a + bi$ b) $-a + bi$ c) $\left(1 - 2a^2b^2\right) + ab\left(1 + b^2\right)i$

d) $a - bi$ e) $\left(1 - 4a^2b^2\right) + 2ab\left(1 - b^2\right)i$

RESOLUÇÃO: b

$$\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)^{54} = \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{5}\right)^{54} = \text{cis}\,\frac{54\pi}{5} = \text{cis}\,\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{5} = -a + ib$$

67) (ITA 2010) Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i\cdot a_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots, 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \le 4\cdot\left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right),\ \forall x \in [-1, 1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) II e III.

RESOLUÇÃO: e

$a_0 = -1$

$a_1 = 1 + i \cdot a_0 = 1 - i$

$a_2 = 1 + i \cdot a_1 = 1 + i(1-i) = 2 + i$

$a_3 = 1 + i \cdot a_2 = 1 + i(2+i) = 2i$

$a_4 = 1 + i \cdot a_3 = 1 + i \cdot (2i) = -1$

$$a_4 = a_0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_4 = a_8 = a_{12} = -1 \\ a_1 = a_5 = a_9 = a_{13} = 1 - i \\ a_2 = a_6 = a_{10} = a_{14} = 2 + i \\ a_3 = a_7 = a_{11} = a_{15} = 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x) = -1\left(1 + x^4 + x^8 + x^{12}\right) + (1-i)\left(x + x^5 + x^9 + x^{13}\right)$$
$$+ (2+i)\left(x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}\right) + (2i)\left(x^3 + x^7 + x^{11} + x^{15}\right)$$

I. FALSA

$p(-1) = -1 \cdot 4 + (1-i)(-4) + (2+i) \cdot 4 + (2i)(-4) = 0 \in \mathbb{R}$

II. VERDADEIRA

$x \in [-1,1] \Rightarrow \left|x^n\right| \le 1,\ n \in \mathbb{N}$

$$|p(x)| = \left|\sum_{n=0}^{15} a_n x^n\right| \le \sum_{n=0}^{15} \left|a_n x^n\right| = \sum_{n=0}^{15} |a_n|\left|x^n\right| \le \sum_{n=0}^{15} |a_n|$$
$$= 4\left(|-1| + |1-i| + |2+i| + |2i|\right) = 4\left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$$

III. VERDADEIRA

68) (ITA 2010) Os argumentos principais das soluções da equação em z, $iz + 3\overline{z} + (z + \overline{z})^2 - i = 0$, pertence a

a) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

b) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$.

c) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

d) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$.

e) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

RESOLUÇÃO: c

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$iz+3\bar{z}+(z+\bar{z})^2-i=0\Rightarrow i(x+yi)+3(x-yi)+(x+yi+x-yi)^2-i=0$

$\Leftrightarrow (4x^2+3x-y)+(x-3y-1)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+3x-y=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^2+3x \\ 12x^2+8x+1=0 \end{cases}$

$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\Rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$x=-\frac{1}{6}\Rightarrow y=-\frac{7}{18}\Rightarrow z=\frac{\sqrt{58}}{18}\left(-\frac{3\sqrt{58}}{58}-\frac{7\sqrt{58}}{58}i\right)=\frac{\sqrt{58}}{18}\operatorname{cis}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{3}\right)+\pi\right)$

$S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right),\frac{\sqrt{58}}{18}\operatorname{cis}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{3}\right)+\pi\right)\right\}$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{3}\right)\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{3}\right)+\pi\in\left]\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

Logo, os argumentos principais das soluções da equação pertencem a $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$.

69) (ITA 2010) Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$, $z-\bar{z}+|z|^2=-\left[(\sqrt{2}+i)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}-i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$, pode-se afirmar que

a) $i(z-\bar{z})<0$. b) $i(z-\bar{z})>0$. c) $|z|\in[5,6]$. d) $|z|\in[6,7]$. e) $\left|z+\frac{1}{z}\right|>8$.

RESOLUÇÃO: e

Seja $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$. Substituindo na equação

$z-\bar{z}+|z|^2=-\left[(\sqrt{2}+i)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}-i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}\Leftrightarrow$

$a^2+b^2+2bi=-\left[\frac{2-\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}+1}{3}-\frac{2+\sqrt{2}}{3}i+\frac{\sqrt{2}-1}{3}i\right]^{12}\Leftrightarrow$

$a^2+b^2+2bi=-(1-i)^{12}=-(-2i)^6=64\Leftrightarrow a=\pm 8$ e $b=0$.

