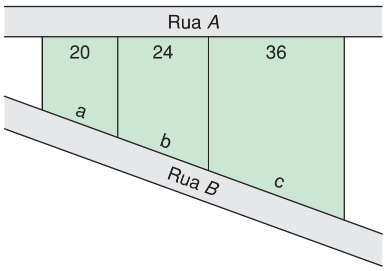
CADERNO DE ATIVIDADES
TERCEIRÃO FTD 1

Matemática
Módulo 1

Geometria Métrica Plana

1 (Faap-SP) O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura.



Sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 120$ m, os valores de *a*, *b* e *c*, em metros, são, respectivamente:

a) 40, 40 e 40
b) 30, 30 e 60
c) 36, 64 e 20
x d) 30, 36 e 54
e) 30, 46 e 44

Devemos ter:

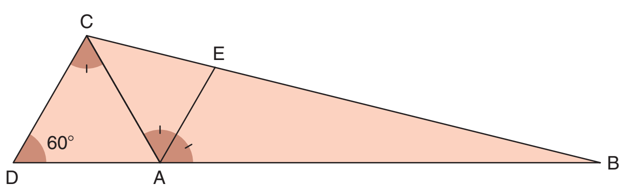
$$\begin{cases} \dfrac{a}{20} = \dfrac{b}{24} = \dfrac{c}{36} \quad (1) \\ a + b + c = 120 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) e (2), obtemos:

$$\frac{a + b + c}{20 + 24 + 36} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36} \rightarrow \frac{120}{80} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36}$$

Daí, obtemos: $a = 30$ m, $b = 36$ m e $c = 54$ m.

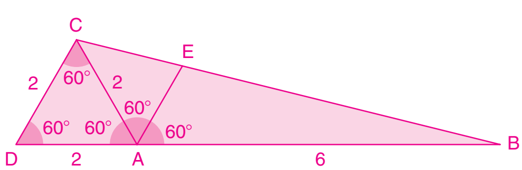
2 (MACK-SP)



Na figura acima, os ângulos assinalados são iguais, $AC = 2$ e $AB = 6$. A medida de $\overline{AE}$ é:

a) $\frac{6}{5}$
b) $\frac{7}{4}$
c) $\frac{9}{5}$
x d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{5}{4}$

Do enunciado, temos a figura:



Os triângulos AEB e DCB são semelhantes.

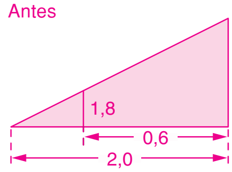
Então: $\frac{AE}{2} = \frac{6}{8} \rightarrow AE = \frac{3}{2}$.

3 (ENEM) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, ao seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:

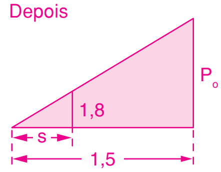
a) 30 cm
x b) 45 cm
c) 50 cm
d) 80 cm
e) 90 cm

60 cm = 0,6 m

Antes



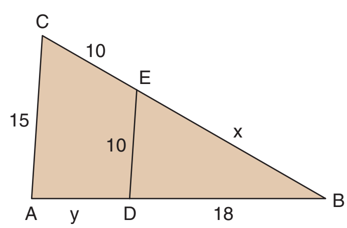
Depois



$$\frac{P_o}{2,0} = \frac{1,8}{0,6} \rightarrow P_o = \frac{2,0 \cdot 1,8}{0,6} = 6,0$$

$$\frac{6,0}{1,5} = \frac{1,8}{s} \rightarrow s = \frac{1,5 \cdot 1,8}{6,0} = 0,45 \rightarrow s = 0,45 \text{ m ou } 45 \text{ cm}$$

4 (UFSC) Na figura abaixo, $\overline{AC}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Nessas condições, determine o valor de $x + y$.



Os triângulos ACB e DEB são semelhantes. Logo:

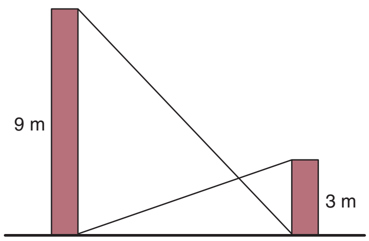
$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} \rightarrow \frac{15}{10} = \frac{y + 18}{18} \rightarrow y = 9$$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{CB}{EB} \rightarrow \frac{15}{10} = \frac{10 + x}{x} \rightarrow x = 20$$

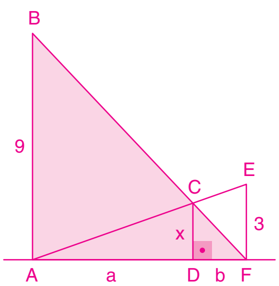
Assim: $x + y = 20 + 9 = 29$

5 (UEL-PR) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura abaixo. Sabendo que os muros têm alturas de 9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam? Despreze a espessura das barras.

a) 1,50 m
b) 1,75 m
c) 2,00 m
x d) 2,25 m
e) 2,50 m



Da figura, temos:



• $\triangle ABF \sim \triangle CDF$

$\frac{9}{x} = \frac{a+b}{b}$ (1)

• $\triangle EFA \sim \triangle CDA$

$\frac{3}{x} = \frac{a+b}{a}$ (2)

De (1), vem:

$a + b = \frac{9b}{x}$ (3)

Substituindo (3) em (2), vem:

$\frac{3}{x} = \frac{\frac{9b}{x}}{a} \rightarrow 3a = x \cdot \frac{9b}{x} \rightarrow a = 3b$

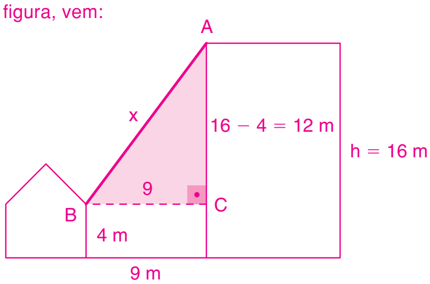
De (1), vem:

$\frac{9}{x} = \frac{3b + b}{b} \rightarrow \frac{9}{x} = 4 \rightarrow x = 2{,}25$ m

6 (UFSM-RS) Um fio de antena está preso no topo de um prédio de 16 metros de altura e na cumeeira de uma casa ao lado, a 4 metros de altura. Considerando o terreno plano (horizontal) e sabendo que a distância entre a casa e o prédio é 9 metros, o comprimento do fio é, em metros:

a) 12 x b) 15 c) $\sqrt{337}$ d) 20 e) 25

Fazendo a figura, vem:

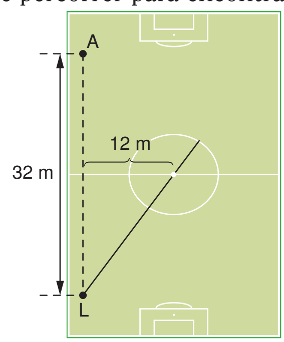


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$x^2 = 9^2 + 12^2$
$x^2 = 81 + 144$
$x^2 = 225$
$x = 15$ m

7 (Fuvest-SP) Um lateral *L* faz um lançamento para um atacante *A*, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral, e quando passa pela linha de meio-de-campo, está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio-de-campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá de percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:

a) 18,8 m
x b) 19,2 m
c) 19,6 m
d) 20 m
e) 20,4 m



A menor distância do atacante à trajetória da bola está na perpendicular à trajetória que contém a posição do atacante. Na figura é a medida do segmento $\overline{AP}$. Assim, considerando os dados da figura em metros, temos:

1) No triângulo LMB, retângulo em M:

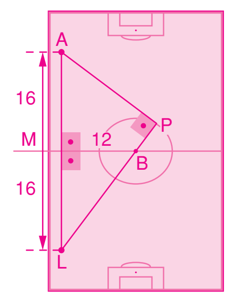
$(LM)^2 + (MB)^2 = (LB)^2 \rightarrow 16^2 + 12^2 = (LB)^2 \rightarrow LB = 20$ m

2) Da semelhança dos triângulos LPA e LMB:

$\frac{AP}{BM} = \frac{AL}{BL} \rightarrow \frac{AP}{12} = \frac{32}{20}$

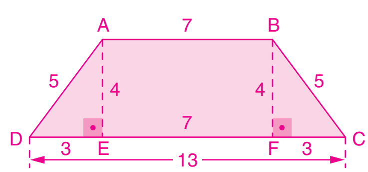
$AP = \frac{96}{5}$

$AP = 19{,}2$ m



8 (MACK-SP) As bases de um trapézio isósceles medem 7 e 13. Se a altura do trapézio é 4, o seu perímetro é:

a) 27 b) 25 c) 20 x d) 30 e) 40



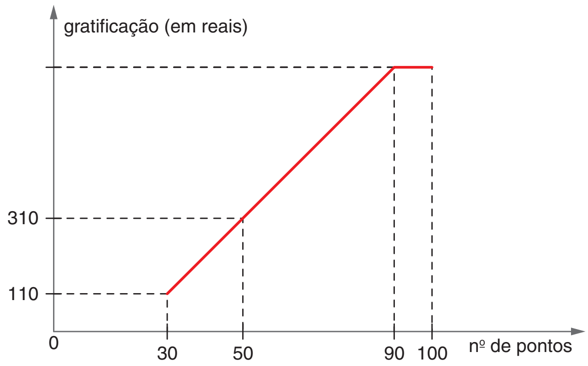
Os triângulos ADE e BCF da figura são retângulos, congruentes e de catetos medindo 3 e 4.

Dessa forma, $AD = BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

O perímetro do trapézio ABCD, isósceles, é:

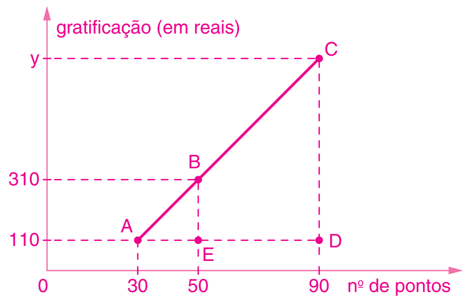
$AB + BC + CD + DA = 7 + 5 + 13 + 5 = 30$

9 (UFF-RJ) A Cerâmica Marajó concede uma gratificação mensal a seus funcionários em função da produtividade de cada um convertida em pontos; a relação entre a gratificação e o número de pontos está representada no gráfico a seguir.



Observando que, entre 30 e 90 pontos, a variação da gratificação é proporcional à variação do número de pontos, determine a gratificação que um funcionário receberá no mês em que obtiver 100 pontos.

A gratificação *y* que um funcionário recebe quando obtém 100 pontos é a mesma que a recebida quando obtém 90 pontos.



Observando o gráfico, temos que os triângulos ACD e ABE são semelhantes; logo:

$$\frac{CD}{BE} = \frac{DE}{EA}$$

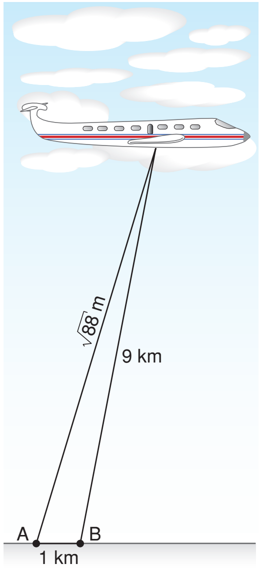
$$\frac{y - 110}{310 - 110} = \frac{90 - 30}{50 - 30}$$

$$\frac{y - 110}{200} = \frac{60}{20}$$

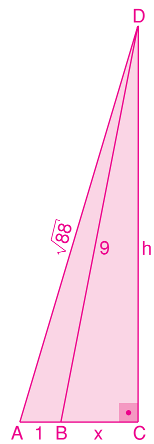
$$\frac{y - 110}{200} = 3$$

$y = 710$ reais

10 (UFBA) A figura mostra a posição de um avião observado a partir de dois pontos, *A* e *B*, localizados no solo e distantes 1 km um do outro. Sabe-se que, nesse instante, o avião dista, respectivamente, $\sqrt{88}$ km e 9 km dos pontos *A* e *B*. Nessas condições, determine a altura do avião, em relação ao solo, no instante considerado.



Representando, temos:



Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$\triangle CBD \rightarrow 9^2 = h^2 + x^2$ (1)

$\triangle ACD \rightarrow (\sqrt{88})^2 = (x + 1)^2 + h^2$ (2)

De (1), vem:

$h^2 = 9^2 - x^2 \rightarrow h^2 = 81 - x^2$

Substituindo em (2), vem:

$88 = (x + 1)^2 + 81 - x^2$

$88 = x^2 + 2x + 1 + 81 - x^2$

$88 = 2x + 82$

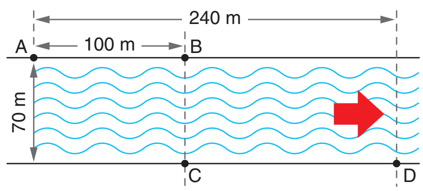
$x = 3$ km

Portanto:

$h^2 = 81 - 3^2 \rightarrow h^2 = 81 - 9$

$h^2 = 72 \rightarrow h = \sqrt{72} \rightarrow h \simeq 8{,}5$ km

11 (EEM-SP) Um cabo deverá ligar o ponto A, situado na margem esquerda do rio, ao ponto D, situado na margem direita do mesmo rio, 240 metros rio abaixo (conforme a figura). Suponha que as margens do rio sejam paralelas e que sua largura seja de 70 metros. Esse cabo deverá ser esticado pela margem esquerda do rio, de A até B, 100 metros rio abaixo. Do ponto B atravessará perpendicularmente a margem do rio para o ponto C. De C seguirá ao longo da margem direita até D.

