UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Fones: (84) 215-3820 / 215.3819 – FAX: (84) – 211. 9219

NOTAS DE AULA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Prof. Benedito Tadeu V. Freire

Novembro de 2001

A quem posso chamar de educador

Primeiro, àqueles que enfrentam bem as circunstâncias com que se deparam no dia-a-dia...

Depois, àqueles que são honrados em suas relações com todos os homens, agüentando com facilidade e bom humor aquilo que é ofensivo para os outros, então sendo tão agradável e razoável com seus companheiros quanto é humanamente possível...

Àqueles que tem seus prazeres sob controle e não acabam derrubados por suas infelicidades.

Àqueles a quem o sucesso não estraga, que não fogem do seu próprio eu, mas sim, se mantêm firme, como homens de sabedoria e sobriedade

Sócrates

(Publicado pela "Folha de São Paulo", em 15/10/2001, Dia do Professor)

SUMÁRIO

1. O PRINCÍPIO ADITIVO

Enunciamos abaixo o que chamamos de *Princípio Aditivo:*

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então A È B possui $m + n$ elementos

Para ilustrar o Princípio Aditivo, apresentamos dois problemas abaixo.

PROBLEMA 1
Numa classe existem 18 rapazes e 12 garotas. De quantas maneiras podemos selecionar 1 estudante?
SOLUÇÃO

Existem $18 + 12 = 30$ estudantes. Logo, podemos selecionar 1 estudante de 30 maneiras.

PROBLEMA 2
Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
SOLUÇÃO

Ou Maria escolhe um sabor de picolé dentre os 5 ou 1 tipo de salgado dentre os 3. Portanto, Maria pode fazer 8 pedidos diferentes.

2. O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Para motivar o *Princípio Multiplicativo* consideremos o problema abaixo.

PROBLEMA 3
Uma pessoa pode viajar no trecho Natal/Recife/Natal de ônibus, automóvel, avião, navio ou trem. Se o meio de transporte da ida não é o mesmo da volta, de quantas maneiras essa pessoa pode realizar a viagem?
SOLUÇÃO

Se a pessoa for de ônibus, ela pode voltar de avião, navio ou trem, o que lhe fornece 3 maneiras distintas de fazer o percurso de ida e volta. Notando ônibus por O, avião por A, navio por N e trem por T, podemos indicar as 3 maneiras distintas de fazer o percurso por:

(O, A), (O, N), (O, T)

De maneira análoga, se a pessoa for de avião, há novamente 3 modos distintos de fazer o percurso de ida e volta:

(A, O), (A, N), (A, T)

Se a pessoa for de navio, há, também, 3 modos distintos de fazer o percurso de ida e volta:

(N, O), (N, A), (N, T)

Analogamente, se fizer o percurso de ida usando o trem:

(T, O), (T, A), (T, N)

Essas maneiras podem ser dispostas no seguinte quadro

VOLTA / IDA	**O**	**A**	**N**	**T**
O	*	(O,A)	(O, N)	(O, T)
A	(A, O)	*	(A, N)	(A, T)
N	(N, O)	(N, A)	*	(N, T)
T	(T,A)	(T, A)	(T, N)	*

Observe que as possibilidades (O, O), (A, A), (N, N) e (T, T) não são possíveis, já que o meio de transporte de ida não pode ser o mesmo meio de transporte de volta.

O quadro acima mostra-nos, basta contar todas as possibilidades, que existem $4 \times 3 = 12$ maneiras distintas de viajar no trecho Natal/Recife/Natal, usando meios de transportes distintos para a ida e a volta.

Podemos interpretar o problema da seguinte maneira: para a escolha do transporte de ida temos 4 opções distintas. Uma vez escolhido o transporte de ida, a escolha do transporte de volta pode ser feita de 3 maneiras distintas. Logo, o total de possibilidades é $4 \times 3 = 12$.

O problema acima motiva um princípio básico da Análise Combinatória: o Princípio Multiplicativo, que enunciamos a seguir.

P*RINCÍPIO MULTIPLICATIVO*

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 sucessivamente é $m.n$

Como no problema 1, utilizando uma tabela podemos verificar o Princípio Multiplicativo. Designando por:

$a_1, a_2, ..., a_m$ as distintas maneiras de tomar a decisão d_1

$b_1, b_2, ..., b_n$ as distintas maneiras de tomar a decisão d_2

construímos o quadro seguinte:

Decisão d_2 / Decisão d_1	b_1	b_2	b_3		b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	....	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	....	(a_2, b_n)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	....	(a_3, b_n)
. .	. .	. .	. .	....	
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	(a_m, b_3)	....	(a_m, b_n)

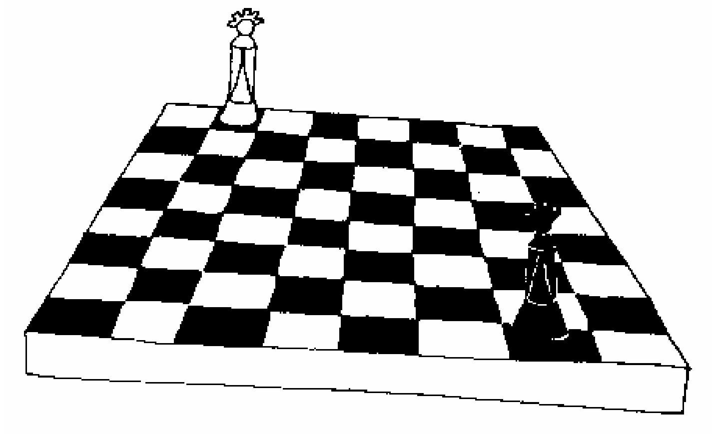
O quadro acima nos mostra que existem $m.n$ pares ordenados e que em cada par ordenado (a_i, b_j):

a_i representa uma das m possíveis maneiras de tomar a decisão d_1
b_j representa uma das n possíveis maneiras de tomar a decisão d_2

Portanto, existem $m.n$ maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2

PROBLEMA 4

(a) De quantas maneiras podemos escolher um quadrado preto e um quadrado branco num tabuleiro de xadrez (i. e. um tabuleiro 8 x 8)?
(b) De quantas maneiras podemos escolher um quadrado preto e um quadrado branco num tabuleiro de xadrez se os dois quadrados não podem pertencer à mesma linha ou coluna?



SOLUÇÃO

(a) O tabuleiro possui 32 quadrados brancos e 32 quadrados pretos. Para se escolher um quadrado preto existem 32 possibilidades e para a escolha de um quadrado branco temos, também, 32 possibilidades. Logo, temos 32 x 32 = 1024 maneiras distintas de se escolher um quadrado preto e um quadrado branco.
(b) Para se escolher um quadrado preto temos 32 possibilidades e para escolher um quadrado branco, diminuindo as possibilidades dos brancos na mesma linha e mesma coluna que o quadrado preto, temos 24 opções. Assim, temos 32 x 24 = 768

maneiras distintas de escolher um quadrado preto e um quadrado branco, não estando ambos na mesma linha ou coluna.

PROBLEMA 5
Existem quantos números naturais com quatro algarismos ímpares distintos?
SOLUÇÃO

Os algarismos ímpares são: 1, 3, 5, 7, 9. Um número com 4 algarismos é da forma: *abcd*. A escolha de um algarismo para ocupar a posição *a* pode ser feita de 5 maneiras. Uma vez escolhido o algarismo para a posição *a*, restam 4 possibilidades para a escolha do algarismo da posição *b*. Para a posição *c*, restam 3 possibilidades. Para a posição *d* restam 2. Pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de números de 4 algarismos ímpares distintos é:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$$

PROBLEMA 6
Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?
SOLUÇÃO

A primeira listra pode ser colorida de 3 modos; a segunda de 2 modos (não podendo usar a cor empregada na primeira listra); a terceira de 2 modos (não podendo usar a cor empregada na segunda listra) e, finalmente, para colorir a quarta listra, podemos usar 2 cores (não podendo usar a cor empregada na terceira listra). Assim, temos 3 x 2 x 2 x 2 = 24 modos distintos de colorir a bandeira satisfazendo as exigências do enunciado.