Logo, $\left|z+\frac{1}{z}\right|=\left|\pm 8+\frac{1}{\pm 8}\right|=8+\frac{1}{8}>8$.

70) (ITA 2011) Sejam $n\geq 3$ ímpar, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $z_1,z_2,\ldots,z_n$ as raízes de $z^n=1$. Calcule o número de valores $|z_i-z_j|$, $i,j=1,2,\ldots,n$, com $i\neq j$, distintos entre si.

RESOLUÇÃO:

As raízes n-ésimas da unidade são os vértices de um polígono regular de gênero n inscrito em uma circunferência de raio 1.

O número de valores distintos $|z_i - z_j|$ é igual ao número de medidas distintas dos lados ou diagonais desse polígono.
Cada lado ou diagonal de um polígono regular de gênero n é uma corda que determina um arco de $\frac{360^\circ}{n} \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}^*$ e, quando esse arco fica maior que 180°, a diagonal tem a mesma medida que a do arco replementar já computado. Logo, para obtermos uma única vez cada medida distinta, devemos ter $k \in \left\{1, 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$.
Assim, a quantidade de medidas distintas das diagonais de um polígono regular de gênero n é $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
Como n é ímpar, então $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$.

71) (ITA 2011) A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C} : z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

a) 2. b) $\frac{i}{2}$. c) 0. d) $-\frac{1}{2}$. e) $-2i$.

RESOLUÇÃO: e
Fazendo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$z^2 + |z^2| + iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+bi)^2 + (a^2 + b^2) + i(a+bi) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 + a^2 + b^2 + ai - b - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 - b - 1) + (2ab + a)i = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - b - 1 = 0 \ \wedge \ a(2b+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - b - 1 = 0 \ \wedge \left(a = 0 \vee b = -\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = -1) \vee \left(a = \pm\frac{1}{2} \wedge b = -\frac{1}{2} \right)$$

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{ -i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$ e a soma de todas as soluções é $(-i) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -2i$.

72) (ITA 2011) Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I. $|z_1 - z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big|$.

II. $|\overline{z}_1 \cdot z_2| = \big||\overline{z}_1| . |\overline{z}_2|\big|$.

III. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\ \text{sen}\theta) \neq 0$, $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\ \text{sen}\theta)$.

é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas II e III. e) todas.

RESOLUÇÃO: d
I – FALSA
Contraexemplo: Sejam $z_1 = -1$ e $z_2 = 1$, então $|z_1 - z_2| = |(-1)-1| = 2$ e $||z_1| - |z_2|| = ||-1| - |1|| = |1-1| = 0$. Logo, nesse exemplo, temos $|z_1 - z_2| > ||z_1| - |z_2||$.
Note que, considerando os números complexos z_1 e z_2 como vetores, temos que o módulo da diferença de dois vetores é maior ou igual ao módulo da diferença de seus módulos (desigualdade triangular), ou seja, $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.
II – VERDADEIRA
$|z| = |\overline{z}| \wedge |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \forall z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |\overline{z}_1 \cdot z_2| = |\overline{z}_1| \cdot |z_2| = |\overline{z}_1| \cdot |\overline{z}_2| = ||\overline{z}_1|.|\overline{z}_2||$
III – VERDADEIRA
Pela 1ª fórmula de De Moivre, temos:
$$z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) \Rightarrow z_1^{-1} = |z_1|^{-1} \cdot (\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)) = |z_1|^{-1} \cdot (\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$

73) (ITA 2011) Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

a) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\,i$. b) -1 c) 0 d) 1 e) $\frac{89}{6}\sqrt{3}\,i$

RESOLUÇÃO: b
$$z = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\,i\right) = 1 \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow z^2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \;\wedge\; z^3 = \text{cis}(2\pi) = 1$$
$$\Rightarrow z + z^2 + z^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{89} z^n = (z+z^2+z^3) + z^3(z+z^2+z^3) + \cdots + z^{84}(z+z^2+z^3) + z^{88} + z^{89} =$$
$$= (z+z^2+z^3)(1+z^3+z^6+\cdots+z^{84}) + (z^3)^{29} \cdot z + (z^3)^{29} \cdot z^2 = z + z^2 = -1$$

74) (ITA 2012) Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{7\pi}{4}$

RESOLUÇÃO: e
$$\arg(-2iz) = \arg(-2i) + \arg z = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Nessa questão foram utilizados os seguintes conceitos:

Sejam z e w dois números complexos, então $\arg(z\cdot w)=\arg z+\arg w$ e $\arg\left(\frac{z}{w}\right)=\arg z-\arg w$.