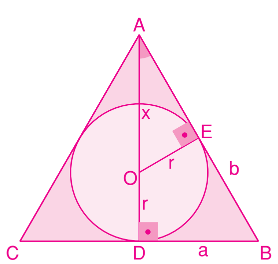


Calcule o comprimento total do cabo e determine qual seria seu comprimento se ele fosse esticado diretamente de A até D.

Seja x o comprimento total do cabo. Assim:
$x = AB + BC + CD$
$x = 100 + 70 + 140$
$x = 310$ m
Seja y o comprimento do cabo esticado de A até D. Logo:
$(AD)^2 = (240)^2 + (70)^2$
$(AD)^2 = 62\,500$
$(AD)^2 = \sqrt{62\,500}$
$AD = 250$ m

12 (UFC) Calcule o comprimento do raio $r > 0$ de uma esfera inscrita num cone circular reto cujo raio da base mede $a = 5$ e a geratriz mede $b = 7$. (Utilize cm como unidade de comprimento.)

O problema reduz-se a calcular o raio da circunferência inscrita num triângulo isósceles com base $2a > 0$ e lados congruentes de medida b. Por semelhança de triângulos, obtemos a igualdade:



$\triangle ADB \sim \triangle AEO \rightarrow \frac{x}{r} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{x}{r} = \frac{7}{5} \rightarrow x = \frac{7}{5}r$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$b^2 = (x + r)^2 + a^2 \rightarrow 7^2 = \left(\frac{7r}{5} + r\right)^2 + 5^2$

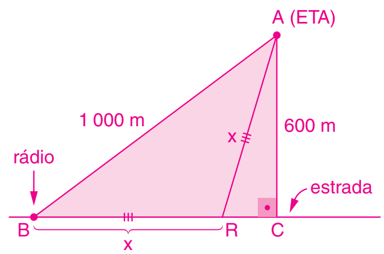
$144r^2 = 25 \cdot 24$

$r = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ cm

13 (PUC-SP) Uma estação de tratamento de água (ETA) localiza-se a 600 m de uma estrada reta. Uma estação de rádio localiza-se nessa mesma estrada, a 1 000 m da ETA. Pretende-se construir um restaurante, na estrada, que fique à mesma distância das duas estações. A distância do restaurante a cada uma das estações deverá ser de:

a) 575 m
b) 600 m
x c) 625 m
d) 700 m
e) 750 m

Seja R a posição do restaurante, situado na estrada e eqüidistante das duas estações. A partir do enunciado, podemos construir a seguinte figura:



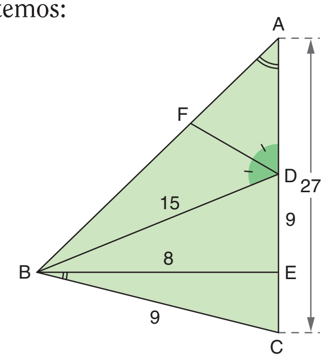
Sendo $AB = 1\,000$ m, $AC = 600$ m e $AR = BR = x$, temos:

I) teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$:
$BC^2 + 600^2 = 1\,000^2 \rightarrow BC = 800$

II) teorema de Pitágoras no $\triangle ARC$:
$AR^2 - RC^2 + 600^2 \rightarrow x^2 = (800 - x)^2 + 600^2 \rightarrow x = 625$ m

14 (Unifesp-SP) No triângulo ABC da figura, que não está desenhada em escala, temos:

$B\hat{A}C \cong C\hat{B}E$, $A\hat{D}F \cong B\hat{D}F$,
$AC = 27$, $BC = 9$,
$BE = 8$, $BD = 15$
e $DE = 9$.



a) Mostre que os triângulos ABC e BEC são semelhantes e, em seguida, calcule AB e EC.

b) Calcule AD e FD.

a) Os triângulos ABC e BEC são semelhantes, pois têm dois ângulos respectivamente congruentes:
$\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{C}$
Da semelhança dos triângulos, temos que:
$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{BC}$, ou seja,
$\frac{AB}{8} = \frac{9}{EC} = \frac{27}{9}$
$\therefore AB = 24$ e $EC = 3$

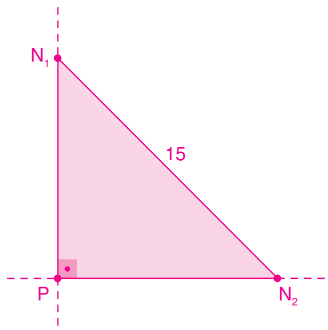
b) Na figura, temos que: $AD = AC - DC$, ou seja, $AD = 27 - 12 \therefore AD = 15$.
No triângulo ADB, sendo $AD = BD$ e $A\hat{D}F = B\hat{D}F$, podemos concluir que DF é a altura relativa à base AB do triângulo isósceles ADB.
Logo, $AF = BF = 12$ e $A\hat{E}B = 90°$.
Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADF, temos que:
$(FD)^2 + 12^2 = 15^2 \therefore FD = 9$

15 (Unicamp-SP) Dois navios partiram ao mesmo tempo, de um mesmo porto, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Trinta minutos após a partida, a distância entre os dois navios era de 15 km e, após mais 15 minutos, um dos navios estava 4,5 km mais longe do porto que o outro.

a) Quais as velocidades dos dois navios, em km/h?

b) Qual a distância de cada um dos navios até o porto de saída, 270 minutos após a partida?

a) Do enunciado, temos a figura, cotada em km:



P: porto
N_1: posição de um dos navios 30 minutos após a partida
N_2: posição do outro navio no mesmo instante

Sejam *x* e *y* as velocidades, em km/h, dos navios que se deslocam sobre as retas $\overleftrightarrow{PN_1}$ e $\overleftrightarrow{PN_2}$, respectivamente.

Do enunciado, temos: $PN_1 = x \cdot \frac{30}{60} \to PN_1 = \frac{x}{2}$

$PN_2 = y \cdot \frac{30}{60} \to PN_2 = \frac{y}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PN_1N_2, temos:

$(PN_1)^2 + (PN_2)^2 = (N_1N_2)^2$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 15^2 \to x^2 + y^2 = 900$ ①

Ainda, do enunciado, temos:

$\frac{x \cdot 45}{60} = \frac{y \cdot 45}{60} + 4{,}5 \to x = y + 6$ ②

De ① e ②, vem:

$(y + 6)^2 + y^2 = 900$

$y^2 + 6y - 432 = 0 \begin{cases} y' = 18 \\ y'' = -24 \text{ (não convém)} \end{cases}$

Em ②, temos:

$x = y + 6 \to x = 18 + 6 \to x = 24$

As velocidades são 18 km/h e 24 km/h.

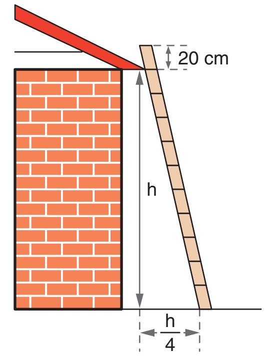
b) As distâncias são iguais a:

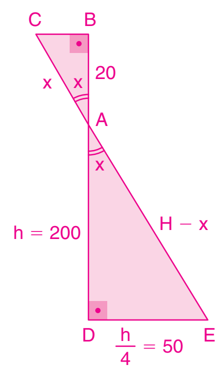
$d_1 = 18 \cdot \frac{270}{60} \to d_1 = 81$ km

$d_2 = 24 \cdot \frac{270}{60} \to d_2 = 108$ km

16 (UFRN) Considere a posição da escada na figura ao lado.

Sabendo que h = 200 cm, e que o comprimento da escada é *H* cm, calcule $\frac{H}{\sqrt{17}}$.





Os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \to \frac{x}{H - x} = \frac{20}{200}$

$\frac{x}{H - x} = \frac{1}{10}$

$10x = H - x$

$x = \frac{H}{11}$ ①

No $\triangle ADE$, temos:

$(H - x)^2 = 200^2 + 50^2 \to (H - x)^2 = 42\,500$ ②

De ① e ②, vem:

$\left(H - \frac{H}{11}\right)^2 = 42\,500$

$H^2 - \frac{2H^2}{11} + \frac{H^2}{121} = 42\,500$

$100H^2 = 5\,142\,500$

$H = 55\sqrt{17}$

Portanto:

$\frac{H}{\sqrt{17}} = \frac{55\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 55$

17 (Vunesp-SP) O comprimento *c* de uma circunferência é dado pela fórmula c = 2πr. Um ciclista, cuja bicicleta tem pneus de 20 cm de raio, deu 7 500 pedaladas.
Usando a aproximação π = 3 e supondo que cada pedalada corresponde a uma volta completa do pneu, a distância percorrida pelo ciclista foi de:

a) 4,5 km
X b) 9 km
c) 45 km
d) 150 km
e) 900 km

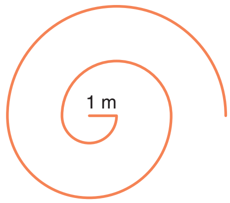
De acordo com os dados, em cada volta o ciclista andou:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r \to C = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}2 \to C = 1{,}2$ m

Como ele deu 7 500 voltas, temos:

$7\,500 \cdot 1{,}2 = 9\,000 \text{ m} = 9 \text{ km}$

18 (UERJ) José deseja construir, com tijolos, um muro de jardim com a forma de uma espiral de dois centros, como mostra a figura ao lado.



Para construir essa espiral, escolheu dois pontos que distam 1 m um do outro. A espiral tem 4 meias-voltas e cada tijolo mede 30 cm de comprimento.
Considerando $\pi = 3$, o número de tijolos necessários para fazer a espiral é:

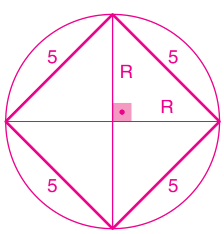
x a) 100 b) 110 c) 120 d) 130

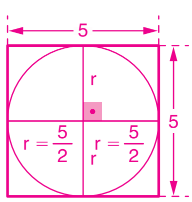
A primeira parte da espiral é uma semicircunferência de raio 1 m. Seu comprimento é:
$C_1 = \pi \cdot R_1 \to C_1 = 3 \cdot 1 = 3 \to 3$ m
A segunda parte da espiral ($R_2 = 2$ m) tem comprimento:
$C_2 = \pi \cdot R_2 \to C_2 = 3 \cdot 2 = 6 \to 6$ m
A terceira parte da espiral ($R_3 = 3$ m) tem comprimento:
$C_3 = \pi \cdot R_3 \to C_3 = 3 \cdot 3 = 9 \to 9$ m
A quarta parte da espiral ($R_4 = 4$ m) tem comprimento:
$C_4 = \pi \cdot R_4 \to C_4 = 3 \cdot 4 = 12 \to 12$ m
O comprimento total da espiral é:
$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \to C = 3 + 6 + 9 + 12 = 30 \to 30$ m
O número de tijolos de comprimento 30 cm = 0,3 m é:
$n = \frac{30}{0,3} \to n = \frac{300}{3} = 100$

19 (UESPI) Dado um quadrado de lado 5 cm, a razão entre os raios dos círculos circunscrito e inscrito ao quadrado, nessa ordem, é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ x b) $\sqrt{2}$ c) 1 d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

Fazendo as figuras:





Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:
$5^2 = R^2 + R^2$
$R^2 = \frac{5^2}{2}$
$R = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$
$R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
Logo: $\frac{R}{r} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{5}{2}} = \sqrt{2}$

20 (UFG) Os diâmetros das rodas dianteira e traseira de uma bicicleta medem 54 cm e 70 cm, respectivamente. Em determinado momento, marca-se, em cada roda, o ponto de contato com o solo. Ao deslocar-se em linha reta, calcule a menor distância a ser percorrida pela bicicleta, para que os pontos marcados nas rodas toquem novamente o solo, ao mesmo tempo.

As distâncias percorridas pelas rodas traseira e dianteira são, respectivamente:
$C_1 = 2\pi R_1$
$C_1 = 2\pi \cdot \frac{70}{2}$
$C_1 = 70\pi$

$C_2 = 2\pi R_2$
$C_2 = 2\pi \cdot \frac{54}{2}$
$C_2 = 54\pi$

A menor distância a ser percorrida pela bicicleta, para que os pontos marcados nas rodas toquem novamente o solo, ao mesmo tempo, pela primeira vez, é dada pelo menor múltiplo comum de 70π e 24π. Logo:

70, 54	2
35, 27	3
35, 9	3
35, 3	3
35, 1	5
7, 1	7
1, 1	1 890

mmc $(70\pi, 54\pi) = 1\,890\pi$ cm

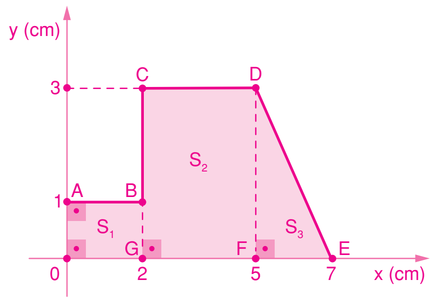
21 (UEM-PR) Uma pista de atletismo tem a forma circular e seu diâmetro mede 80 m. Um atleta treinando nessa pista deseja correr 10 km diariamente. Determine o número mínimo de voltas completas que ele deve dar nessa pista, a cada dia.