PROBLEMA 7
Num tabuleiro 2 x 2, cada quadrado unitário pode ser pintado ou de branco ou de preto. De quantos modos distintos podemos pintar o tabuleiro?
SOLUÇÃO

Um tabuleiro 2 x 2 tem 4 quadrados unitários. Cada um desses quadrados unitários pode ser pintado de dois modos distintos: ou de branco ou de preto. Pelo Princípio Multiplicativo, podemos pintar o tabuleiro de 2 x 2 x 2 x 2 = 16 maneiras distintas.

PROBLEMA 8
Um alfabeto consiste de três letras: A, B, C. Nesta língua, uma palavra é uma seqüência arbitrária de não mais do que três letras. Quantas palavras existem nesta língua?
SOLUÇÃO

Basta contar quantas palavras existem com uma, duas ou três letras e somar esses valores. Com uma letra existem 3 palavras: A, B e C. Com duas letras existem 3 x 3 = 9 palavras e com três letras existem 3 x 3 x 3 = 27 letras. Portanto, nesta língua existem 3 + 9 + 27 = 39 palavras.

PROBLEMA 9
(a) Quantos divisores naturais possui o número 360?
(b) Quantos desses divisores são ímpares?
(c) Quantos são pares?
(d) Quantos são quadrados perfeitos?
SOLUÇÃO

(a) A decomposição de 360 em fatores primos é $360 = 2^3.3^2.5$. Um divisor natural de 360 é, necessariamente, um número da forma $2^a.3^b.5^c$, onde $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ e $c \in \{0, 1\}$. Ora, como qualquer divisor natural de 360 é da forma $2^a.3^b.5^c$ e temos 4 modos distintos de escolher o a, 3 modos distintos de escolher o b e 2 modos distintos de escolher o c, concluímos que existem 4 x 3 x 2 = 24 divisores naturais de 360.
(b) Para que o divisor seja ímpar, é necessário e suficiente que o fator 2 não esteja presente na sua decomposição em fatores primos. Isto só ocorre quando $a = 0$. Neste caso, existem 1 x 3 x 2 = 6 divisores naturais de 360, que são ímpares.
(c) O número de divisores naturais pares é igual ao número total de divisores naturais menos o número de divisores naturais ímpares. Logo, 24 – 6 = 18.
(d) Um número natural é quadrado perfeito se, e somente se, na decomposição em seus fatores primos só comparece expoente par. Desse modo, existem 2 x 2 x 1 = 4 divisores naturais de 360 que são quadrados perfeitos.

PROBLEMA 10
Dispondo-se de 10 bolas, 7 apitos e 12 camisas, de quantas maneiras distintas estes objetos podem ser distribuídos entre duas pessoas, de modo que cada uma receba, ao menos, 3 bolas, 2 apitos e 4 camisas?
SOLUÇÃO

Na distribuição das bolas, a primeira pessoa pode receber: 3 (esta é a quantidade mínima), 4, 5, 6 ou 7 (essa é a quantidade máxima possível, pois a segunda pessoa tem de receber no mínimo 3) bolas. Isto é, existem 5 possibilidades de se fazer a distribuição das bolas. Na distribuição dos apitos, fazendo um raciocínio análogo, a primeira pessoa pode receber: 2, 3, 4 ou 5 deles. Isto é, existem 4 possibilidades. Para as camisas, a distribuição se dá com 5 possibilidades: a primeira pessoa pode receber 4, 5, 6, 7 ou 8 delas. Portanto, o número pedido é igual a: 5 x 4 x 5 = 100.

PROBLEMA 11
De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e uma torre preta num tabuleiro de xadrez de modo que uma não ameace a outra?
SOLUÇÃO

A torre branca pode ocupar qualquer um dos 64 quadrados. Não importa que posição ela ocupa, ela pode atacar 15 quadrados, incluindo o quadrado em que ela se encontra. Então restam 64 – 15 = 49 quadrados onde a torre preta pode ser colocada. Portanto, temos 64 x 49 = 3136 maneiras distintas de colocar uma torre branca e uma torre preta num tabuleiro de xadrez de modo que uma não ameace o outra.

PROBLEMA 12
Num restaurante, o cardápio oferece escolha entre cinco sopas, três pratos principais, quatro sobremesas e seis bebidas. Uma refeição consiste, obrigatoriamente, num prato principal e numa bebida, podendo ser acrescida, opcionalmente, de uma sopa ou de uma sobremesa, ou de ambas. Quantos tipos de refeições, todas diferentes entre si, podem-se fazer?
SOLUÇÃO

Para compor uma refeição, temos que escolher, obrigatoriamente, um prato principal, o que pode ser feito de 3 modos distintos, uma bebida, que pode ser escolhida de 6 modos distintos. Agora, com relação a escolha da sopa, temos 6 opções distintas, os 5 tipos disponíveis no cardápio e a opção de não acrescentar uma das sopas à refeição. De modo semelhante, temos 5 opções para a escolha da sobremesa: os 4 tipos disponíveis no cardápio e a opção de não escolher nenhuma delas. Portanto, é possível fazer $3 \times 6 \times 6 \times 5 = 540$ tipos de refeições, todas diferentes entre si.

PROBLEMA 13
De quantas maneiras distintas podemos colocar num tabuleiro de xadrez um rei branco e um preto de modo que um não ataque o outro?
SOLUÇÃO

O rei branco pode ser colocado em um dos 64 quadrados do tabuleiro. Contudo, o número de quadrados que ele ataca depende da posição em que ele se encontra. Portanto, dividimos o problema em três casos:
(a) *O rei branco encontra-se em um dos quatro cantos do tabuleiro*. Nessa posição, ele ataca 4 quadrados, incluindo o que ele se encontra. Logo restam 60 quadrados para colocar o rei preto.
(b) *O rei branco ocupa um quadrado do bordo, mas não um dos cantos* (existem 24 quadrados desse tipo). Nessa posição, ele pode atacar 6 quadrados, restando 58 quadrados para colocar o rei preto.
(c) *O rei branco ocupa qualquer quadrado que não esteja no bordo do tabuleiro* (existem 36 quadrados desse tipo). Nessa posição, ele ataca 9 quadrados, restando 55 quadrados para colocar o rei preto.
Finalmente, temos $4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$ maneiras distintas de colocar num tabuleiro de xadrez um rei branco e um preto de modo que um não ataque o outro.

PROBLEMA 14
Existem quantos números de três algarismos (distintos) escritos com os três algarismos 1, 2 e 3 em alguma ordem?
SOLUÇÃO

Um número de três algarismos é da forma *abc*. Para a posição *a* podemos escolher 3 algarismos. Para a posição *b*, 2 algarismos e, para a posição, *c* resta 1 único algarismo. Logo, existem $3 \times 2 \times 1 = 6$ números de três algarismos distintos, escritos com 1, 2, 3.

PROBLEMA 15
Existem quantos números naturais de seis algarismos com no mínimo um algarismo par?
SOLUÇÃO

Em vez de contar a quantidade de números naturais de seis algarismos com no mínimo um algarismo par, contemos a quantidade de números naturais de seis algarismos sem nenhum algarismo par. Esse número corresponde aos que só possuem algarismos ímpares e teremos $5^6 = 15625$ deles. Agora, como existem 900.000 números naturais de seis algarismos (de 100.000 a 999.999) , o número pedido é igual a 900.000 – 15625 = 884.375

PROBLEMA 16
Num certo país, existem 20 cidades e todo par delas é ligado por uma única estrada. Nessas condições, quantas estradas existem?
SOLUÇÃO

Cada duas cidades é ligada por uma única estrada. Podemos escolher uma das cidades, digamos, a cidade A, para o início de uma estrada. Desse modo, podemos ligar a cidade A para 19 outras cidades. Ou seja, temos 20 x 19 = 380 estradas . Agora, observe que cada uma dessas cidades é contada duas vezes. Portanto, o número de estradas é dado por 380/2 = 190.