75) (ITA 2012) Seja $z=n^2(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)$ e $w=n(\cos 15^\circ+i\,\mathrm{sen}\,15^\circ)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3}+i$. b) $2(\sqrt{3}+i)$. c) $2(\sqrt{2}+i)$. d) $2(\sqrt{2}-i)$. e) $2(\sqrt{3}-i)$.

RESOLUÇÃO: b

$$(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^n=\left(\sqrt{2}\mathrm{cis}45^\circ\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{cis}\left(45^\circ\cdot n\right)\in\mathbb{R}\Rightarrow n=4$$

$$\frac{z}{w}=\frac{n^2(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)}{n(\cos 15^\circ+i\,\mathrm{sen}\,15^\circ)}=n(\cos 30^\circ+i\,\mathrm{sen}\,30^\circ)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=2(\sqrt{3}+i)$$

Nessa questão foram utilizados os seguintes conceitos:
Sejam $z=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=r\cdot\mathrm{cis}\theta$ e $w=s(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)=s\cdot\mathrm{cis}\alpha$ dois números complexos expressos na forma trigonométrica e $n\in\mathbb{N}$, então:
$z^n=r^n\mathrm{cis}(n\cdot\theta)$, $z\cdot w=(r\cdot s)\mathrm{cis}(\theta+\alpha)$ e $\frac{z}{w}=\frac{r}{s}\mathrm{cis}(\theta-\alpha)$.

76) (ITA 2013) Para $z=1+iy$, $y>0$, determine todos os pares (a,y), $a>1$, tais que $z^{10}=a$. Escreva a e y em função de $\mathrm{Arg}\,z$.

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que, como $y>0$ e $a>1$, entendemos que ambos são números reais, pois não há relação de ordem entre números complexos.
Seja $z=1+iy=r\cdot\mathrm{cis}\,\theta$, onde $\theta=\mathrm{Arg}\,z$, então $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{y}{1}=y$ e $r=|z|=\sqrt{1^2+y^2}=\sqrt{1+y^2}$.

$$z^{10}=(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^{10}=r^{10}\,\mathrm{cis}(10\theta)=a=a\,\mathrm{cis}\,0\Leftrightarrow\begin{cases}a=r^{10}\\10\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\frac{k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

O número complexo $z=1+iy$, com $y>0$, tem afixo no primeiro quadrante, portanto seu argumento $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, o que implica $\theta=\frac{\pi}{5}$ ou $\theta=\frac{2\pi}{5}$.
Assim, temos:
$y=\mathrm{tg}\,\theta=\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}\,z)$

$a = r^{10} = \left(\sqrt{1+y^2}\right)^{10} = \left(1+y^2\right)^5 = \left(1+\text{tg}^2\,\theta\right)^5 = \left(\sec^2\theta\right)^5 = \sec^{10}\theta = \sec^{10}\left(\text{Arg } z\right)$

Logo, todos os pares (a, y) que satisfazem as condições do enunciado são $\left(\sec^{10}\frac{\pi}{5}, \text{tg}\frac{\pi}{5}\right)$ e $\left(\sec^{10}\frac{2\pi}{5}, \text{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$.

77) (ITA 2013) Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17}=12$. Então a soma das soluções z, com $\text{Re}\,z>0$, da equação $z^4=\lambda-32$, é

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) 4 e) 16

RESOLUÇÃO: b

$\sqrt{\lambda+9}=x\ge 0 \Rightarrow \lambda+9=x^2 \Leftrightarrow 2\lambda+17=2x^2-1$

$\sqrt{\lambda+9}+\sqrt{2\lambda+17}=12 \Rightarrow x+\sqrt{2x^2-1}=12 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}=12-x$

$\Rightarrow 2x^2-1=144-24x+x^2$

$\Leftrightarrow x^2+24x-145=0 \Leftrightarrow x=-29\ (\text{não convém}) \vee\ x=5$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda+9}=5 \Leftrightarrow \lambda=16$

$z^4=\lambda-32 \Rightarrow z^4=16-32=-16=16\,\text{cis}\,\pi \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{16}\cdot\text{cis}\frac{\pi+2k\pi}{4},\ k=0,1,2,3$

$k=0 \Rightarrow z=2\,\text{cis}\frac{\pi}{4}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$k=1 \Rightarrow z=2\,\text{cis}\frac{3\pi}{4}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$k=2 \Rightarrow z=2\,\text{cis}\frac{5\pi}{4}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$k=3 \Rightarrow z=2\,\text{cis}\frac{7\pi}{4}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

Se $\text{Re}\,z>0$, então $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ ou $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, cuja soma é $2\sqrt{2}$.