O comprimento da pista é igual a:
$C = 2\pi R$
$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 40$
$C = 251,2$ m
Como ele deve percorrer 10 km = 10 000 m, o número de voltas completas é:
$\frac{10\,000}{251,2} \simeq 39,8$ voltas
Ele deve dar aproximadamente 40 voltas.

22 (Vunesp-SP) Considere os pontos do plano (0, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 3), (5, 3) e (7, 0). Representando geometricamente esses pontos no plano cartesiano e ligando-os por meio de segmentos de retas obedecendo à seqüência dada, após ligar o último ponto ao primeiro obtém-se uma região limitada do plano. Se a unidade de medida é dada em centímetros, a área dessa região, em cm², é:

a) 9   b) 10   c) 13   x d) 14   e) 15

Do enunciado, temos a figura:



S_1: área do retângulo ABGO
S_2: área do retângulo CDFG
S_3: área do triângulo DEF

A área *S* pedida, em cm², é tal que:
$S = S_1 + S_2 + S_3$
$S = (2 \cdot 1) + (3 \cdot 3) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\right) \therefore S = 14 \text{ cm}^2$

23 (Acafe-SC) A base de um triângulo mede 72 cm e sua altura, em cm, é *h*. Se a base for aumentada em 48 cm e a altura em 32 cm, obtém-se um novo triângulo, cuja área é o triplo da área do primeiro. O valor da altura *h*, em cm, é:

a) 12   b) 64   x c) 80   d) 20   e) 40

$A_1 = \frac{72h}{2} \rightarrow A_1 = 36h$
$A_2 = \frac{(72 + 48) \cdot (h + 32)}{2}$
Sendo $A_2 = 3A_1$, vem:
$\frac{120(h + 32)}{2} = 36h$
$60h + 1\,920 = 36h$
$h = 80$ cm

24 (Unicentro-PR) Um construtor calculou que serão necessárias 45 tábuas de 3,2 m de comprimento por 0,25 m de largura para revestir todo o piso de uma sala retangular.
O proprietário, preferindo comprar peças quadradas de granito com 0,40 m de lado, necessitará, para revestir todo o piso, de uma quantidade mínima de peças igual a:

a) 62   b) 84   c) 120   d) 208   x e) 225

Seja *A* a área da sala retangular. Logo:
$A = 45 \cdot 3,2 \cdot 0,25 \rightarrow A = 36 \text{ m}^2$
Seja *x* a área de cada peça quadrada. Logo:
$x = 0,40 \cdot 0,40 \rightarrow x = 0,16 \text{ m}^2$
Portanto:
$N = \frac{36}{0,16} \rightarrow N = 225$ peças

25 (UFJF-MG)

A densidade demográfica de certa cidade é de 0,002 habitante por metro quadrado.

Se essa cidade ocupa uma área de 180 km², o número de habitantes é:

a) 36 milhões
b) 9 milhões
x c) 360 mil
d) 3,6 milhões
e) 60 mil

Sendo 180 km² = 180 · 10^6 m², temos:

1 m² —— 0,002 hab.

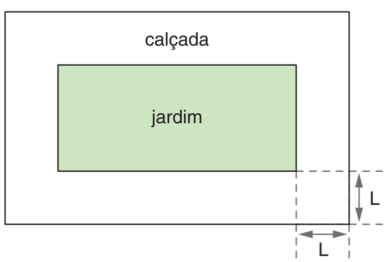
180 · 10^6 —— x

$$\frac{1}{180 \cdot 10^6} = \frac{0{,}002}{x}$$

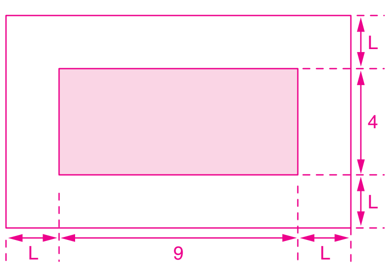
x = 0,36 · 10^6

x = 360 000 habitantes

26 (UFF-RJ) Num terreno retangular com 104 m² de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 9 m por 4 m, contornado por uma calçada de largura *L*, como indica a figura.



Calcule o valor de *L*.



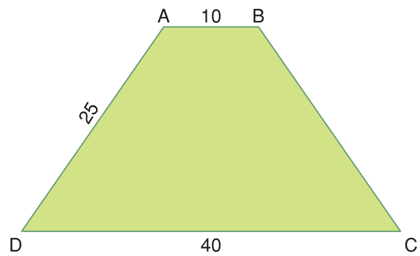
$(4 + 2L)(9 + 2L) = 104 \rightarrow 36 + 8L + 18L + 4L^2 = 104$

$4L^2 + 26L - 68 = 0 \rightarrow 2L^2 + 13L - 34 = 0$

$$L = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 272}}{4} \quad \begin{cases} L' = 2 \\ L'' = -\frac{34}{4} \end{cases}$$

∴ L = 2 m

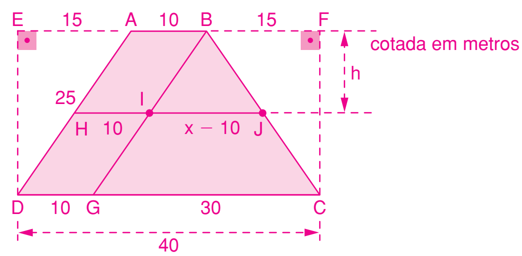
27 (PUC-SP) A figura abaixo representa um terreno com a forma de um trapézio isósceles, cujas dimensões indicadas são dadas em metros.



Pretende-se construir uma cerca paralela ao lado $\overline{AB}$, para dividir o terreno em duas superfícies de áreas iguais. O comprimento dessa cerca deverá ser aproximadamente igual a:

a) 26 x b) 29 c) 33 d) 35 e) 37

Sendo *x* o comprimento da cerca, em metros, temos a figura, em que $\overline{AD}$ e $\overline{BG}$ são paralelos:



No triângulo retângulo ADE, temos:

$(DE)^2 + (AE)^2 = (AD)^2$

$(DE)^2 + 15^2 = 25^2$ ∴ DE = 20

Os triângulos BIJ e BGC são semelhantes. Logo:

$$\frac{x - 10}{30} = \frac{h}{20} \therefore h = \frac{2}{3} \cdot (x - 10) \quad (1)$$

Como a área do trapézio ABJH é igual à metade da área do terreno, devemos ter:

$$\frac{(10 + x) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10 + 40) \cdot 20}{2} \quad (2)$$

De (1) e (2), temos:

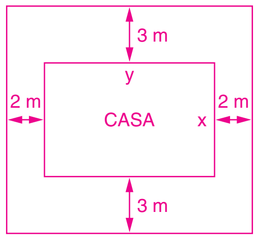
$$(10 + x) \cdot \frac{2}{3} \cdot (x - 10) = 500 \therefore x = \sqrt{850} \simeq 29$$

28 (UERJ) Uma empreiteira deseja dividir um grande terreno em vários lotes retangulares de mesma área, correspondente a 156 m². Em cada lote, será construída uma casa retangular que ocupará uma área de 54 m², atendendo à exigência da prefeitura da cidade, de que seja construída mantendo 3 m de afastamento da frente e 3 m do fundo do lote, bem como 2 m de afastamento de cada uma das laterais.

a) Indique as dimensões de cada casa a ser construída, de modo que cada lote tenha o menor perímetro possível.

b) O piso da área não ocupada pela casa, em cada lote, será revestido por lajotas quadradas de 40 cm de lado, vendidas apenas em caixas, contendo, cada uma, onze unidades.
Sabendo que há uma perda de 10% de lajotas durante a colocação, especifique o número mínimo de caixas necessárias, por lote, para revestir o piso da área não ocupada pela casa.

a)



$\begin{cases} x \cdot y = 54 \\ (x + 6)(y + 4) = 156 \quad ① \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos:
$xy + 4x + 6y + 24 = 156$
$54 + 4x + 6y + 24 = 156$
$4x + 6y = 78$
$2x + 3y = 39 \quad ②$

De ②, vem: $y = \dfrac{39 - 2x}{3}$

Substituindo em ①, obtemos:

$2x^2 - 39x + 162 = 0 \;\; \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 13{,}5 \end{cases}$

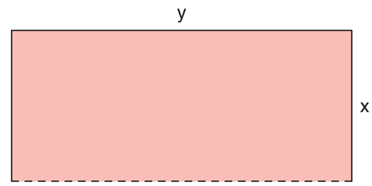
De ②, vem: $y_1 = 9$ e $y_2 = 4$.
Logo, $x = 6$ m e $y = 9$ m.

b) área não ocupada = área do lote − área de casa
área não ocupada = 156 m² − 54 m² = 102 m²
área da lajota = 1 600 cm² = 0,16 m²
número de lajotas necessárias para revestir o piso da área não ocupada = $\dfrac{102}{0{,}16}$ = 637,5 lajotas

$\begin{matrix} 100\% & \text{——} & 637{,}5 \\ 110\% & \text{——} & x \end{matrix} \rightarrow x = 11 \cdot \dfrac{637{,}5}{10}$ lajotas ≃ 701,25 lajotas

701,25 lajotas ÷ 11 lajotas = 63,75 caixas
Número mínimo de caixas: 64 caixas

29 (Vunesp-SP) Em um acidente automobilístico, foi isolada uma região retangular, como mostrado na figura.

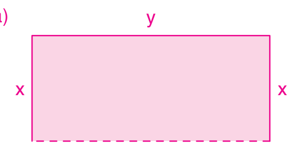


Se 17 m de corda (esticada e sem sobras) foram suficientes para cercar 3 lados da região, a saber, os dois lados menores de medida *x* e um lado maior de medida *y*, dados em metros, determine:

a) a área (em m²) da região isolada, em função do lado menor;

b) a medida dos lados *x* e *y* da região retangular, sabendo-se que a área da região era 36 m² e a medida do lado menor era um número inteiro.

a)



Tem-se que:
$x + y + x = 17 \rightarrow y = 17 - 2x$
A área da região é: $S = x \cdot y$ ou
$S = x \cdot (17 - 2x)$, com $0 < x < 8{,}5$.

b) $S = x(17 - 2x) = 36 \rightarrow 2x^2 - 17x + 36 = 0 \rightarrow x = 4$ ou $x = \dfrac{9}{2} \rightarrow$
$\rightarrow x = 4$, pois $x \in \mathbb{Z}$.
Se $x = 4$, então $y = 17 - 2 \cdot 4 = 9 \therefore x = 4$ m e $y = 9$ m.

30 (UERJ) Uma folha de papel retangular, como a da figura 1, de dimensões 8 cm × 14 cm, é dobrada como indicado na figura 2.

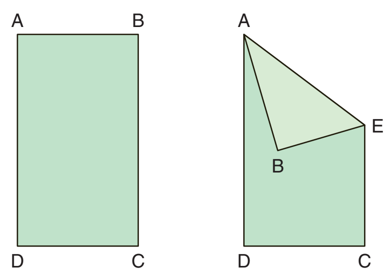
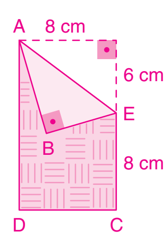


Figura 1 Figura 2

Se o comprimento CE é 8 cm, a área do polígono ADCEB, em cm², é igual a:

a) 112 b) 88 x c) 64 d) 24

Da figura, temos:



$(AE)^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow (AE)^2 = 100 \rightarrow AE = 10$ cm
Como AB = 8 cm, vem:
$(AE)^2 = (AB)^2 + (BE)^2 \rightarrow 100 = 64 + (BE)^2$
BE = 6 cm

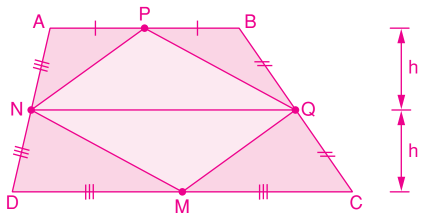
A área da figura mais escura é dada por:
área do retângulo ABCD menos duas vezes a área do triângulo ABE:

$8 \cdot 14 - 2 \cdot \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 112 - 48 = 64$ cm²

31 (MACK-SP) Em um trapézio ABCD, os pontos *P*, *Q*, *M* e *N* são médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. A razão entre a área do quadrilátero PQMN e a área do trapézio é:

a) $\frac{1}{4}$ X b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{5}$

Considere o trapézio ABCD, cujas bases são $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ e cuja a altura mede 2h.