PROBLEMA 17
De um baralho comum (baralho com 52 cartas), sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?
SOLUÇÃO

Um baralho comum tem 52 cartas de quatro *naipes* diferentes, a saber:

copas (cartas vermelhas que se figuram com desenho de um coração),
espadas (cartas pretas que se figuram com o desenho do ferro duma lança),
ouros (cartas vermelhas que se figuram com o desenho de um losango) e
paus (cartas pretas que se figuram com o desenho de um trevo de três pontas).

Cada naipe tem 13 cartas, uma sequência numerada por: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R (A é o ás, V é o valente, D é a dama e R é o rei).

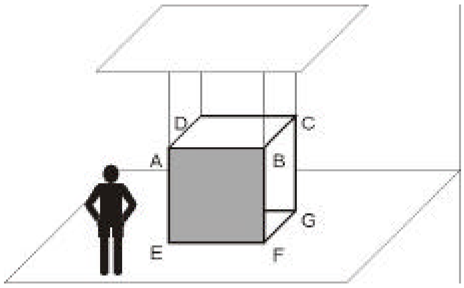
No problema, as três extrações podem ser divididas em 3 possibilidades, mutuamente excludentes, do seguinte modo:

(a) ***Rrn***: a primeira carta sacada, *R*, é o rei de copas, a segunda, *r*, é um rei de outro naipe e a terceira, *n*, não é uma dama. Observe que, a escolha de *R* só pode ser feita de uma única maneira; a escolha de *r* pode ser feito de 4 – 1 = 3 maneiras e a escolha de uma carta que não é uma dama pode ser feito de 52 – 4 – 2 = 46 maneiras. Nessa situação, a extração pode ser feita de 1 x 3 x 46 = 138 maneiras distintas.
(b) ***Drn***: a primeira carta sacada, D, é a dama de copas, a segunda, *r*, é um rei de algum naipe e a terceira, *n*, é uma carta que não é uma dama. Nessa situação, a extração pode ser feita de 1 x 4 x 47 = 188 maneiras distintas.
(c) ***Crn***: a primeira carta sacada, *C*, é uma carta de copas que não é um rei nem uma dama, a segunda, *r*, é um rei de algum naipe e a terceira, *n*, é uma carta que não é uma dama. Nessa situação, a extração pode ser feita de 11 x 4 x 46 = 2024.

Portanto, existem 138 + 188 + 2024 = 2350 maneiras distintas de se extrair as cartas da forma pedida.

PROBLEMA 18
De quantos modos se pode pintar as faces de um cubo, usando seis cores diferentes, sendo cada face com uma cor?
SOLUÇÃO

Para facilitar o entendimento, suponhamos o cubo pendurado pelos 4 vértices de uma mesma face, de modo que duas de suas faces fiquem horizontais, e consideremos um observador fixo, em frente a uma de suas faces verticais, conforme mostra a figura abaixo.



Vejamos, inicialmente, de quantos modos diferentes o observador pode ver o cubo pintado. Para pintar a face superior, há seis escolhas de cores; para a face inferior, 5, e para as verticais, respectivamente 4, 3, 2 e 1 escolhas. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o observador pode ver o cubo pintado de:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! \quad \text{modos diferentes.}$$

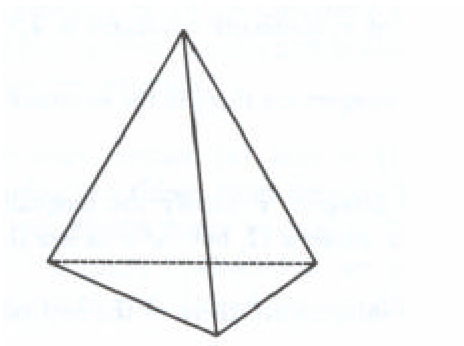
Entretanto, o número de modos de pintar o cubo nas condições do problema, isto é, sendo cada face com uma cor, ***não é 6!***, pois, como veremos a seguir, o observador pode ver de 24 maneiras diferentes uma mesma pintura do cubo.
De fato, suponhamos que o cubo tenha sido pintado de uma determinada maneira, e que a face **AEFB**, voltada para o observador, esteja pintada de azul. Este pode ver a face do cubo pintada de azul de 4 modos diferentes; basta notar que o mesmo pode ser pendurado pelos vértices **ABCD, BCGF, GFEH** e **AEHD** (o vértice **H** não é visível na figura, mas é fácil de imaginar onde se encontra) e que em cada uma dessas posições a face **AEFB** (pintada de azul) permanece voltada para o observador.
Fazendo igual raciocínio para as 6 faces, segue-se, pelo Princípio Multiplicativo, que o observador pode ver a mesma pintura do cubo de:

$$6 \times 4 = 24 \quad \text{modos diferentes.}$$

Seja, então, x o número de pinturas distintas do cubo, nas condições exigidas, isto é, sendo cada face com uma cor. Como cada pintura pode ser vista de 24 modos diferentes pelo observador, as x pinturas podem ser vistas de x . 24 modos diferentes. Porém, como vimos no início, esse número é 6!. Logo,

$$x \cdot 24 = 6! \quad \text{e, portanto,} \quad x = \frac{6!}{24} = 30.$$

PROBLEMA 19
Um homem possui um estoque grande de tetraedros regulares de madeira, todos com as mesmas dimensões (Um tetraedro regular é uma figura sólida, com 4 faces, cada uma delas tendo a forma de um triângulo eqüilátero, veja Figura abaixo).



Se para cada tetraedro, ele pinta cada uma de suas faces triangulares com uma das cores: vermelho, cinza, azul ou branco, quantas pinturas distintas pode fazer nos tetraedros?
SOLUÇÃO

Chamemos as cores de: A – azul, B – branco, C – cinza e V - vermelho.
Existem 4 casos para tetraedros pintados totalmente com uma cor: todo A, todo B, todo C , todo V.
Existem 18 casos nos quais os tetraedros são pintados com duas cores: se as cores são A e B existem 3 casos, porque o número de faces pintadas com A pode ser 1, 2 ou 3; de maneira análoga, existem 3 casos para cada combinação das outras cores: AC, AV, BC, BV, CV.
Existem 12 tipos distintos de tetraedros pintados com três cores: se as cores são A, B, C, existem três casos –por exemplo, um caso com uma face A, uma face B e uma face C.
Existem 2 tipos de tetraedros pintados com 4 cores: oriente o tetraedro de modo que a face inferior seja A, a face virada para você seja B e, neste caso, as outras duas faces podem ser pintadas: CV ou VC.
Portanto, o número de pinturas distintas é igual a: 4 + 18 + 12 + 2 = 36.

PROBLEMA 20
Ache a quantidade total de inteiros positivos com todos os algarismos distintos.
SOLUÇÃO

Para resolver o problema, temos que contar, separadamente, a quantidade de números com um algarismo, com dois algarismos, com três algarismos, ..., com no máximo dez algarismos. Assim, a resposta será:

$$9 + (9.9) + (9.9.8) + (9.9.8.7) + (9.9.8.7.6) + ... + (9.9.8.7.6....3.2.1).$$

PROBLEMA 24
Num país imaginário, o número de dentes de um habitante é distinto do número de dentes de qualquer outro. Se cada pessoa pode ter no máximo 32 dentes, qual é o número de habitantes desse país?
SOLUÇÃO

Sejam d_1, d_2, d_3, ..., d_{32} os possíveis dentes que uma pessoa pode ter. Associamos a cada pessoa uma seqüência de 32 números, sendo que na posição i será o número 1 se a pessoa tiver o dente d_i e 0 se não tiver o dente d_i. Desse modo, o número máximo possível de pessoas é: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x ..... x 2 (32 fatores) = 2^{32} .