78) (ITA 2013) Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z-5+3i)^4=1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{41}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$

RESOLUÇÃO: b

Vamos inicialmente resolver a equação $z^4=1$.

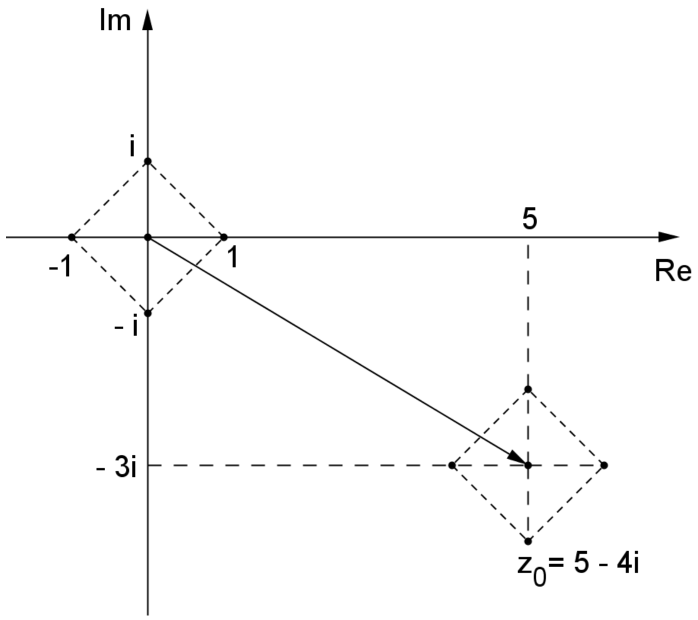
$$z^4 = 1 = \text{cis}\,0 \Leftrightarrow z = \text{cis}\,\frac{2k\pi}{4},\ k = 0,1,2,3 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z = \text{cis}\,0 = 1 \\ k = 1 \Rightarrow z = \text{cis}\,\frac{\pi}{2} = i \\ k = 2 \Rightarrow z = \text{cis}\,\pi = -1 \\ k = 3 \Rightarrow z = \text{cis}\,\frac{3\pi}{2} = -i \end{cases}$$

Considerando as soluções encontradas e sendo θ o argumento de cada uma das soluções, temos:

$$(z - 5 + 3i)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 5 + 3i = 1 \Leftrightarrow z = 6 - 3i \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \\ z - 5 + 3i = i \Leftrightarrow z = 5 - 2i \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{-2}{5} \\ z - 5 + 3i = -1 \Leftrightarrow z = 4 - 3i \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{-3}{4} \\ z - 5 + 3i = -i \Leftrightarrow z = 5 - 4i \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

Portanto, a solução de menor argumento é a de menor tangente, ou seja, $z_0 = 5 - 4i$ e $|z_0| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$.

Observe que as quatro soluções são os vértices de um quadrado com centro no afixo do número complexo $(5 - 3i)$ no plano de Argand-Gauss, conforme mostra a figura abaixo.



79) (ITA 2013) A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO: c

$z-|z|=0 \Leftrightarrow |z|=z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$

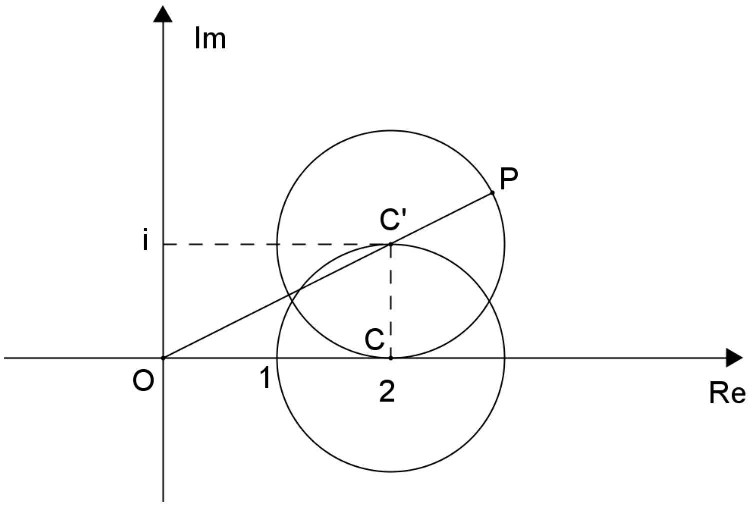
$z^8-17z^4+16=0 \Leftrightarrow z^4=16 \ \vee \ z^4=1$