A área S_1 do quadrilátero PQMN é igual à soma das áreas dos triângulos NPQ e NMQ. Logo:

$S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot NQ \cdot h \therefore S_1 = NQ \cdot h$ ①

A área S_2 do trapézio ABCD é tal que:

$S_2 = \frac{(AB + DC)}{2} \cdot 2h \therefore S_2 = NQ \cdot 2h$ ②

De ① e ②, uma razão pedida $\frac{S_1}{S_2}$ é tal que:

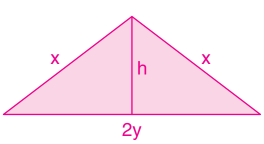
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{NQ \cdot h}{NQ \cdot 2h} \therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$

$\overline{NQ}$: base média do trapézio ABCD;

$NQ = \frac{AB + DC}{2}$

32 (UFG) Determine um triângulo isósceles, cujo perímetro é 18 cm e a área é 12 cm², sabendo que a medida de seus lados são números inteiros.

Fazendo a figura e observando os dados do problema, tem-se:

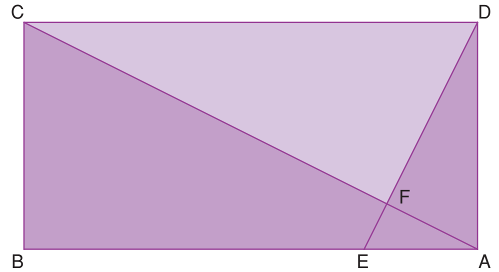


$\begin{cases} \text{Perímetro: } 2x + 2y = 18 \to x + y = 9 \\ \text{Área: } hy = 12 \\ \text{Pitágoras: } h^2 = x^2 - y^2 = 9(x - y) \end{cases}$

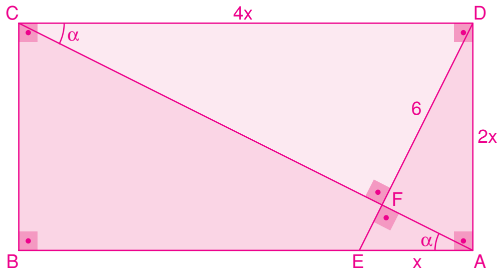
$\begin{cases} x = 9 - y \\ 9(x - y)y^2 = 144 \end{cases} \to (9 - 2y)y^2 = 16$

Sendo *y* um número inteiro positivo e menor que 9, o único valor possível é y = 4; logo, x = 5. Portanto, o triângulo tem um lado medindo 8 cm e os outros lados medindo 5 cm.

33 (FGV-SP) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e CFD é um triângulo retângulo em *F*. Calcule a área *S* do retângulo ABCD, sabendo que AB = 2AD = 4AE e DF = 6 m.



Do enunciado, temos a figura, cotada em metros:



Como os triângulos CFD e AFE são semelhantes, temos:

$\frac{FE}{DF} = \frac{AE}{CD} \to \frac{FE}{6} = \frac{x}{4x} \to FE = \frac{3}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo DAE, temos:

$(DE)^2 = (AE)^2 + (AD)^2 \to (DE)^2 = x^2 + (2x)^2 \to DE = x\sqrt{5}$

Sendo DE = FE + FD:

$x\sqrt{5} = \frac{3}{2} + 6 \to x = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Logo:

$AB = 4x = 4 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \to AB = 6\sqrt{5}$ e

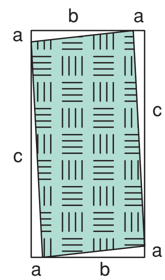
$AD = 2x = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \to AD = 3\sqrt{5}$

Portanto, a área *S* pedida, em m², é tal que:

$S = AB \cdot AD \to S = 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \to S = 90\ m^2$

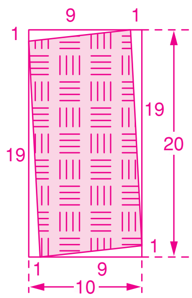
34 (Unipa-MG) Um casal adquiriu um terreno pela planta retangular, de 10 m × 20 m, pagando R$ 50 000,00. Quando o topógrafo foi medir, observou que as medidas do terreno eram diferentes. No desenho abaixo, a área destacada é a real. Pode-se concluir que o prejuízo do casal foi de:

a) R$ 2 000,00
b) R$ 5 000,00
X c) R$ 7 000,00
d) R$ 9 000,00
e) R$ 11 000,00



a = 1 m
b = 9 m
c = 19 m

Pelos dados, temos:



• Cálculo do valor do metro quadrado do terreno:

$\frac{50\,000,00}{10 \cdot 20} = 250,00/m^2 \to$ R$ 250,00/m²

• Cálculo da área real do terreno:

$A = 10 \cdot 20 - \cancel{2} \cdot \frac{1 \cdot 9}{\cancel{2}} - \cancel{2} \cdot \frac{1 \cdot 19}{\cancel{2}}$

$A = 200 - 9 - 19$

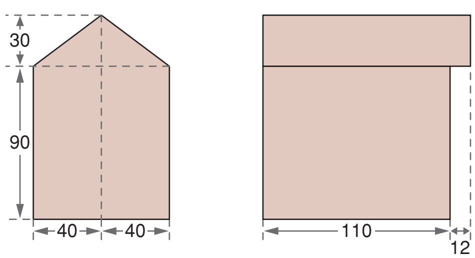
$A = 172\ m^2$

• Prejuízo:

$P = (200 - 172) \cdot 250 \to P = 7\,000$

Portanto, o prejuízo foi de R$ 7 000,00.

35 (UFMG) Observe as figuras:

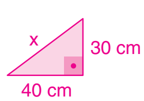


Nessas figuras, estão representadas as vistas frontal e lateral de uma casa de madeira para um cachorrinho, com todas as medidas indicadas em centímetros. Observe que o telhado avança 12 cm na parte da frente da casa.

Considerando-se os dados dessas figuras, a área total do telhado dessa casa é de:

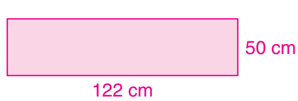
a) 0,96 m² X b) 1,22 m² c) 1,44 m² d) 0,72 m²

A largura de cada parte do telhado mede:



$x^2 = 30^2 + 40^2 \to x = 50$ cm

Cada parte do telhado é um retângulo de dimensões:



A área é igual a:

$S = 122 \cdot 50 = 6\,100\ cm^2$

A área total é igual a:

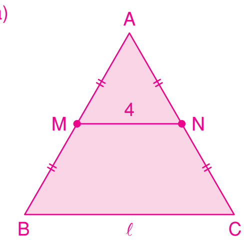
$2S = 2 \cdot 6\,100 = 12\,200\ cm^2 = 1,22\ m^2$

36 (FGV-SP)

a) Num triângulo eqüilátero ABC, unindo-se os pontos médios de $\overline{AB}$ e de $\overline{AC}$, obtém-se um segmento de medida igual a 4 cm. Qual a área do triângulo ABC?

b) Num triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overline{BC}$, a altura relativa à hipotenusa é $\overline{AH}$. Se BH = 3 cm e HC = 8 cm, qual a medida do cateto $\overline{AC}$?

a)



Sejam ℓ a medida do lado do triângulo eqüilátero ABC, *M* o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e *N* o ponto médio do lado $\overline{AC}$.

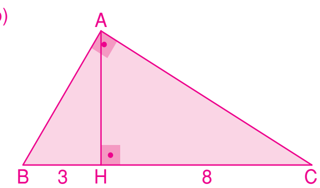
I. Como MN = 4 cm, temos ℓ = 8 cm, pois os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança é 1 : 2.

II. Sendo *S* a área do triângulo ABC, temos:

$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \to S = 16\sqrt{3}$

$\therefore S = 16\sqrt{3}\ cm^2$

b)



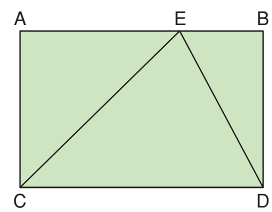
No triângulo retângulo ABC, temos:

$(AC)^2 = HC \cdot BC$

$(AC)^2 = 8 \cdot 11$

$AC = 2\sqrt{22}$ cm

37 (UFAC) Na figura, ABCD é um retângulo e *E* é um ponto do segmento $\overline{AB}$. Da figura, podemos concluir que:



I. Se AE = EB, então a área do triângulo ACE é um quarto da área do retângulo ABCD.

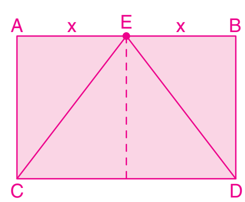
II. O valor da área do triângulo CDE é o mesmo da soma das áreas dos triângulos ACE e EBD.

III. A área do triângulo CDE é metade da área do retângulo ABCD, independentemente da posição em que o ponto *E* esteja no segmento $\overline{AB}$.

Com relação às afirmações I, II e III, pode-se dizer que:

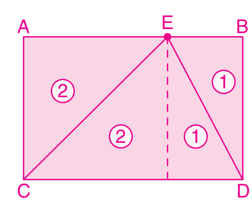
X a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) apenas I é verdadeira.
d) as afirmações II e III são falsas.
e) apenas II e III são verdadeiras.

I. Verdadeira



$S_{ACE} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABCD}$

II. Verdadeira



$S_{CDE} = S_1 + S_2$

$S_{ACE} + S_{EBD}$

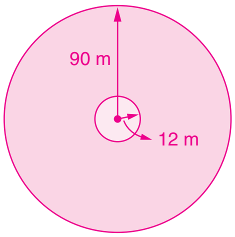
III. Verdadeira

$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$

38 (UCSal-BA) No centro de uma praça circular, de 90 m de raio, foi montado um tablado, também circular e com 12 m de raio, no qual se realizou um espetáculo musical. Considerando que todas as pessoas que foram ao espetáculo restringiram-se à faixa da praça exterior ao tablado, que teve uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, quantas pessoas estiveram presentes a esse espetáculo? (Use $\pi = 3$.)

a) 90 576
b) 92 462
c) 93 128
x d) 95 472
e) 98 576

Do enunciado, temos:



A área da coroa circular é:
$S = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$
$S = \pi(90^2 - 12^2)$
$S = 3 \cdot (8\,100 - 144)$
$S = 23\,868\ m^2$
O número de pessoas é:
$n = 4 \cdot 23\,868 = 95\,472$ pessoas

39 (IBMEC-SP) Um CD comum, que comporta em média 80 minutos de música, tem 12 cm de diâmetro, sendo que não é possível gravar em seu círculo interno de diâmetro 4 cm. Considerando que o tempo total de música que pode ser gravada num CD é diretamente proporcional à sua área de gravação, se duplicarmos as medidas dos diâmetros do CD e do círculo interno em que não se pode gravar, será possível gravar neste novo CD:

a) 160 minutos de música
b) 240 minutos de música
x c) 320 minutos de música
d) 400 minutos de música
e) 480 minutos de música

Considere:
S_i: área de gravação de um CD comum, em cm^2
S_f: área de gravação do novo CD, em cm^2
Temos:
$S_i = \pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 2^2 \therefore S_i = 32\pi$
$S_f = \pi \cdot 12^2 - \pi \cdot 4^2 \therefore S_f = 128\pi$
Sendo *t* o tempo em minutos procurado, temos:

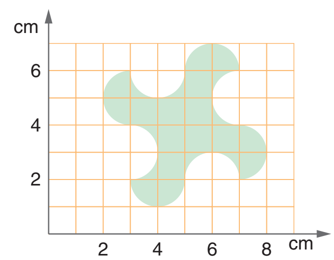
$$t = \frac{128\pi \cdot 80}{32\pi} \therefore t = 320 \text{ min}$$

40 (Furb-SC) "Lixo é basicamente todo e qualquer resíduo sólido proveniente das atividades humanas ou geradas pela natureza em aglomerados urbanos. O lixo faz parte de nossa vida, e tratá-lo bem é uma questão de bom senso, cidadania, e bem-estar, agora, e principalmente no futuro." (www.loucosporlixo.com.br) Pensando nisso, um grupo teatral quer representar uma peça sobre a importância da reciclagem do lixo. Eles querem montar um cenário no qual 3 paredes de 4 m de altura por 5 m de comprimento deverão ser revestidas de CDs defeituosos. Sabendo-se que cada CD possui 12 cm de diâmetro, quantos CDs, aproximadamente, serão necessários para revestir essas paredes? (Use $\pi = 3{,}14$.)

a) 5 200
x b) 5 300
c) 5 400
d) 5 500
e) 5 600

- Área do cenário:
  $A = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\ m^2$
- Área de cada CD:
  $A_1 = \pi \cdot R^2$
  $A_1 = 3{,}14 \cdot (0{,}06)^2$
  $A_1 = 0{,}011304\ m^2$
- O número de CDs necessários é:
  $N = \frac{60}{0{,}011304} \rightarrow N \simeq 5\,308$

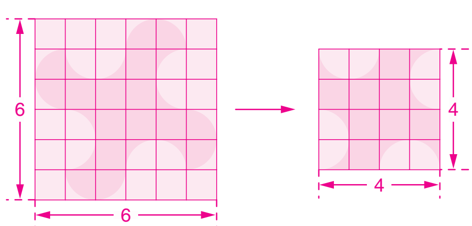
41 (Cefet-PR) Uma indústria necessita produzir lâminas de máquinas moedoras de carne, conforme a especificação a seguir.