PROBLEMA 25
Mostre que qualquer conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos distintos.
SOLUÇÃO

Seja S = $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Dado qualquer subconjunto X de S, definimos n eventos, E_1, E_2, E_3, ..., E_n, da seguinte maneira: E_i é igual a afirmação "$a_i \in$ X". Cada um desses eventos pode ser ou verdadeiro ou falso, isto é, pode ocorrer de duas maneiras. Cada subconjunto de S é determinado pela ocorrência de todos os n eventos. O número de maneiras nas quais todos esses eventos podem ocorrer simultaneamente, que é também o número de subconjuntos de S, é: 2 x 2 x 2 x ... x 2 = 2^n.

PROBLEMA 26
Existem quantas diagonais num polígono convexo de n lados?
SOLUÇÃO

Qualquer um dos vértices pode ser escolhido como o primeiro extremo de uma diagonal, e temos $n - 3$ vértices para escolher como o segundo extremo da diagonal (isto é, qualquer vértice que não seja o primeiro extremo e os dois vértices vizinhos). Contando as diagonais desse modo, contaremos todas as diagonais duas vezes. Portanto, a resposta é $n(n - 1)/2$.

3. PERMUTAÇÕES

Na resolução de muitos problemas de contagem, é comum o aparecimento de expressões que são produtos de uma seqüência de números naturais consecutivos. Por exemplo: 4 x 3 x 2 x 1 ou 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x1 ou 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1. Esses produtos são chamados *fatoriais*.. A notação usual para eles é:

4! = 4 x 3 x 2 x 1;
7! = 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1;
9! = 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1,

onde se lê o 4! como *"fatorial de 4"*, 7! como *"fatorial de 7"*, 9! como "fatorial de 9". De uma maneira geral, se n é um inteiro não negativo, n! é lido com *"fatorial de n"* e

$$n! = n.(n - 1).(n -2).(n - 3)....4.3.2.1$$

Observe que 1! = 1 e, por definição, 0! = 1.

Uma *permutação* de n objetos distintos é qualquer coleção ordenada desses n objetos. Por exemplo, considere a coleção $X = \{a, b, c\}$. O que se segue são exemplos de permutações dos elementos do conjunto X:

a, b, c
c, b, a
b, a, c

Questão: *existem quantas permutações num conjunto de n objetos*?

Como uma permutação é coleção ordenada desses n objetos, para a primeira posição da ordem desses elementos temos n possibilidades. Uma vez escolhido o primeiro dessa ordem, para a escolha do segundo, temos $n - 1$ possibilidades. Uma vez escolhido o segundo elemento da ordem, para a escolha do segundo, temos $n - 2$ possibilidades, e, assim por diante. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de n objetos é igual a:

$$n.(n-1).(n-2).(n-3)....4.3.2.1 = n!\,.$$

PROBLEMA 21
Existem quantos anagramas da palavra "AMERICA"?
SOLUÇÃO

Inicialmente, pensemos as duas letras A como duas letras distintas, digamos A_1, A_2. Desse modo, permutando as letras da palavra "América", podemos formar $7!$ "palavras" distintas. Agora, qualquer uma dessas $7!$ "palavras" pode ser obtida de cada uma das outras permutando A_1 e A_2. Como as letras A_1, A_2 podem ser permutadas de $2!$ maneiras distintas, todas as $7!$ "palavras" se dividem em $2!$ grupos de palavras idênticas. Portanto, existem $7!/2! = 2520$ anagramas da palavra "AMERICA".

PROBLEMA 22
Existem quantas maneiras distintas para dispor numa fila 4 bolas: uma vermelha, uma branca, uma azul e uma verde?
SOLUÇÃO

O primeiro lugar na fila pode ser ocupado por qualquer uma das 4 bolas. O segundo lugar pode ser ocupado por qualquer uma das 3 bolas restantes, e assim por diante. Portanto existem $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ maneiras distintas para dispor numa fila 4 bolas: uma vermelha, uma branca, uma azul e uma verde.

PROBLEMA 23
Quantas rodas de crianças podemos formar com 12 crianças ?
SOLUÇÃO

Inicialmente, pense que você não pode fazer a roda girar. Nesse sentido, é claro que podemos dispor as crianças em roda de $12!$ maneiras distintas. Agora, observe que qualquer disposição das 12 crianças em rodas pode ser considerado a mesmo se fazemos 12 rotações. Assim, o número de rodas de crianças que podemos formar com 12 crianças é $12!/12 = 11!$.

4. COMBINAÇÕES

Uma *combinação* é uma seleção de objetos sem levar em conta a ordem. Dados n objetos distintos, notamos por C_n^r o número de maneiras distintas de se escolher r objetos da coleção total de n (sem se preocupar com a ordem). Naturalmente que se supõe que vale a condição $0 \leq r \leq n$.

O número C_n^r pode ser entendido em termos de um conjunto de n elementos. Mais precisamente, C_n^r é o número de subconjuntos contendo exatamente r elementos. Por exemplo, se X é a coleção contendo os três elementos a, b, c, isto é, X = { a, b, c}, então:

$C_3^2 =$ número de subconjuntos de X com exatamente 2 elementos = 3;
$C_3^1 =$ número de subconjuntos de X com exatamente 1 elementos = 3;
$C_3^3 =$ número de subconjuntos de X com exatamente 3 elementos = 1;

Questão: *De uma maneira geral, quanto vale* C_n^r?

A partir de n objetos distintos, C_n^r é igual ao número de maneiras de se escolher r desses objetos, sem se preocupar com a ordem. Uma coleção de r objetos pode ser ordenada de $r!$ maneiras distintas. Logo, para cada combinação desses n objetos, tomados r a r, corresponde $r!$ permutações. Como a escolha de r objetos, dentre os n existentes, pode ser feita, pelo Princípio Multiplicativo, de $n.(n-1).(n-2).(n-3)....(n-r+1)$ modos, temos a igualdade:

$$n.(n-1).(n-2).(n-3)....(n-r+1) = r!.\ C_n^r, \text{ ou ainda}$$

$$C_n^r = \frac{n(n-1).(n-2)...(n+r+1)}{r!}$$

Pode-se obter uma expressão mais compacta para C_n^r, multiplicamos o numerador e o denominador por $(n-r)!$. Assim,

$$C_n^r = \frac{n(n-1).(n-2)...(n+r+1).(n-r)!}{n!.(n-r)!} = \frac{n!}{r!.(n-r)!}.$$

O número C_n^r pode ser representado de várias maneiras: $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ ou $C(n, r)$ ou nCr.

A representação $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ é conhecida como *o coeficiente binomial de* n *sobre* r. Coeficientes binomiais, ocorrem na expansão de binômios como $(a + b)^n$, onde a, b são números reais (ou complexos) e n é um número inteiro não negativo.

É fácil ver que as seguintes propriedades são verdadeiras:

(a) $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$

(c) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

(d) $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$

(e) $\begin{pmatrix} n+1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ r-1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 27
De quantas maneiras podemos escolher 2 estudantes numa classe com 30 alunos?
SOLUÇÃO

A questão é a mesma que perguntar quantos subconjuntos de dois elementos possui um conjunto com 30 elementos. A resposta é $\begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} = C_{30}^{2}$ = 435.