$z \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow z=2 \ \vee \ z=1$

Portanto, a soma pedida é $2+1=3$.

80) (ITA 2014) a) Determine o valor máximo de $|z+i|$, sabendo que $|z-2|=1$, $z \in \mathbb{C}$.
b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0.

RESOLUÇÃO:
a)



Os números complexos z tais que $|z-2|=1$ estão sobre uma circunferência de centro $C(2,0)$ e raio 1 no plano de Argand-Gauss.
Os números complexos $z+i$ estão sobre uma circunferência resultante do deslocamento vertical de 1 unidade para cima da circunferência anterior, ou seja, uma circunferência de centro $C'(2,1)$ e raio 1.
O valor máximo de $|z+i|$ ocorre no ponto em que a reta OC' corta a circunferência de centro $C'(2,1)$ depois deste ponto, ou seja, $|z+i|_{MAX}=\overline{OP}$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCC', temos:

$OC'^2=OC^2+CC'^2=2^2+1^2=5 \Leftrightarrow OC'=\sqrt{5}$

Portanto, $|z+i|_{MAX}=\overline{OP}=\overline{OC'}+\overline{C'P}=\sqrt{5}+1$.

b) O número complexo z_0 é aquele que faz $|z+i|$ ser máximo, onde $|z-2|=1$.
Logo (z_0+i) é o número complexo associado ao ponto P no plano de Argand-Gauss.
Seja $\theta=C\hat{O}C'$, então $z_0+i=\overline{OP}(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$.
No triângulo retângulo OCC', temos:

$$\cos\theta=\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Portanto,

$$z_0+i=\overline{OP}(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}i\right)=\left(2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)i$$

$$\Leftrightarrow z_0=\left(2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}i$$

81) (ITA 2014) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$;

II. $(z+\overline{w})^2-(z-\overline{w})^2=4z\overline{w}$;

III. $|z+w|^2-|z-w|^2=4\operatorname{Re}(z\overline{w})$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III.
d) apenas II e III. e) todas.

RESOLUÇÃO: e

I. VERDADEIRA

$$|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+z\overline{w}+\overline{z}w+w\overline{w}=|z|^2+z\overline{w}+\overline{z}w+|w|^2$$

$$|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z\overline{z}-z\overline{w}-\overline{z}w+w\overline{w}=|z|^2-z\overline{w}-\overline{z}w+|w|^2$$

$$\Rightarrow |z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$$

II. VERDADEIRA

$$(z+\overline{w})^2-(z-\overline{w})^2=(z+\overline{w}+z-\overline{w})(z+\overline{w}-z+\overline{w})=4z\overline{w}$$

III. VERDADEIRA

$$|z+w|^2-|z-w|^2=2(z\overline{w}+\overline{z}w)=2\left(z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}\right)=2\cdot 2\operatorname{Re}(z\overline{w})=4\operatorname{Re}(z\overline{w})$$

Observe que utilizamos que a soma de um número complexo com o seu conjugado é igual ao dobro da sua parte real.

82) (ITA 2014) Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6-3|z|^4\left(z^2-\overline{z}^2\right)-\overline{z}^6$ é igual a

a) $\left(z^2-\overline{z}^2\right)^3$ b) $z^6-\overline{z}^6$ c) $\left(z^3-\overline{z}^3\right)^2$
d) $(z-\overline{z})^6$ e) $(z-\overline{z})^2\left(z^4-\overline{z}^4\right)$

RESOLUÇÃO: a

Observemos inicialmente que $z\cdot\overline{z}=|z|^2$ e que $z^2\cdot\overline{z}^2=|z|^4$. Assim, temos:

$$z^6-3|z|^4\left(z^2-\overline{z}^2\right)-\overline{z}^6=z^6-3z^2\cdot\overline{z}^2\left(z^2-\overline{z}^2\right)-\overline{z}^6=$$

$$=\left(z^2\right)^3-3\cdot\left(z^2\right)^2\cdot\overline{z}^2+3z^2\cdot\left(\overline{z}^2\right)^2-\left(\overline{z}^2\right)^3=\left(z^2-\overline{z}^2\right)^3$$

83) (ITA 2015) Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M = \{|z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 1\}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a.