A área da lâmina está diretamente relacionada com a potência do motor da máquina. Considerando que o contorno da lâmina somente é constituído de semicírculos, sua área, em cm^2, é igual a:

x a) 16
b) 16π
c) π
d) $(4 + 16\pi)$
e) $(4 + 12\pi)$

Completando a figura abaixo, obtemos um quadrado de lado 4 cm.



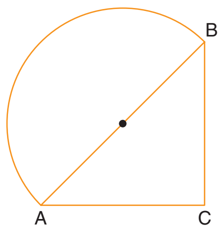
Logo, a área da lâmina é:
$4 \cdot 4 = 16\ cm^2$

Em questões como a 42, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I e as falsas, na coluna II.

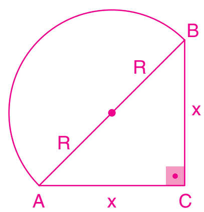
42 (Unicap-PE) Deseja-se construir um oleoduto, ligando duas cidades, *A* e *B* (observe a figura abaixo). Há três possibilidades de trajetos: em linha reta, com o custo total por km, em real, de 2 700,00; em arco (semicircunferência), com custo total por km, em real, de 1 600,00; em forma de *L*, ACB, com custo total por km, em real, de 1 700,00. Assim:

I – II

0 – $\cancel{0}$ O trajeto em arco é o mais caro.
1 – $\cancel{1}$ O trajeto em forma de *L* é o mais caro.
2 – $\cancel{2}$ O trajeto $\overline{AB}$ é o mais barato.
3 – $\cancel{3}$ Os trajetos em arco e em forma de *L* têm o mesmo custo.
$\cancel{4}$ – 4 O trajeto mais barato é em *L*.



Pelos dados, temos:



0 0. Falsa. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$(2R)^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 4R^2 = 2x^2$

$x^2 = 2R^2$

$x = R\sqrt{2}$

Substituindo $\sqrt{2}$ por 1,41, vem $x = 1{,}41R$.

- Trajeto $\overline{AB}$: 2R
  2 700 · 2R = 5 400R
- Trajeto em arco: $\frac{2\pi R}{2} = \pi R$
  1 600 · 3,14R = 5 024R
- Trajeto em forma de *L*: 2x = 2 · 1,41R = 2,82R
  2,82R · 1 700 = 4 794R

1 1. Falsa
2 2. Falsa
3 3. Falsa
4 4. Verdadeira

Portanto:

I	II
0	$\cancel{0}$
1	$\cancel{1}$
2	$\cancel{2}$
3	$\cancel{3}$
$\cancel{4}$	4

43 (UESPI) Um trabalhador gasta 3 horas para limpar um terreno circular de 6 metros de raio. Se o terreno tivesse 12 metros de raio, quanto tempo o trabalhador gastaria para limpar tal terreno?

a) 6 h b) 9 h X c) 12 h d) 18 h e) 20 h

As áreas são iguais a:

$S_1 = \pi R_1^2 \rightarrow S_1 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi\ m^2$

$S_2 = \pi R_2^2 \rightarrow S_2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi\ m^2$

Portanto:

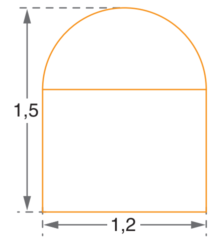
tempo		área
3 h	——	36π
x	——	144π

$\rightarrow \frac{3}{x} = \frac{36}{144}$

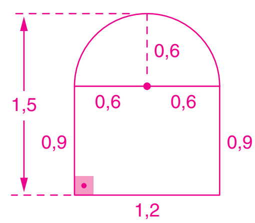
$x = 12$ h

44 (UFJF-MG) Uma janela foi construída com a parte inferior retangular e a parte superior no formato de um semicírculo, como mostra a figura abaixo. Se a base da janela mede 1,2 m e a altura total 1,5 m, dentre os valores abaixo, o que melhor aproxima a área total da janela, em metros quadrados, é:

a) 1,40
X b) 1,65
c) 1,85
d) 2,21
e) 2,62



Pelos dados, vem:



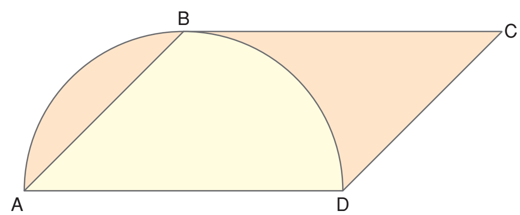
$A = 1{,}2 \cdot 0{,}9 + \frac{3{,}14 \cdot (0{,}6)^2}{2}$

$A = 1{,}08 + 0{,}57$

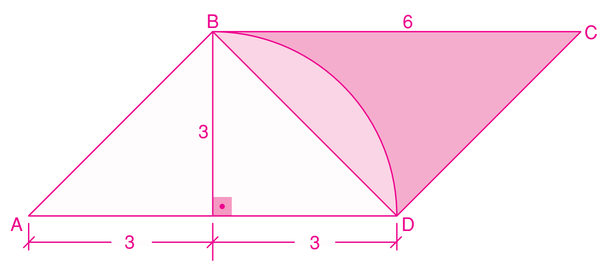
$A = 1{,}65\ m^2$

45 (MACK-SP) Na figura, ABCD é um paralelogramo cujo lado $\overline{BC}$ é tangente, no ponto *B*, à circunferência de diâmetro AD = 6. A área da região assinalada é:

a) 11
b) 12
X c) 9
d) 8
e) 10



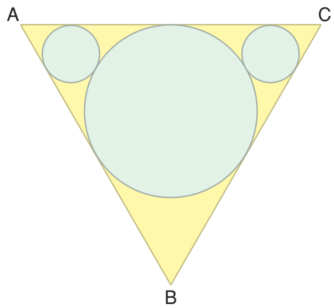
A área da região assinalada é igual à área do triângulo BCD na figura abaixo:



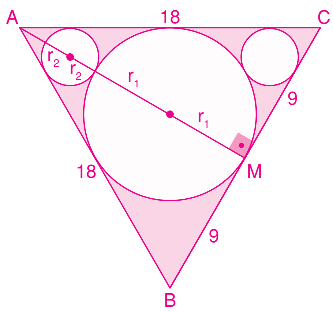
Logo:

$S = \frac{6 \cdot 3}{2} \therefore S = 9$

46 (UFPE) Na ilustração a seguir, o triângulo ABC é eqüilátero, a circunferência maior está inscrita no triângulo e as duas menores são tangentes à maior e a dois lados do triângulo. Se o triângulo tem lado medindo 18, qual o maior inteiro menor que a área da região colorida? (Dado: use as aproximações $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ e $\pi \simeq 3{,}14$.)



Da figura, temos:



A altura do triângulo eqüilátero é igual a:

$h_1 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \rightarrow h_1 = \frac{18\sqrt{3}}{2} \rightarrow h_1 = 9\sqrt{3}$

O raio r_1 é igual a $\frac{1}{3}$ da altura:

$r_1 = \frac{1}{3} h_1 \rightarrow r_1 = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \rightarrow r_1 = 3\sqrt{3}$

As circunferências menores estão inscritas em triângulos eqüiláteros de alturas iguais a:

$h_2 = h_1 - 2r_1 \rightarrow h_2 = 9\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

O raio das circunferências menores é igual a:

$r_2 = \frac{1}{3} r_1 \rightarrow r_2 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \rightarrow r_2 = \sqrt{3}$

A soma das áreas das circunferências é igual a:

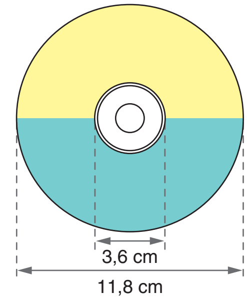
$S = \pi r_1^2 + 2\pi r_2^2 \rightarrow S = \pi \cdot (3\sqrt{3})^2 + 2\pi(\sqrt{3})^2 \rightarrow S = 33\pi$

A área da região colorida é igual à diferença entre as áreas do triângulo eqüilátero ABC e a soma das áreas das circunferências:

$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - S \rightarrow A = \frac{18^2\sqrt{3}}{4} - 33\pi \rightarrow A \simeq 36{,}51$

O menor inteiro é 36.

47 (UFMT) A etiqueta do CD mostrado na figura tem a forma de uma coroa circular cujo diâmetro da circunferência externa mede 11,8 cm e o da circunferência interna, 3,6 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine o número inteiro mais próximo da medida (em cm²) da área da etiqueta.



As medidas dos raios são:

$d_1 = 2r_1 \rightarrow 11{,}8 = 2r_1 \rightarrow r_1 = 5{,}9$ cm

$d_2 = 2r_2 \rightarrow 3{,}6 = 2r_2 \rightarrow r_2 = 1{,}8$ cm

A área da etiqueta é igual a:

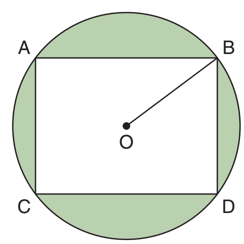
$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 \rightarrow S = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

$S = 3{,}14(5{,}9^2 - 1{,}8^2)$

$S = 99{,}1298$ cm²

$\therefore S = 99$ cm²

48 (Vunesp-SP) A figura representa um canteiro de forma circular com 5 metros de raio. O canteiro tem uma região retangular que se destina à plantação de flores e uma outra região, sombreada na figura, na qual se plantará grama.



Na figura, *O* é o centro do círculo, $\overline{OB}$ é o raio, o retângulo está inscrito no círculo e $\overline{CD}$ mede 8 metros.

a) Determine a medida do lado $\overline{BD}$ e a área da região retangular destinada à plantação de flores.

b) Sabendo-se que o metro quadrado de grama custa R$ 3,00, determine quantos reais serão gastos em grama (para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3{,}2$).

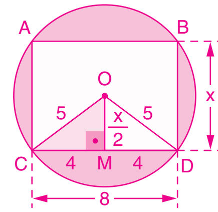
x: medida de $\overline{BD}$, em metros

S_f: área destinada à plantação de flores, em metros quadrados

S_c: área do círculo de centro *O* e raio $\overline{OB}$, em metros quadrados

S_g: área destinada à plantação de grama, em metros quadrados

R: quantia, em reais, a ser gasta com a plantação de grama



Assim:

a) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 \rightarrow \frac{x}{2} = 3 \rightarrow x = 6$

6 m (medida do lado $\overline{BD}$)

$S_f = CD \cdot BD \rightarrow S_f = 8 \cdot 6 \rightarrow S_f = 48$ m² (área da região com flores)

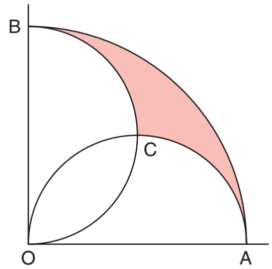
b) $S_c = \pi(OB)^2 \rightarrow S_c = 3{,}2 \cdot 5^2 \rightarrow S_c = 80$

$S_g = S_c - S_f \rightarrow S_g = 80 - 48 \rightarrow S_g = 32$

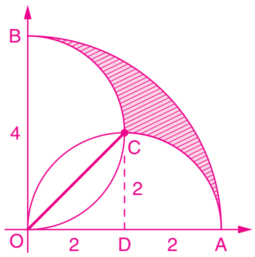
$R = S_g \cdot 3{,}00 \rightarrow R = 32 \cdot 3{,}00 \rightarrow R =$ R$ 96,00 (valor gasto com a grama)

49 (FMTM-MG) Na figura, a medida dos segmentos OA e OB é 4 cm. O ângulo AÔB tem 90° e OCA e OCB são semicircunferências.
A área da superfície sombreada é:

a) $(4 - \pi)$ cm²
b) $(6 - \pi)$ cm²
x c) $(2\pi - 4)$ cm²
d) $(\pi - 3)$ cm²
e) $(2\pi - 5)$ cm²



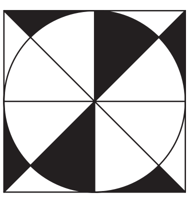
Pelos dados, temos:



$$A_{hachurada} = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \cdot 2 + \left(\frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2}\right) \cdot 2$$

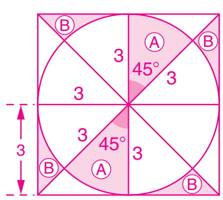
$$A_{hachurada} = 4\pi - 4\pi + 2(\pi - 2) = (2\pi - 4) \rightarrow (2\pi - 4) \text{ cm}^2$$

50 (Vunesp-SP) Uma empresa tem o seguinte logotipo:



Se a medida do raio da circunferência inscrita no quadrado é 3 cm, a área, em cm², de toda a região pintada de preto é:

a) $9 - \frac{9\pi}{4}$
x b) $18 - \frac{9\pi}{4}$
c) $18 - \frac{9\pi}{2}$
d) $36 - \frac{9\pi}{4}$
e) $36 - \frac{9\pi}{2}$



A área *S*, em centímetros quadrados, da região pintada de preto é dada por S = 2A + 4B, em que:

$$A = \frac{45°}{360°} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{9\pi}{8}$$

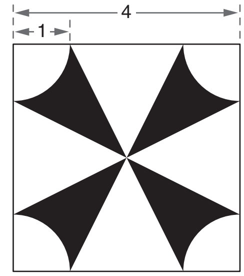
$$B = \frac{3 \cdot 3}{2} - A = \frac{9}{2} - \frac{9\pi}{8}$$

Assim:

$$S = 2 \cdot \frac{9\pi}{8} + 4 \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{9\pi}{8}\right)$$

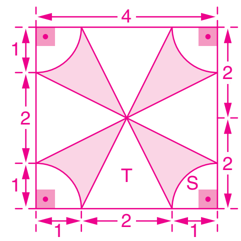
$$S = \frac{9\pi}{4} + 18 - \frac{9\pi}{2} \rightarrow S = 18 - \frac{9\pi}{4} \text{ cm}^2$$

51 (UFSCar-SP) Considere a região *R*, pintada de preto, construída no interior de um quadrado de lado medindo 4 cm. Sabendo-se que os arcos de circunferência que aparecem nos cantos do quadrado têm seus centros nos vértices do quadrado e que cada raio mede 1 cm, pede-se:



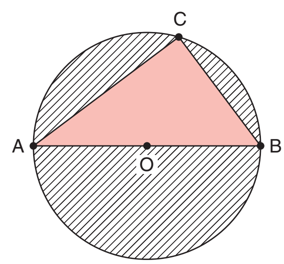
a) a área da região interna ao quadrado, complementar à região *R*;
b) a área da região *R*.