PROBLEMA 28
Num grupo de 9 pessoas há 2 garotas e 7 rapazes. De quantas maneiras podemos escolher 4 membros do grupo sendo que, no mínimo, há uma garota dentre os escolhidos?
SOLUÇÃO

Se dentre os 4 membros escolhidos há uma garota, essa escolha pode ser feita de $C_7^3.C_2^1$ maneiras distintas. Se dentre os 4 membros escolhidos há duas garotas, essa escolha pode ser feita de $C_7^2.C_2^2$ maneiras distintas. Portanto, o número pedido é $C_7^3.C_2^1$ + $C_7^2.C_2^2$ = 91.

PROBLEMA 29
De quantas maneiras podemos dividir 10 rapazes em dois grupos de cinco?
SOLUÇÃO

O primeiro grupo pode ser escolhido de C_{10}^5 modos. Escolhido o primeiro grupo, sobram 5 pessoas e só há uma maneira de formar o segundo grupo. A resposta parece ser C_{10}^5 x 1. Entretanto, contamos cada divisão duas vezes. Por exemplo, a divisão dos rapazes nos dois grupos {a, b, c, d, e} e {f, g, h, i, j} é idêntica a divisão nos grupos: {f, g, h, i, j} e {a, b, c, d, e}, e foi contada como se fossem distintas. Portanto, a resposta é: $\frac{C_{10}^5.1}{2} = \frac{252}{2} = 126$.

PROBLEMA 30
Quantas são as diagonais de um cubo?
SOLUÇÃO

Um cubo tem oito vértices, doze arestas e seis faces. O número de diagonais é igual a $C_8^2 - 4 - 4 - 4 = 28 - 12 = 16$.

PROBLEMA 31
Marque dez pontos numa reta **r** e onze pontos numa reta **s,** sendo **r** paralela a **s**. A partir desse pontos, podemos formar quantos:

(a) triângulos?
(b) quadriláteros convexos?

SOLUÇÃO

(a) Os triângulos são de dois tipos: uns tem 2 vértices na reta **r** e 1 vértice na reta **s** e os outros tem 1 vértice na reta **r** e 2 vértices na reta **s.** Assim, existem $C_{10}^{2}.C_{11}^{1}+C_{10}^{1}.C_{11}^{2}=495+550=1045$ triângulos com vértices nas duas retas.

(b) Os quadriláteros só podem ser de um tipo: com dois vértice na reta **r** e dois vértices na reta **s**. Assim, existem $C_{10}^{2}.C_{11}^{2}=2475$.

PROBLEMA 32
Considere um conjunto formado por 15 palavras. De quantas maneiras é possível escolher um subconjunto de não mais do que 5 palavras?

SOLUÇÃO

Somando o número de maneiras de escolher subconjuntos com 0, 1, 2, 3, 4, 5 palavras, temos $C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+C_{15}^{2}+C_{15}^{3}+C_{15}^{4}+C_{15}^{5}=4944$ maneiras possíveis de escolher um subconjunto de não mais do que 5 palavras.

PROBLEMA 33
Onze cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados, de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 6 cientistas presentes.

(a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?
(b) Na situação do item (a), quantas chaves cada cientista deve ter?

SOLUÇÃO

(a) Pelos dados do problema, formado qualquer grupo de 5 cientistas do projeto, existe um cadeado para o qual nenhum deles possui a chave. Mas, em qualquer outro grupo de seis elementos existe essa chave. Portanto, o número de cadeados tem de ser no mínimo igual ao número de maneiras de escolher 5 cientistas dentre os 11 participantes do projeto, isto é, o número de cadeados é no mínimo igual a $C_{11}^{5}=462$.
(b) Seja A um dos cientistas do projeto. Formado qualquer grupo de 5 cientistas, selecionado dentre os 10 restantes, existe um cadeado para o qual A possui a chave, embora os cinco cientistas não possam abri-lo. Assim, A tem de possuir no mínimo $C_{10}^{5}=252$ chaves.

PROBLEMA 34
Considere um baralho comum de 52 cartas. Quantos grupos de 8 cartas, com, no mínimo, 3 cartas de ouros, podemos formar?

SOLUÇÃO

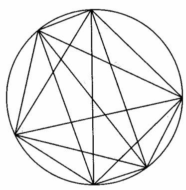
Existem $\binom{52}{8}$ grupos de 8 cartas. Temos que contar quantos são os grupos com duas cartas de *ouros*, quantos são os grupos com uma carta de *ouros* e com nenhuma. Com duas cartas de *ouros*, existem $\binom{13}{2}.\binom{39}{6}$ grupos, com uma carta de ouro existem $\binom{13}{1}.\binom{39}{7}$ e com nenhuma carta existem $\binom{39}{8}$. Portanto, a resposta será:

$$\binom{52}{8} - \binom{13}{2}.\binom{39}{6} - \binom{13}{1}.\binom{39}{7} - \binom{39}{8} = 236.577.627$$

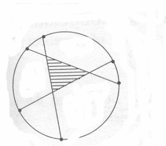
PROBLEMA 35
Quantos triângulos podem ser formados com os n vértices de um polígono convexo de modo que nenhum lado do triângulo possa ser um lado do polígono?
SOLUÇÃO

Podemos escolher um vértice do polígono de n maneiras distintas. Os outros dois vértices tem de ser escolhidos dentre os $n - 3$ vértices que restam, excluindo o vértice já escolhido e os dois adjacentes a ele. Desse modo, existem $\binom{n-3}{2} = \frac{(n-3).(n-4)}{2}$ possibilidades de se escolher os outros dois vértices, sendo necessário eliminar $(n - 4)$ delas, pois correspondem aos casos nos quais as duas escolhas dos vértices são ligadas por um lado do polígono. Assim, existem $\frac{(n-3).(n-4)}{2} - (n-4) = \frac{(n-4).(n-5)}{2}$ maneiras de se escolher os outros dois vértices. Agora, como qualquer vértice pode ser escolhido como o primeiro vértice, a resposta do problema é: $\frac{n.(n-4).(n-5)}{2}$.

PROBLEMA 36
Dado um círculo, marque n pontos sobre o ele e desenhe as cordas determinadas por esses pontos. Se nenhum terno de cordas possui um ponto em comum, existem quantos triângulos com vértices na região limitada pelo círculo? (A figura abaixo, mostra um exemplo com 6 pontos sobre o círculo e 1 desses triângulos).



SOLUÇÃO
Os três lados de cada triângulo na região limitada pelo círculo determina 6 pontos sobre o círculo, veja Figura abaixo.

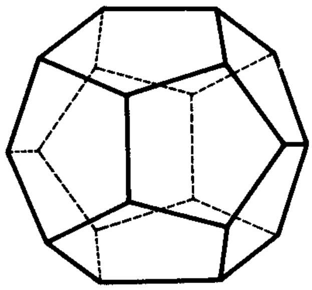


Inversamente, todo conjunto de seis pontos sobre o círculo determina um triângulo. Portanto, o número de triângulos é $\binom{n}{6} = \dfrac{n!}{6!(n-6)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}$.

PROBLEMA 37

Um calendário de mesa consiste de um dodecaedro regular com um mês diferente sobre cada uma de suas doze faces pentagonais. De quantas maneiras, essencialmente distintas, podemos arrumar os meses nas faces do dodecaedro para formar o calendário? *(Se uma arrumação puder ser obtida de outra por uma rotação, as duas* ***não*** *são essencialmente distintas).*

SOLUÇÃO



DODECAEDRO

Escolha qualquer face para colocar o mês de janeiro. Isto pode ser feito de uma única maneira, já que todas as faces são pentágonos congruentes. Um vez escolhida a face para o mês de janeiro, existem $\binom{11}{5}$ maneiras para escolher os meses que ocuparão o "anel" das faces adjacentes aquela que contém o mês de janeiro e $4!$ maneiras de arrumar essas faces. Olhando a figura do dodecaedro, é fácil perceber que existe um segundo "anel" de faces adjacentes ao primeiro anel. Para esse segundo anel, podemos escolher de $\binom{6}{5}$ maneiras os meses para ocupar essas faces e existem essencialmente $5!$ maneiras de arrumar esses meses relativamente ao primeiro anel. Um vez escolhidas as faces do segundo anel, resta uma única possibilidade para a escolha da face antípoda a face com o mês de janeiro. Portanto, $\binom{11}{5}.4!.\binom{6}{5}.5! = \dfrac{11!}{5}$ = 7.983.360 é o número de maneiras, essencialmente distintas, de fazer o calendário.