RESOLUÇÃO:

$|z| = 1 \Rightarrow z = \text{cis}\theta$

$$|z^2 + az - 1| = |\text{cis}2\theta + a\text{cis}\theta - 1| = |(\cos 2\theta - 1) + i \operatorname{sen} 2\theta + a(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)| =$$

$$= |-2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta i + a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)| =$$

$$= |i^2 \cdot 2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta i + a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)| =$$

$$= |2\operatorname{sen}\theta i(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)| = |\text{cis}\theta(a + 2\operatorname{sen}\theta i)| =$$

$$= |\text{cis}\theta| \cdot |a + 2\operatorname{sen}\theta i| = 1 \cdot \sqrt{a^2 + 4\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 + 4\operatorname{sen}^2\theta}$$

O maior elemento de M ocorre quando $\operatorname{sen}^2\theta = 1$ e é igual a $\sqrt{a^2 + 4}$.

2ª SOLUÇÃO:

Seja $z = x + yi$, então $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

$$|z^2 + az - 1| = |(x + yi)^2 + a(x + yi) - 1| = |(x^2 - y^2 + ax - 1) + (2xy + ay)i|$$

$$|z^2 + az - 1|^2 = (x^2 - y^2 + ax - 1)^2 + (2xy + ay)^2 =$$

$$= (x^2 - (1 - x^2) + ax - 1)^2 + y^2(2x + a)^2 =$$

$$= (2x^2 + ax - 2)^2 + (1 - x^2)(2x + a)^2 =$$

$$= (4x^4 + a^2x^2 + 4 + 4ax^3 - 8x^2 - 4ax) + (1 - x^2)(4x^2 + 4ax + a^2) =$$

$$= 4x^4 + 4ax^3 + (a^2 - 8)x^2 - 4ax + 4 + 4x^2 + 4ax + a^2 - 4x^4 - 4ax^3 - a^2x^2 =$$

$$= -4x^2 + a^2 + 4$$

Logo, o valor máximo de M ocorre quando $x = 0$ e é igual a $\sqrt{a^2 + 4}$.

84) (ITA 2015) Se $z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de $2\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z)) + 5\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z))$ é igual a

a) $-\frac{2\pi}{3}$. b) $-\frac{\pi}{3}$. c) $\frac{2\pi}{3}$. d) $\frac{4\pi}{3}$. e) $\frac{5\pi}{3}$.

RESOLUÇÃO: d

$$z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^{10} = \left(\frac{\text{cis}\frac{\pi}{3}}{\text{cis}\frac{5\pi}{3}}\right)^{10} = \left(\text{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)^{10} =$$

$$= \left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{10} = \text{cis}\frac{20\pi}{3} = \text{cis}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z)) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z)) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$2\operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z)) + 5\operatorname{arctg}(2\operatorname{Im}(z)) = 2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 5\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

85) (ITA 2015) Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \{z \in \mathbb{C} : |z+2-3i| < \sqrt{19}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 7/2\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \setminus B) \cap C$ é o conjunto

a) $\{-1-3i, -1+3i\}$
b) $\{-3-i, -3+i\}$
c) $\{-3+i\}$
d) $\{-3-i\}$
e) $\{-1+3i\}$

RESOLUÇÃO: c

Vamos identificar primeiro os dois elementos do conjunto C.

$$z^2 + 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2} = -3 \pm i$$

$$\Rightarrow C = \{-3-i, -3+i\}$$

O conjunto $(A \setminus B) \cap C$ é o conjunto dos elementos de C que estão em A e não estão em B.

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z+2-3i| < \sqrt{19}\}$$

$$|(-3-i)+2-3i| = |-1-4i| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} < \sqrt{19} \Rightarrow (-3-i) \in A$$

$$|(-3+i)+2-3i| = |-1-2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} < \sqrt{19} \Rightarrow (-3+i) \in A$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 7/2\}$$

$$|(-3-i)+i| = |-3| = 3 < 7/2 \Rightarrow (-3-i) \in B$$

$$|(-3+i)+i| = |-3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3,6 > 7/2 \Rightarrow (-3+i) \notin B$$

Portanto, $(A \setminus B) \cap C = \{-3+i\}$

86) (ITA 2016) Considere as afirmações a seguir:

I. Se z e w são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$.

II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero.

III. Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1+i)$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas 1 e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

RESOLUÇÃO: b

I. Se z e w são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$. (VERDADEIRA)

$(z - iw) + (w - z) = (1 - 2i) + (2 + 3i) \Leftrightarrow w(1 - i) = 3 + i$

$\Leftrightarrow w = \frac{3+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$

$z = w - (2 + 3i) = (1 + 2i) - (2 + 3i) = -1 - i$

$z^2 + w^2 = (-1 - i)^2 + (1 + 2i)^2 = 2i + -3 + 4i = -3 + 6i$

II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero. (VERDADEIRA)

Seja $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + (x + iy)^2 = 4 + 2i \Leftrightarrow (3x^2 + y^2) + 2xyi = 4 + 2i$

$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \ \vee \ x^2 = \frac{1}{3}$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow z = 1 + i \ \vee \ z = -1 - i$

$x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} \ \vee \ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3}$

A soma de todos os valores de z é $(1 + i) + (-1 - i) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3}\right) = 0.$

III. Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1 + i)$. (FALSA)

$z = 1 - i \Rightarrow z^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

$z^{59} = (z^2)^{29} \cdot z = (-2i)^{29} \cdot (1 - i) = -2^{29} i (1 - i) = 2^{29}(-1 - i)$

87) (ITA 2017) O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$ possua uma raiz puramente imaginária é

a) uma circunferência.
b) uma parábola.
c) uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas paralelas.

RESOLUÇÃO: b

Seja $z = yi$, com $y \in \mathbb{R}$, a raiz puramente imaginária da equação, então

$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0 \Rightarrow (yi)^2 + (yi) + 2 - (a + bi) = 0$

$\Leftrightarrow -y^2 + yi + 2 - a - bi = 0 \Leftrightarrow (-y^2 + 2 - a) + (y - b)i = 0$

$\Leftrightarrow -y^2 + 2 - a = 0 \ \wedge \ y - b = 0$

$\Rightarrow y^2 = 2 - a \Rightarrow b^2 = 2 - a$ que é uma parábola

88) (ITA 2017) Considere a equação $(a - bi)^{501} = \frac{2(a + bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1}$. O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

a) 500 b) 501 c) 502 d) 503 e) 504

RESOLUÇÃO: d

Vamos aplicar módulo nos dois lados da igualdade.

$$(a-bi)^{501}=\frac{2(a+bi)}{\left(a^2+b^2\right)^{250}+1}\Rightarrow\left|(a-bi)^{501}\right|=\left|\frac{2(a+bi)}{\left(a^2+b^2\right)^{250}+1}\right|$$

$$\Leftrightarrow|a-bi|^{501}=\frac{2|a+bi|}{\left(a^2+b^2\right)^{250}+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{501}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\left(a^2+b^2\right)^{250}+1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=0\ \vee\ \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{500}=\frac{2}{\left(a^2+b^2\right)^{250}+1}$$

$$\Leftrightarrow a=b=0\ \vee\ \left(a^2+b^2\right)^{500}+\left(a^2+b^2\right)^{250}-2=0$$

$$\Leftrightarrow a=b=0\ \vee\ \left(a^2+b^2\right)^{250}=1\ \vee\ \left(a^2+b^2\right)^{250}=2\ (\text{não convém})$$

$$\Leftrightarrow a=b=0\ \vee\ a^2+b^2=1$$

Observe que a análise do módulo da equação leva a conclusão que $(a,b)=(0,0)$ ou $a^2+b^2=1.$ Devemos substituir esses resultados na equação original.

1º) $(a,b)=(0,0)$ satisfaz a equação

2º) $a^2+b^2=1\Rightarrow(a-bi)^{501}=\dfrac{2(a+bi)}{1^{250}+1}$

$$\Leftrightarrow(a-bi)^{501}=a+bi=\frac{a^2+b^2}{a-bi}\Leftrightarrow(a-bi)^{502}=1$$

A equação $(a-bi)^{502}=1$ possui 502 raízes distintas e diferentes de $(a,b)=(0,0).$

Assim, o número de soluções da equação original é $502+1=503.$