Do enunciado, temos:



a) A área pedida é igual a quatro vezes a área do triângulo *T* mais quatro vezes a área do setor *S*:
$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$
Logo, a área pedida é $(8 + \pi)$ cm².
b) A área da região *R* é igual à área do quadrado menos a área obtida no item *a*, ou seja, $4^2 - (8 + \pi)$.
Logo, a área de *R* é $(8 - \pi)$ cm².

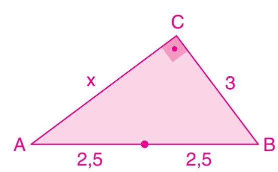
52 (Fafeod-MG) A figura ao lado ilustra um triângulo ABC, inscrito numa circunferência de centro *O* e raio 2,5 cm, sendo CB igual a 3 cm.



Assumindo π = 3,14, é *correto* afirmar que a área, em cm², da região hachurada na figura é:

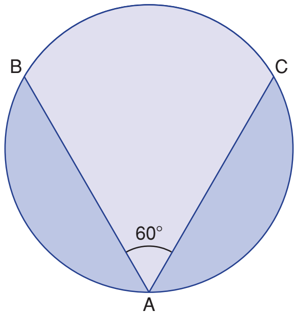
a) 12,625
x b) 13,625
c) 19,625
d) 15,625

AB é o diâmetro da circunferência, pois passa pelo centro *O*, logo o triângulo ABC é retângulo em *C*.
Substituindo os valores na figura, vem:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:
$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$
$5^2 = 3^2 + x^2$
$25 = 9 + x^2$
$x^2 = 16$
$x = 4$
Portanto, a área hachurada vale:
$A_{hachurada} = A_{círculo} - A_{triângulo} \rightarrow A = \pi \cdot (2{,}5)^2 - \frac{3 \cdot 4}{2}$
$A = 6{,}25\pi - 6$
Substituindo π, vem:
$A = 6{,}25 \cdot 3{,}14 - 6$
$A = 19{,}625 - 6$
$A = 13{,}625$ cm²

53 (UFPE) Na figura abaixo, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60° e AB = AC. Se a circunferência tem raio 6, qual o inteiro mais próximo da área da região colorida? (Dados: use as aproximações $\pi \simeq 3,14$ e $\sqrt{3} \simeq 1,73$.)



A área da região colorida é:

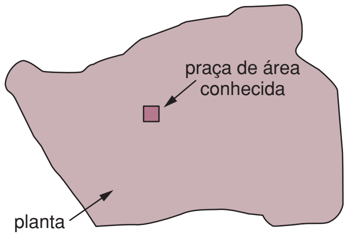
$S = 2\left(\frac{\pi \cdot 6^2}{3} - \frac{6^2 \cdot \text{sen } 120°}{2}\right)$

$S = 24\pi - 18\sqrt{3}$

$S = 24 \cdot 3,14 - 18 \cdot 1,73$

$S = 44,22$

54 (ENEM) Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m × 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g.



Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é, aproximadamente:

a) 800
b) 10 000
c) 320 000
d) 400 000
x e) 5 000 000

A massa da planta da cidade é 40 g. A área da praça de dimensões 100 m por 100 m é 10 000 m² e o recorte da planta tem massa 0,08 g.

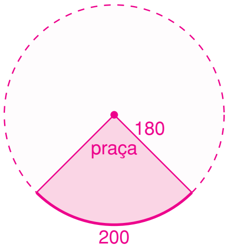
$\frac{S}{40} = \frac{10\ 000}{0,08} \rightarrow S = 5\ 000\ 000$

Logo, a área da cidade é 5 000 000 m².

55 (FGV-SP) Em uma cidade do interior, a praça principal, em forma de um setor circular de 180 metros de raio e 200 metros de comprimento do arco, ficou lotada no comício político de um candidato a prefeito.
Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, a melhor estimativa do número de pessoas presentes ao comício é:

x a) 70 mil
b) 30 mil
c) 100 mil
d) 90 mil
e) 40 mil

Do enunciado, temos a figura (cotada em metros):



A área da praça, em m², é igual a $\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 180$, ou seja, 18 000.

Sendo *x* o número de pessoas presentes ao comício, do enunciado temos que $x = 4 \cdot 18\ 000$, ou seja, $x = 72\ 000$.

Logo, a melhor estimativa está na alternativa *a*.

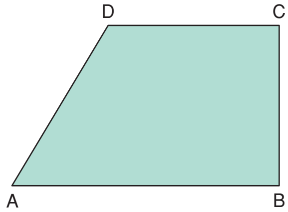
56 (UA-AM) Um setor circular de raio 5 cm tem arco de comprimento 8 cm. Então a sua área é:

a) 30 cm²
b) 40 cm²
c) 10 cm²
d) 80 cm²
x e) 20 cm²

$S_{setor} = \frac{\ell \cdot R}{2} \rightarrow S_{setor} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \rightarrow S = 20\ cm^2$

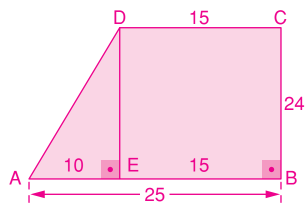
57 (Unicamp-SP) Um terreno tem a forma de um trapézio retângular ABCD, conforme mostra a figura, e as seguintes dimensões:

AB = 25 m, BC = 24 m, CD = 15 m.



a) Se cada metro quadrado desse terreno vale R$ 50,00, qual é o valor total do terreno?

b) Divida o trapézio ABCD em quatro partes de mesma área, por meio de três segmentos paralelos ao lado BC. Faça uma figura para ilustrar sua resposta, indicando nela as dimensões das divisões no lado $\overline{AB}$.



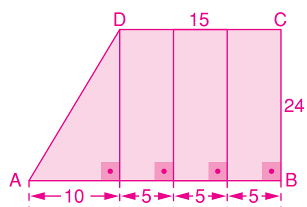
a) $A_{\text{trapézio}} = A_{\text{triângulo}} + A_{\text{retângulo}}$

$A_{\text{trapézio}} = \frac{10 \cdot 24}{2} + 15 \cdot 24$

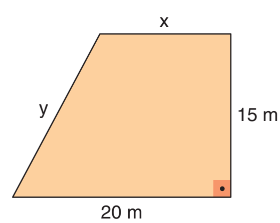
$A_{\text{trapézio}} = 120 + 360 = 480$

Valor total do terreno: 480 · 50,00 = R$ 24 000,00

b) No item *a*, observamos que a área do triângulo é $\frac{1}{4}$ da área do trapézio, e assim a figura pedida é:

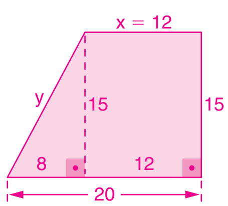


58 (UFAL) Na figura, tem-se a planta de um terreno com forma de trapézio e área de 240 m². Determine o perímetro do terreno.



$A_{\text{trapézio}} = \frac{(20 + x) \cdot 15}{2} = 240 \rightarrow x = 12$ m

Fazendo a figura, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$y^2 = (15)^2 + (8)^2 = 17$ m

Portanto, o perímetro do terreno vale:

p = 20 + 15 + 12 + 17 = 64 m

59 (UCSal-BA) Na figura abaixo tem-se o quadrilátero ABCD, no qual AB = 3 cm, AD = 4 cm, CD = 12 cm, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ e $\overline{BD} \perp \overline{CD}$.

A área e o perímetro desse quadrilátero são, respectivamente:

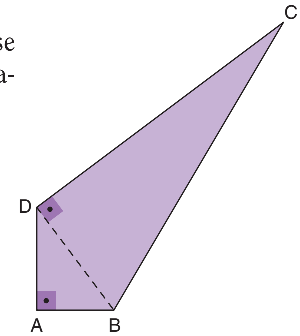
a) 36 cm² e 24 cm

x b) 36 cm² e 32 cm

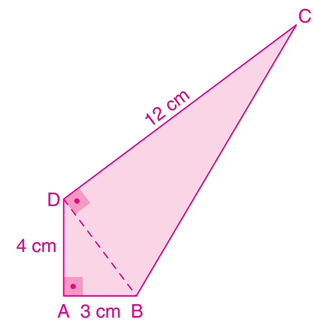
c) 48 cm² e 24 cm

d) 72 cm² e 32 cm

e) 72 cm² e 37 cm



Da figura, temos:



$(DB)^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow (DB)^2 = 9 + 16$

$DB = \sqrt{25} = 5$ cm

$(BC)^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow (BC)^2 = 144 + 25$

$BC = \sqrt{169} = 13$ cm

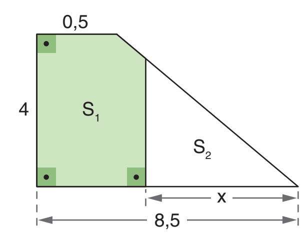
A área do quadrilátero é:

$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{12 \cdot 5}{2} = 6 + 30 = 36 \text{ cm}^2$

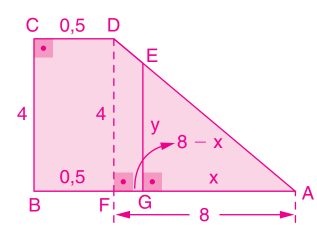
O perímetro é:

3 + 4 + 12 + 13 = 32 cm

60 (UFLA-MG) Obtenha o valor de x, de forma que as áreas S_1 e S_2 sejam iguais.



Pelos dados, vem:



Os triângulos AEG e ADF são semelhantes. Logo:

$\frac{x}{8} = \frac{y}{4} \rightarrow 4x = 8y \rightarrow x = 2y$

$S_2 = \frac{x \cdot y}{2} \rightarrow S_2 = \frac{2y \cdot y}{2}$

$S_2 = y^2$

$S_1 + S_2 = 4 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 4 \rightarrow S_1 + S_2 = 18$

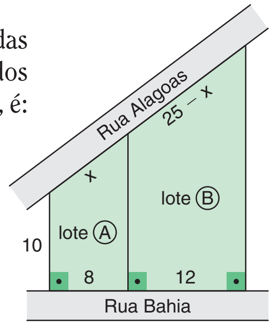
Como $S_1 = S_2$, temos:

$S_1 = S_2 = \frac{18}{2} = 9$

Portanto, $y^2 = 9 \rightarrow y = 3$ e $x = 2 \cdot 3 = 6$

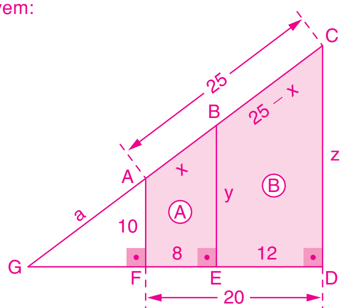
61 (UCSal-BA) Na figura têm-se dois lotes de terrenos planos, com frentes para duas ruas e cujas divisas são perpendiculares à Rua Bahia.