PROBLEMA 38

Marque m pontos sobre uma reta *r*, digamos, P_1, P_2, P_3, ...,P_m , e marque n pontos sobre uma reta s, digamos, Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n , com *r* distinta de *s* e *r* paralela a *s*. Em seguida, desenhe todos os segmentos P_iQ_j. Qual é o número máximo de pontos de interseção?

SOLUÇÃO

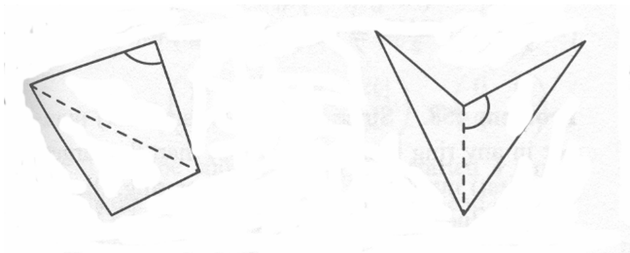
Cada escolha de um par de pontos sobre a reta *r* e de um par de pontos sobre a reta *s* pode produzir um ponto de interseção. Escolhendo apropriadamente os pontos sobre cada reta, podemos arranjar esses pontos de modo que as interseções sejam todas distintas. Portanto, o número máximo de pontos de interseção é igual a $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$.

PROBLEMA 39

São dados 75 pontos coplanares, nenhum terno deles é colinear. Prove que, de todos os triângulos desenhados com vértices naqueles pontos, no máximo 70 % são acutângulos.

SOLUÇÃO

Cada 4 desses pontos são vértices de um quadrilátero que contém ao menos um ângulo de no mínimo 90^o, veja Figura abaixo.



Portanto, no mínimo um dos quatro triângulos formados a partir dos 4 pontos é obtusângulo ou retângulo.

Considere quaisquer 5 pontos. Cada quatro deles produz ao menos 5 triângulo obtusângulos ou retângulos. Existem 5 maneiras de escolher 4 pontos, logo existem ao menos 5 triângulos obtusângulos ou retângulos. Mas, qualquer triângulo é contado duas vezes, logo podemos ter certeza que somente que 3 desses triângulos são distintos. Portanto, do total de $\binom{5}{3}=10$ triângulos possíveis a partir de cinco pontos, no mínimo 3 deles são triângulos obtusângulos ou retângulos. Agora, dos 75 pontos dados, podemos escolhere 5 deles de $\binom{75}{5}$ maneiras. Para cada escolha de 5 pontos, relacione todos os triângulos obtidos; 30 % no mínimo serão obtusângulo ou retângulos. Na relação de todos os triângulos, para todas as possíveis escolhas de 5 pontos, cada triângulo aparece $\binom{72}{2}$ vezes, e no mínimo 30 % deles são obtusângulos ou retângulos. Portanto, na lista dos triângulos sem repetição, no mínimo 30 % deles são obtusângulos ou retângulos. Logo, 70 % são acutângulos.

PROBLEMA 40
Considere um polígono convexo com n vértices. De quantas maneiras este polígono pode ser triangulado com $(n - 3)$ diagonais, de modo que elas não se interceptem no interior do polígono e que cada triângulo tenha um ou dois lados em comum com polígono convexo dado?
SOLUÇÃO

Para $n = 4$, o número de soluções é 2. Considere $n \geq 5$. Um vértice P_1 do polígono pode ser escolhido de n maneiras. Por uma diagonal d_1, ligue os dois vértices que são adjacentes a P_1. Considere o triângulo que tem como lado d_1 e um vértice P em comum com o polígono, com $P \neq P_1$. Esse triângulo, tem um lado em comum com o polígono convexo dado. O terceiro lado tem de ser uma das diagonais que unem um vértice localizado sobre d_1 e um outro adjacente a P_1. Logo, a segunda diagonal pode ser escolhida de 2 modos distintos. De maneira análoga, se $d_1, d_2, d_3, ..., d_i$, com $i < n - 3$, forem escolhidas, existem duas possibilidades para a escolha de d_{i+1}. Logo, existem $n2^{n-4}$ maneiras de escolher um vértice x_1 e uma seqüência de diagonais $d_1, d_2, d_3, ..., d_{n-3}$ com as propriedades desejadas. Cada triangulação obtida desta maneira possui dois triângulos que contém dois lados adjacentes do polígono e, portanto, cada um é contado duas vezes. Logo, o número pedido é $\dfrac{n2^{n-4}}{2} = n2^{n-5}$.

PROBLEMA 41
Desenhamos todas as diagonais de um octógono convexo, para o qual nenhum terno de diagonais intercepta-se no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção existem?
SOLUÇÃO

Chamemos todo ponto da região limitada pelo octógono de ponto interior. Todo ponto interior que é ponto de interseção de duas diagonais corresponde a um conjunto de quatro vértices do octógono, aqueles pontos que são os extremos das duas diagonais. Por outro lado, todo conjunto de 4 vértices determina exatamente um ponto interior. Portanto, o número de interseções interiores é o número de maneiras de se escolher 4 vértices dentre os oito, isto é, $\binom{8}{4} = 70$.

PROBLEMA 42
De quantos modos se pode repartir 27 livros diferentes entre as pessoas A, B e C, de modo que A e B, juntas, recebam o dobro de C?
SOLUÇÃO

Inicialmente, vejamos quantos livros deve caber a pessoa C. Se C recebe x livros, então as pessoas A e B, juntas, devem receber $2x$. Daí, $2x + x = 27$, o que resulta $x = 9$. Agora, dentre os 27 livros existentes, podemos escolher 9 livros para C de C_{27}^{9} maneiras distintas. Uma vez escolhidos os 9 livros para a pessoa C, resta-nos saber de quantos modos diferentes podemos distribuir os 18 livros restantes entre A e B. Como cada um dos 18 livros restantes pode ser dado a A ou a B, esses livros podem ser distribuídos de 2^{18} modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, o número pedido é $C_{27}^{9} \cdot 2^{18}$.

PROBLEMA 43

De quantas maneiras se pode escolher, 3 números distintos dentre os elementos do conjunto E = { 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100}, de modo que sua soma seja um múltiplo de 3?

SOLUÇÃO

Considere os seguintes conjuntos:

A = {x $\in$ E; x é múltiplo de 3} = {3, 6, 9, ..., 99}
B = {x $\in$ E; x deixa resto 1 quando dividido por 3} = {1, 4, 7, 10, ..., 100)
C = {x $\in$ E; x deixa resto 2 quando dividido por 3} = {2, 5, 8, 11, ..., 98}.

Observe que os conjuntos A, B e C são dois a dois disjuntos e possuem, respectivamente, 33, 34 e 33 elementos. Observe, também, que:

(a) Cada 3 números escolhidos em A têm por soma um múltiplo de 3.
(b) Cada 3 números escolhidos em B têm por soma um múltiplo de 3.
(c) Cada 3 números escolhidos em C têm por soma um múltiplo de 3.
(d) Escolhendo-se um número em A, um em B e um em C, a soma desses três números é um múltiplo de 3.

Portanto, das observações acima, segue que o número buscado é igual a: $C_{33}^3 + C_{34}^3 + C_{33}^3 + C_{33}^1 . C_{34}^1 . C_{33}^1$.