Se as medidas indicadas são dadas em metros, a área da superfície dos dois lotes, em metros quadrados, é:



x a) 350
b) 380
c) 420
d) 450
e) 480

Do enunciado, vem:



O quadrilátero ABEF é semelhante ao quadrilátero ACDF, logo:

$\frac{x}{25} = \frac{8}{20} \rightarrow 20x = 25 \cdot 8 \rightarrow x = 10$

$\frac{10}{x} = \frac{25}{z} \rightarrow \frac{10}{10} = \frac{25}{z} \rightarrow z = 25$

$\frac{a}{10} = \frac{a + 10}{y} = \frac{a + 25}{25}$

$\frac{a}{10} = \frac{a + 25}{25} \rightarrow 25a = 10a + 250 \rightarrow 15a = 250 \rightarrow a = \frac{50}{3}$

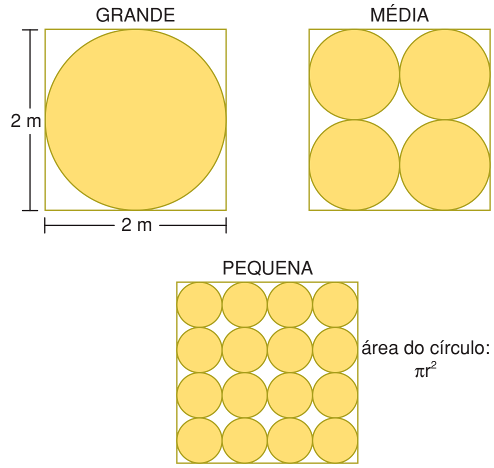
$\frac{\frac{50}{3}}{10} = \frac{\frac{50}{3} + 10}{y} \rightarrow y = 16$

Portanto: Área do lote $A = \frac{(10 + 16) \cdot 8}{2} = 104$

Área do lote $B = \frac{(25 + 16) \cdot 12}{2} = 246$

Área total dos dois lotes: $104 + 246 = 350\ m^2$

62 (ENEM) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuar reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
b) a entidade I recebe metade do material da entidade III.
c) a entidade II recebe o dobro do material da entidade III.
d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
x e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

Os raios das tampas grandes, médias e pequenas são, respectivamente, 1 m, $\frac{1}{2}$ m e $\frac{1}{4}$ m.

Em metros quadrados, as sobras S_I, S_{II} e S_{III} das tampas grandes, médias e pequenas são, respectivamente, tais que:

$S_I = 4 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi$

$S_{II} = 4 - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \pi$

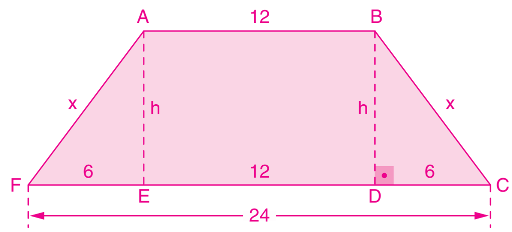
$S_{III} = 4 - 16 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \pi$

Supondo que a quantidade de chapas quadradas usadas diariamente para produzir as tampas grandes seja a mesma para as tampas médias e para as tampas pequenas, as sobras serão iguais, pois $S_I = S_{II} = S_{III}$.

63 (Unifor-CE) A parte superior de um tablado tem a forma de um trapézio isósceles com 56 m de perímetro e cujos lados paralelos medem 12 m e 24 m. Se a superfície desse tablado for inteiramente revestida de uma camada de verniz, ao preço de R$ 6,50 o metro quadrado, a quantia a ser desembolsada por esse serviço será:

a) R$ 916,00
b) R$ 920,00
X c) R$ 936,00
d) R$ 950,00
e) R$ 986,00

Fazendo a figura, vem:



Perímetro do trapézio: $12 + 24 + x + x = 36 + 2x$
Logo:
$36 + 2x = 56$
$2x = 20$
$x = 10$
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCD, vem:
$10^2 = h^2 + 6^2$
$h^2 = 100 - 36$
$h^2 = 64$
$h = 8$
Cálculo da área do trapézio:
$A = \frac{(12 + 24) \cdot 8}{2} = 144 \text{ m}^2$
Portanto, o valor pago será:
$V = 144 \cdot 6{,}50 \rightarrow$ R$ 936,00

64 (UFAL) Considerando uma circunferência circunscrita a um hexágono regular de lado 2 cm, analise as afirmativas abaixo.

I – II

0 – ~~0~~ A área do círculo limitado pela circunferência é 6π cm².

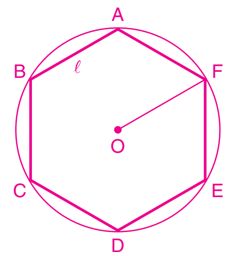
~~1~~ – 1 Unindo-se o centro da circunferência a dois vértices consecutivos do hexágono, obtém-se um triângulo de área $\sqrt{3}$ cm².

~~2~~ – 2 O comprimento de um arco que une dois vértices consecutivos do hexágono é $\frac{2\pi}{3}$ cm.

3 – ~~3~~ A maior diagonal do hexágono mede 6 cm.

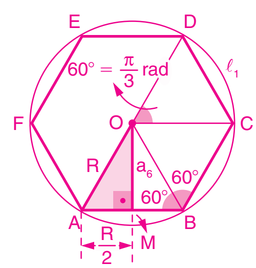
~~4~~ – 4 A medida de cada ângulo interno do hexágono é 120°.

0 0. Falsa
Do enunciado, temos:



$\ell = R = 2$ cm
$S = \pi R^2 \rightarrow S = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

1 1. Verdadeira



$(a_6)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 \rightarrow a_6^2 + 1^2 = 2^2$
$a_6^2 + 1 = 4$
$a_6 = \sqrt{3}$ cm

$S = \frac{R \cdot a_6}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$

2 2. Verdadeira
$\ell_1 = \alpha R \rightarrow \ell_1 = \frac{\pi}{3} \cdot 2 = \frac{2\pi}{3}$ cm

3 3. Falsa
$D = 2R = 2 \cdot 2 = 4$ cm

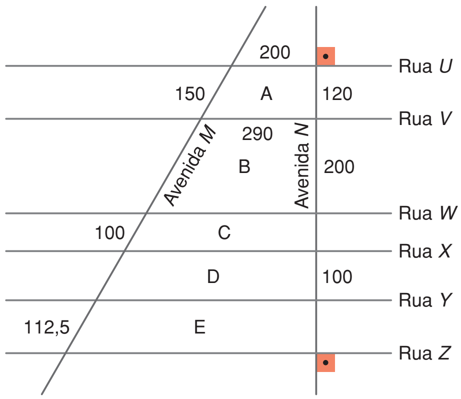
4 4. Verdadeira
ângulo interno $= 60° + 60° = 120°$

Portanto:

I	II
0	~~0~~
~~1~~	1
~~2~~	2
3	~~3~~
~~4~~	4

(UFAC) Para responder às questões de números 65 e 66, utilize as informações seguintes.

Na figura abaixo tem-se parte da planta de um bairro, na qual as ruas são paralelas entre si. As quadras *A*, *B*, *C*, *D* e *E* têm as medidas de alguns de seus lados indicadas em metros.

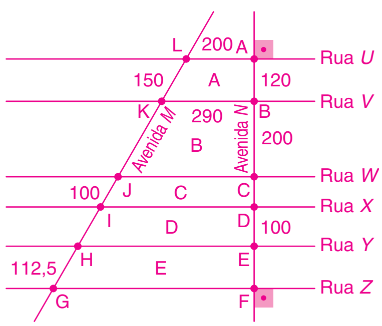


65 Quantos metros percorre-se, seguindo-se em linha reta da esquina da Avenida *N* com a Rua *U* até a esquina da Avenida *N* com a Rua *Z*?

a) 570 b) 580 x c) 590 d) 600 e) 610

66 A área da quadra *B*, em metros quadrados, é igual a:

a) 74 500 x c) 73 000 e) 70 800
b) 73 100 d) 72 200



Usando o teorema de Tales, temos:

$\frac{LK}{AB} = \frac{KJ}{BC} \rightarrow \frac{150}{120} = \frac{JK}{200} \rightarrow JK = 250$

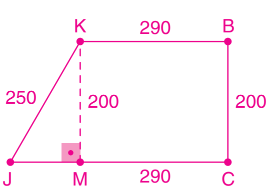
$\frac{JK}{BC} = \frac{JI}{CD} \rightarrow \frac{250}{200} = \frac{100}{CD} \rightarrow CD = 80$

$\frac{JI}{CD} = \frac{IH}{DE} \rightarrow \frac{100}{80} = \frac{IH}{100} \rightarrow IH = 125$

$\frac{IH}{DE} = \frac{HG}{EF} \rightarrow \frac{125}{100} = \frac{112{,}5}{EF} \rightarrow EF = 90$

- A distância percorrida é:
  $AB + BC + CD + DE + EF = 120 + 200 + 80 + 100 + 90 = 590 \rightarrow 590$ m

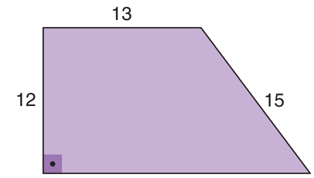
•



$(JK)^2 = (KM)^2 + (JM)^2$
$250^2 = 200^2 + (JM)^2$
$JM = 150$ m

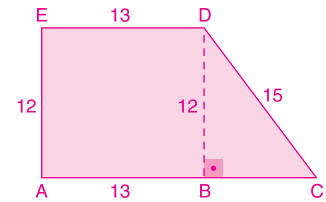
A área é:
$S = \frac{(440 + 290) \cdot 200}{2} = 73\,000$ m²

67 (UFV-MG) A figura ao lado ilustra um terreno em forma de trapézio, com as medidas em quilômetros (km), de três de seus lados.



A área do terreno, em km², é igual a:

a) 220 b) 200 c) 215 x d) 210 e) 205

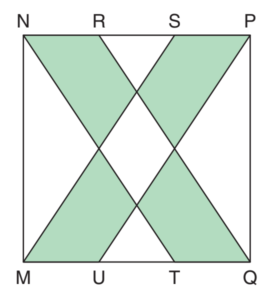


$(BC)^2 = 15^2 - 12^2$
$(BC)^2 = 225 - 144$
$BC = \sqrt{81}$
$BC = 9$ km

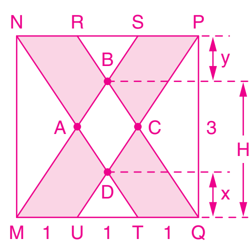
Portanto, a área do trapézio é:

$S = \frac{(22 + 13) \cdot 12}{2} \rightarrow S = 210$ km²

68 (UFF-RJ) Os lados $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ do quadrado MQPN estão divididos em três partes iguais, medindo 1 cm cada um dos segmentos ($\overline{MU}$, $\overline{UT}$, $\overline{TQ}$, $\overline{NR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$). Unindo-se os pontos *N* e *T*, *R* e *Q*, *S* e *M*, *P* e *U* por segmentos de reta, obtém-se a figura ao lado.



Calcule a área da região sombreada na figura.



Os triângulos UDT e MBQ são semelhantes.

Logo, $\frac{UT}{MQ} = \frac{x}{H} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{H}{3}$.

Pela simetria da figura, $y = \frac{H}{3}$; então:

$y + x + H - x = 3$ cm

$\frac{H}{3} + H = 3$; logo, $H = \frac{9}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$

Assim, área de UDT $= \frac{UT \cdot x}{2} = \frac{1 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ cm².

Área de MBQ $= \frac{MQ \cdot H}{2} = \frac{3 \cdot \frac{9}{4}}{2} = \frac{27}{8}$ cm²

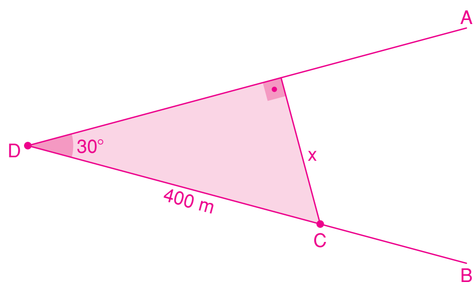
Portanto, a área da região sombreada pode ser calculada por:
$A = 2 \cdot$ (área de MBQ $- 3 \cdot$ área de UDT) $=$

$= 2 \cdot \left(\frac{27}{8} - 3 \cdot \frac{3}{8}\right) = 4{,}5$ cm²

Trigonometria nos Triângulos

1 (UEPB) Duas avenidas retilíneas *A* e *B* se cruzam segundo um ângulo de 30°. Um posto de gasolina *C* situado na avenida *B* a 400 m do ponto de encontro das avenidas se encontra a que distância da avenida *A*?

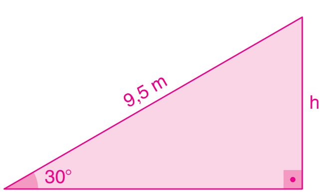
a) 300 m
b) 250 m
c) 150 m
d) 250 m
x e) 200 m



$\text{sen } 30° = \frac{x}{400} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{400} \rightarrow x = 200$ m

2 (EEM-SP) Quantos degraus de 19 cm de altura são necessários para substituir uma rampa de 9,5 m de extensão com inclinação de 30°?

Fazendo a figura, vem:



$\text{sen } 30° = \frac{h}{9{,}5}$

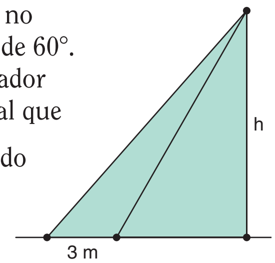
$\frac{1}{2} = \frac{h}{9{,}5} \rightarrow h = 4{,}75$ m

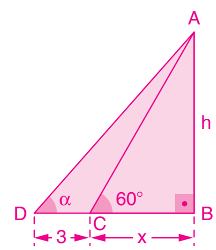
Logo, o número de degraus é:

$N = \frac{4{,}75}{0{,}19} = 25$

N = 25 degraus

3 (UEM-PR) Um balão parado no céu é observado sob um ângulo de 60°. Afastando-se 3 metros, o observador passa a vê-lo sob um ângulo α tal que $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$. Determine a altura do balão. Multiplique o resultado por $11(6 - \sqrt{3})$.