PROBLEMA 44

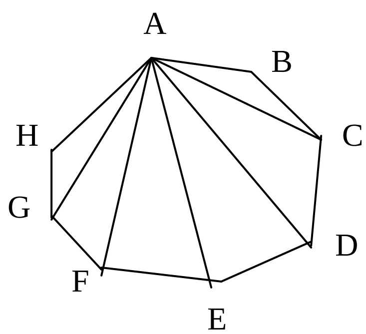
Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participe exatamente de duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum. Pergunta-se:

(a) Qual é o valor de x?
(b) Quantos professores há em cada banca?

SOLUÇÃO

(a) Chamemos de A, B, C, D, E, F, G, H as 8 bancas, que podemos imaginar como os vértices de um octógono. Observe que, como cada professor participa de exatamente duas bancas, o número x de professores é o número de formas de ligar 2 a 2 os 8 vértices do octógono, isto é, de $C_8^2 = 28$.

(b) Podemos imaginar os 8 professores como segmentos unindo os 8 vértices, veja figura abaixo.



Assim, o número de professores de cada banca é o número de segmentos que une cada vértice aos outros vértices do octógono, ou seja, 7.

PROBLEMA 44

De quantos modos se pode preencher um cartão da loteria esportiva (13 jogos) com três prognósticos duplos e dois prognósticos triplos?

SOLUÇÃO

O modelo de um cartão da loteria esportiva possui 13 linhas (correspondentes aos jogos) e, para cada uma delas, existem três colunas (onde o usuário assinala seus prognóstico para cada jogo), sendo semelhante ao mostrado na figura abaixo:

Jogo	**Coluna1**	**Coluna2**	**Coluna 3**
Jogo 1			
Jogo 2			
Jogo 3			
Jogo 4			
Jogo 5			
Jogo 6			
Jogo 7			
Jogo 8			
Jogo 9			
Jogo 10			
Jogo 11			
Jogo 12			
Jogo 13			

Para resolver o problema, vamos estudar as possibilidades de ocorrer sucessivamente os 5 eventos: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, definidos abaixo.

E_1: *escolher, dentre as 13 linhas existentes, 3 linhas para marcar os prognósticos duplos*. O evento E_1 pode ocorrer de C_{13}^{3} maneiras distintas. Após ter feito a escolha correspondente ao evento E_1, vamos analisar o evento E_2.

E_2: *escolher, dentre as 13 linhas 2 linhas para os prognósticos triplo*. O evento E_2 pode ocorrer de C_{10}^{2} maneiras, pois, tendo ocorrido E_1, restam 10 linhas (jogos) para escolhermos duas.

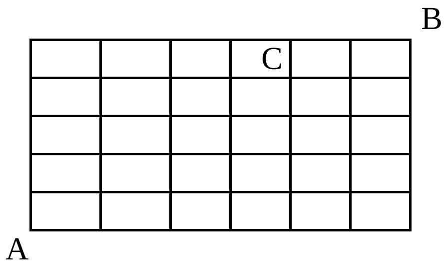
E_3: *escolher, dentre as três linha selecionadas no evento E_1, os prognósticos duplos*. Esse evento pode ocorrer de 3^3 maneiras distintas, pois fazer um duplo em cada linha corresponde a deixar um coluna vazia, e isto pode ser feito de 3 modos diferentes.

E_4: *escolher, dentre as duas linhas selecionadas, após os três eventos acima, os prognósticos triplos*. Esse evento só pode ocorrer de uma única maneira, pois, com um jogo triplo, cada linha só pode ser preenchida de um único modo.

E_5: *escolher, depois de ocorrer os quatro eventos acima, os prognósticos simples nas 8 linhas (jogos) restantes*. Esse evento pode ocorrer de 3^8 maneiras distintas, pois cada uma das linhas pode ser preenchida de 3 modos diferentes.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, pode-se preencher um cartão da loteria esportiva com três prognósticos duplos e três prognósticos triplos de $C_{13}^{3}\,.\,C_{10}^{2}\,.3^3\ .1.3^8$ = 2.279.881.890 modos diferentes.

PROBLEMA 45
A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 na direção leste-oeste.



(a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?
(b) Quantos desses trajetos passam por B?

SOLUÇÃO

(a) Seja H um movimento horizontal de uma quadra e V um movimento vertical de uma quadra. Um trajeto mínimo de A até B pode ser identificado com uma seqüência de onze movimentos: 6 horizontais e 5 verticais, em qualquer ordem. Isto é, um trajeto mínimo de A até B poderia ser representado por: VHHVVHVHHVH ou HHVHVVHVHVH. Assim, a quantidade de trajetos mínimos para se ir de A até B será igual a $\frac{11!}{6!5!} = 462$.

(b) Aplicando-se o resultado anterior, basta calcular o número de trajetos mínimos de A até C e multiplicar (pelo Princípio Multiplicativo) pelo número de trajetos de mínimos de C até B. Desse modo, o número pedido será:

$$\frac{8!}{4!.4!}\,x\,\frac{3!}{2!} = 210$$

PROBLEMA 46
De quantas maneiras é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

SOLUÇÃO

Inicialmente, observe que a resposta não é $C_7^4 = 35$. Na verdade, C_7^4 seria o modo de escolher 4 sabores *diferentes* entre os sete sabores oferecidos, que não é o caso.
Sejam 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 os sabores e as variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$, onde x_1 é a quantidade de sorvete que vamos comprar do sabor 1, x_2 é a quantidade de sorvete que vamos comprar do sabor 2, ..., x_7 é a quantidade de sorvete que vamos comprar do sabor 7. Estamos procurando o número de soluções, nos inteiros não negativos, da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_7 = 4$$

Interpretamos as soluções da equação acima no esquema traço-bola, isto é, cada bola representa uma unidade no valor da incógnita e cada traço é usado para separar duas incógnitas. Por exemplo:

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7

″ ê ″ ê ″ ê ê ê ê ″

1 1 1 0 0 0 1

Neste caso, compramos 1 sorvete do sabor 1, 1 sorvete do sabor 2, 1 sorvete do sabor 3 e 1 sorvete do sabor 7. No exemplo abaixo, compramos 2 sorvete do sabor 2, 1 sorvete do sabor 4 e 1 sorvete do sabor 6:

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7

ê ″ ″ ê ê ″ ê ê ″ ê

0 2 0 1 0 1 0

Para formar uma representação de uma solução devemos arrumar em fila 4 bolas (pois temos que comprar 4 sorvetes) e 6 traços (usados para separar as 7 incógnitas). Mas, o número total de fazer isso, ou seja, de arrumar 4 bolas e 6 traços, é igual a:

$$\frac{10!}{4!6!} = C_{10}^{4} = 210 .$$

PROBLEMA 47
Em uma urna há fichas numeradas de 1 ate 10. De quantos modos se podem retirar 3 fichas, de maneira que a soma dessas fichas não seja menor do que 9?
SOLUCÃO

Podemos retirar 3 fichas de $\binom{10}{3}$ maneiras distintas. Observe que são 4 os grupos de 3 fichas cuja soma é inferior a 9:

$1 + 2 + 3 = 6 < 9$
$1 + 2 + 4 = 7 < 9$
$1 + 2 + 5 = 8 < 9$
$1 + 3 + 4 = 8 < 9$.

Logo, a resposta é $\binom{10}{3} - 4 = 120 – 4 = 116$.

PROBLEMA 48
De quantas maneiras podemos colocar 8 bolas idênticas em 15 urnas numeradas?

SOLUÇÃO

Sejam $U_1, U_2, U_3, ..., U_{15}$ as urnas e seja x_i a quantidade de bolas colocadas na urna U_i. Assim, temos: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{15} = 8$.
Usando a representação no esquema bola-traço, concluímos que o número de modos de fazer isso é: $\frac{(14+8)!}{14!.8!} = 319.770$.

PROBLEMA 49
Os números inteiros compreendidos entre 100.000 e 999.999 são divididos em classes de modo que números diferentes estão na mesma classe se, e só se, eles têm os mesmos algarismos, diferindo apenas na ordem. Assim, por exemplo, 552.221 e 125.252 estão na mesma classe. Quantas são as classes formadas?
SOLUÇÃO

O problema resume-se em saber de quantos modos podemos formar as classes. Para isso, suponhamos que existam dez caixas, cada uma contendo algarismos de um mesmo tipo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Para formarmos os elementos de uma classe, devemos escolher 6 algarismos destas caixas, podendo estes ser de uma mesma caixa. Assim,

da caixa 0 devemos retirar x_1 algarismos;
da caixa 1 devemos retirar x_2 algarismos;
da caixa 2 devemos retirar x_3 algarismos;
da caixa 3 devemos retirar x_4 algarismos;
....
da caixa 9 devemos retirar x_{10} algarismos;

de tal forma que: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 6$ (*).

Logo, o número de classes é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação (*). Isto é, $\frac{15!}{6!.9!} = \binom{15}{6} = 5005$. Todavia, nestas classes está incluída aquela contendo a seqüência 000...00, que não é um número compreendido entre 100.000 e 999.999. Portanto, o número de classes satisfazendo as condições do problema é $\binom{15}{6} - 1 = 5005 - 1 = 5004$.

PROBLEMA 50
(a) Ache o número de inteiros positivos com n algarismos nos quais algarismos adjacentes não sejam iguais.
(b) Existem quantos números pares e quantos ímpares satisfazendo (a)?
SOLUÇÃO

(a) Um número inteiro positivo com n algarismos pode ser entendido como uma fila de n algarismos. Contando da esquerda para a direita, o primeiro algarismo da fila pode ser ocupado de 9 maneiras distintas (já que o zero não pode ocupar essa posição, caso contrário o número não seria de n algarismos). Contando da esquerda para a direita, o segundo lugar pode ser ocupado de 9 maneiras, pois o primeiro algarismo da fila não pode ocupar essa posição mas o zero pode ser uma opção. Prosseguindo deste modo, qualquer posição pode ser ocupada de 9 maneiras distintas. Logo, existem 9^n números inteiros positivos onde os algarismos adjacentes são distintos.

(b) Seja X(n) = a quantidade de números encontrados no subitem (a). Isto é, X(n) = 9^n. Podemos escrever X(n) = Y(n) + Z(n), onde Y(n) é a quantidade de números pares encontradas em (a) e Z(n) é a quantidade de ímpares. Como 9^n é um número ímpar, segue que Y(n) $\neq$ Z(n).

Afirmação: $Y(n) = \dfrac{9^n + (-1)^n}{2}$ e $Z(n) = \dfrac{9^n - (-1)^n}{2}$

Podemos provar por indução sobre n que as expressões Y(n) e Z(n) são verdadeiras.

De fato, para $n = 1$, Y(1) = 4 e Z(1) = 5. Suponha que para n = $k > 1$ o resultado seja verdadeiro. Vamos mostrar que o resultado é verdadeiro para (k + 1). Para isso, observe que qualquer número par de (n + 1) algarismos satisfazendo (a) pode ser formado de duas maneiras:

- se um número de n algarismos é par, acrescente um algarismo par ao final dele. Isto pode ser feito de 4 modos distintos, já que algarismos adjacentes não podem ser iguais;
- se um número de n algarismos é ímpar, acrescente um algarismo par ao final dele. Isto pode ser feito de 5 modos distintos.

Logo, Y(n +1) = 4.Y(n) + 5.Z(n) = 4.Y(n) + 5.[X(n) - Y(n)] = 5 X(n) - Y(n). Usando a hipótese de indução, temos

$$Y(n+1) = 5.\,9^n - \frac{9^n + (-1)^n}{2} = \frac{9^{n+1} - (-1)^n}{2} = \frac{9^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}$$

De modo análogo, chegaremos que Z(n + 1) = $\dfrac{9^{n+1} - (-1)^{n+1}}{2}$.

PROBLEMA 51

Mostre que em qualquer grupo de 6 pessoas existirá sempre um subgrupo de 3 dessas pessoas que se conhecem mutuamente ou um subgrupo de 3 que são duas a duas desconhecidas.

SOLUÇÃO

Sejam A, B, C, D, E, F as seis pessoas. Vamos supor que as pessoas que conhecem A estão na sala Y e as pessoas que não conhecem A estão na sala Z; A não está nem em Y nem em Z. Retirando A, restam cinco pessoas. Segue que, ou na sala Y ou em Z há no mínimo 3 pessoas. Analisemos duas possibilidades:

(a) Suponha que B, C e D estejam em Y. Podemos concluir que: ou essas três pessoas são mutuamente estranhas (e neste caso o resultado é verdadeiro) ou no mínimo duas delas, digamos B e C, se conhecem. Como A conhece ambas, segue que o trio A, B, C forma um grupo de 3 pessoas que se conhecem mutuamente. Neste caso, o problema está resolvido.

(b) Suponha o contrário de (a). Neste caso, mude as noções de “conhecer” por “desconhecer” e o problema se resolve.

PROBLEMA 52

Um alfabeto possui cinco letras: *a, b , c, d, e*. Nesse alfabeto, existem quantas palavras de n letras com um número par de *a´*s?

SOLUÇÃO

Nesse alfabeto, o número total de palavras com n letras é 5^n e o número de palavras (com n letras) sem o a e sem o b é 3^n. Assim, $5^n - 3^n$ é o número de elementos do conjunto X constituído das palavras com n letras que tem o a e o b em alguma(s) posição (ões). Agora, observe que o conjunto X pode ser dividido em subconjuntos *disjuntos* X_i da seguinte forma: duas palavras p e p' pertencem ao mesmo subconjunto X_i se e somente se as posições de *c´s, d´s* e *e´s* em p são as mesmas que em p'. Isto significa que existem tantas palavras em X_i quantas são as seqüências de a e b para algum comprimento fixo $n_i \leq n$. Metade dessas palavras tem um número par de a. Portanto, o total de palavras com um número par de *a´s* é: $3^n + \dfrac{5^n - 3^n}{2} = \dfrac{5^n + 3^n}{2}$.

5. BIBLIOGRAFIA

[1] – BACHX, A. de; POPPE, L. M. B.; TAVARES; RAYMUNDO N. O. – Prelúdio à Análise Combinatória. Companhia Editora Nacional. 1975

[2] – BALAKRISHNAM, V. K. – Combinatorics. Schaum´s Outlines of Theory and Problems. McGraw-Hill Inc. 1995

[3] - BARBEAU, E; KLAMKIN, M. S.; MOSER, W. O. J. – Five Hundred Mathematical Challenges. The Mathematical Association of American. 1995

[4] – CARVALHO, P. C. P; LIMA, E. L.; MORGADO, A. C; WAGNER, E. – A Matemática do Ensino Médio. Vol 2. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. 1998

[5] – CARVALHO, J. B. P; CARVALHO, P. C. P; FERNANDEZ, P; MORGADO, A. C de O.-– Análise Combinatória e Probabilidade. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. 1991

[6] – COHEN, D. I. A. – Basic Techiniques of Combinatorial Theory. John Wiley & Sons, Inc. 1978

[7] – FOMIN, D; GENKIN, S.; ITENBERG, I – Mathematical Circles (Russian Experience). American Mathematical Society. 1996

[8] – NIVEN, I – Mathematics of Choice. The Mathematical Association of American. 1965

[9] – SANTOS, J. P; MELO, M. P.; MURARI, I.T.C. - Introdução à Análise Combinatória. Editora UNICAMP. 1995

[10] – TOMESCU, I – Problems in Combinatorics and Graph Theory. John Wiley & Sons, Inc. 1985

[11] – VILENKIN, N. Ya. - Combinatorics. Academic Press. 1971