No triângulo ABC, temos:

$\text{tg } 60° = \frac{h}{x} = \sqrt{3} \rightarrow h = \sqrt{3}x$ (1)

No triângulo ABD, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{h}{x + 3} = \frac{1}{2}$

$2h = x + 3$

$2h - 3 = x$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$h = \sqrt{3}(2h - 3)$

$h = 2\sqrt{3}h - 3\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}h - h = 3\sqrt{3}$

$h(2\sqrt{3} - 1) = 3\sqrt{3}$

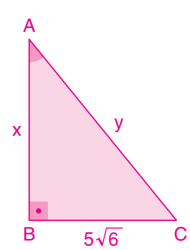
$h = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{3(6 + \sqrt{3})}{11}$

Portanto, $11(6 - \sqrt{3})h = \frac{\cancel{11}(6 - \sqrt{3}) \cdot 3 \cdot (6 + \sqrt{3})}{\cancel{11}} = 3(36 - 3) = 99$ m

4 (UFMG) No triângulo ABC, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, $BC = 5\sqrt{6}$ e $\cos(B\hat{A}C) = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Considerando esses dados, calcule o comprimento do cateto $\overline{AB}$.

Representando o triângulo ABC, temos:



$y^2 = x^2 + (5\sqrt{6})^2 \rightarrow y^2 = x^2 + 150$ (1)

$\cos(B\hat{A}C) = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{x}{y} \rightarrow x = \frac{3y}{\sqrt{15}}$ (2)

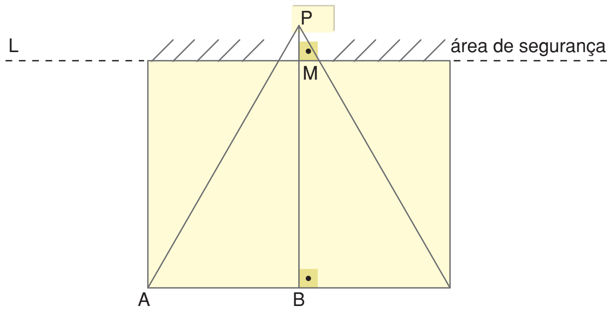
Substituindo (2) em (1), temos:

$y^2 = \frac{9y^2}{15} + 150 \rightarrow y^2 = 375 \rightarrow y = 5\sqrt{15}$

Portanto:

$x = \frac{3 \cdot 5\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \rightarrow x = 15$

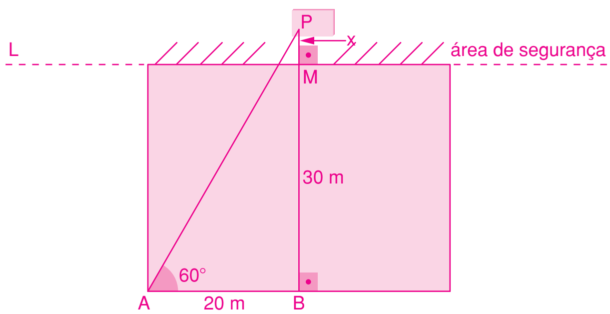
5 (UFJF-MG) Na preparação de um *show* de música popular, os técnicos escolheram o melhor ponto P, do palco, onde, em caso de emergência, o cantor deveria ficar. Para localizar a linha L onde se colocariam os seguranças do cantor, foram feitas as seguintes medidas (ver figura abaixo): $AB = 20$ m, $BM = 30$ m e o ângulo $B\hat{A}P = 60°$. (Use $\sqrt{3} = 1{,}7$.)



Na emergência, a distância aproximada dos seguranças situados em M ao ponto P será:

a) 2 m
b) 10 m
c) 8 m
d) 6 m
x e) 4 m

Do enunciado, temos:



Do triângulo ABP, temos:

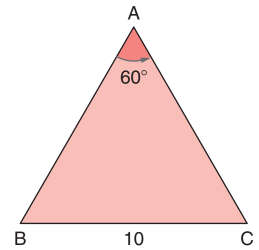
$\text{tg } 60° = \frac{x + 30}{20}$

$\sqrt{3} = \frac{x + 30}{20}$

$1{,}7 = \frac{x + 30}{20}$

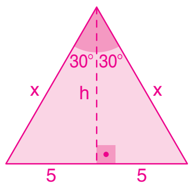
$x = 4$ m

6 (UFAC) Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 60°, $AB = AC$ e $BC = 10$, então a área do triângulo ABC da figura vale:



a) 10
b) $\sqrt{3}$
x c) $25\sqrt{3}$
d) $10\sqrt{3}$
e) $5\sqrt{3}$

Usando a figura, temos:



$\text{sen } 30° = \frac{5}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 10$

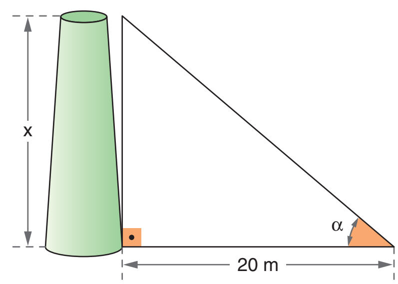
Assim:

$\cos 30° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10} \rightarrow h = 5\sqrt{3}$

A área do triângulo é:

$S = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow S = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

7 (UCSal-BA) A autora alegrava-se em conseguir estimar o comprimento de objetos inacessíveis como, por exemplo, a altura x da torre mostrada na figura abaixo.



A partir do conhecimento de relações trigonométricas e sabendo que $\text{sen } \alpha = 0{,}6428$ e $\cos \alpha = 0{,}7660$, ela podia encontrar que x, em metros, era aproximadamente igual a:

a) 16 x b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

Observando a figura, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{x}{20}$ (1)

Mas:

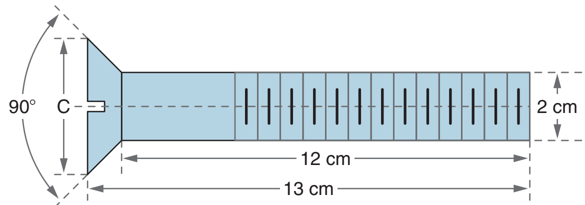
$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{0{,}6428}{0{,}7660} \simeq 0{,}84$ (2)

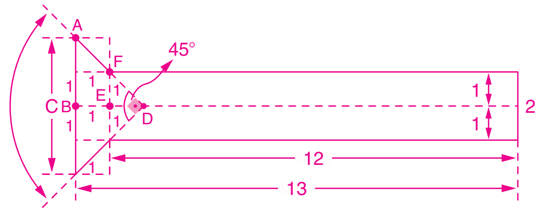
Substituindo (2) em (1), vem:

$\frac{x}{20} = 0{,}84 \rightarrow x = 16{,}8$ m

Portanto, a altura da torre era aproximadamente 17 m.

8 (UFMT) Um rebite é produzido com as dimensões indicadas na figura. Calcule o valor, em cm, da dimensão C.





No △DEF, temos:

$\text{tg } 45° = \frac{EF}{ED} \rightarrow 1 = \frac{1}{ED} \rightarrow ED = 1 \text{ cm}$

Portanto:

$BD = BE + ED \rightarrow BD = 1 + 1 = 2 \text{ cm}$

No △ABD, temos:

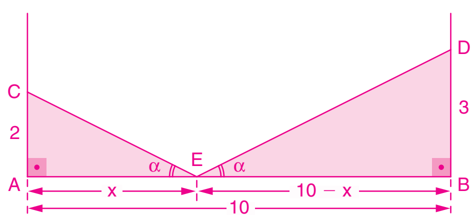
$\text{tg } 45° = \frac{AB}{BD} \rightarrow 1 = \frac{AB}{2} \rightarrow AB = 2 \text{ cm}$

Logo:

$C = 2AB = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}$

9 (EEM-SP) Pelas extremidades A e B de um segmento $\overline{AB}$, traçam-se perpendiculares, e sobre elas tomam-se os segmentos AC = 2 cm e BD = 3 cm. Em $\overline{AB}$ toma-se o ponto E tal que os ângulos $A\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$ sejam congruentes. Calcule os comprimentos dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$, sabendo-se que AB = 10 cm.

Pelos dados do problema, temos:



No triângulo CEA, temos $\text{tg } \alpha = \frac{2}{x}$.

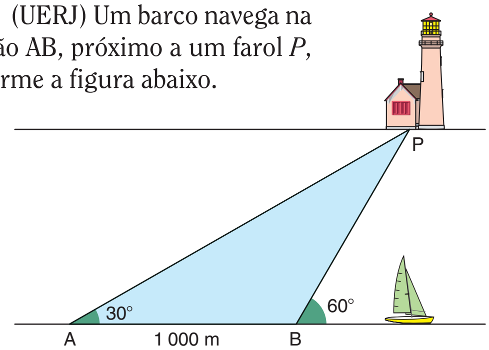
No triângulo DEB, temos $\text{tg } \alpha = \frac{3}{10 - x}$.

Logo:

$\frac{2}{x} = \frac{3}{10 - x} \rightarrow x = 4$

Portanto, AE = 4 cm e BE = 6 cm.

10 (UERJ) Um barco navega na direção AB, próximo a um farol P, conforme a figura abaixo.

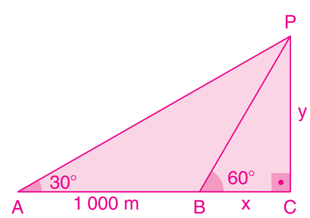


(Adaptado de BONGIOVANNI, Vincenzo *et alii*. *Matemática e Vida*. São Paulo: Ática, 1990.)

No ponto A, o navegador verifica que a reta AP, da embarcação ao farol, forma um ângulo de 30° com a direção AB. Após a embarcação percorrer 1 000 m, no ponto B, o navegador verifica que a reta BP, da embarcação ao farol, forma um ângulo de 60° com a mesma direção AB. Seguindo sempre a direção AB, a menor distância entre a embarcação e o farol será equivalente, em metros, a:

a) 500 x b) $500\sqrt{3}$ c) 1 000 d) $1\,000\sqrt{3}$

Da figura, temos:



A menor distância é y.

$\text{tg } 30° = \frac{y}{x + 1\,000}$ e $\text{tg } 60° = \frac{y}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x + 1\,000}$ ① e $\sqrt{3} = \frac{y}{x}$ ②

De ②, vem: $y = \sqrt{3}x$.

De ①, vem:

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{x + 1\,000} \rightarrow x = 500 \text{ m}$

Logo:

$y = \sqrt{3} \cdot 500 \rightarrow y = 500\sqrt{3} \text{ m}$

Em questões como a 11, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

11 (UFPR) Uma pessoa de 2 m de altura, passeando pela cidade, caminha em linha reta em uma rua horizontal, na direção da portaria de um edifício. A pessoa pára para ver o topo desse edifício, o que a obriga a olhar para cima num ângulo de 30° com a horizontal. Após caminhar 49 m, pára uma segunda vez para ver o topo do edifício e tem de olhar para cima num ângulo de 45° com a horizontal. Suponha que cada andar do edifício tenha 3 m de altura.

Utilize $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$. Nessa situação, é correto afirmar:

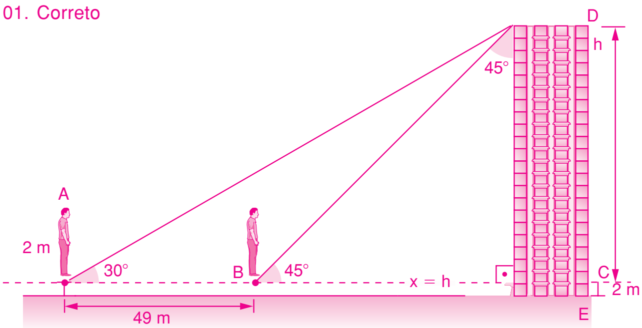
(01) O edifício tem menos de 30 andares.

(02) No momento em que a pessoa pára pela primeira vez, ela está a 160 m da portaria do edifício.

(04) Quando a pessoa pára pela segunda vez, a distância em que ela se encontra da portaria é igual à altura do edifício.

(08) Se, depois da segunda vez em que pára, a pessoa caminhar mais 35 m em direção à portaria, para ver o topo do edifício será necessário erguer os olhos num ângulo maior do que 60° com a horizontal.

01. Correto



O triângulo BCD é isósceles. Logo, x = h.

$\text{tg } 30° = \frac{h}{49 + h} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{49 + h} \rightarrow \frac{1{,}7}{3} = \frac{h}{49 + h} \rightarrow h \simeq 64 \text{ m}$

Logo, a altura do edifício é 64 + 2 = 66 m.

O número de andares é:

66 : 3 = 22 andares

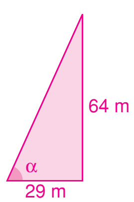
02. Incorreto

Ela está a (66 + 49) = 115 m da portaria do edifício.

04. Incorreto

Na segunda vez ela está a 64 m da portaria do edifício, portanto essa distância é diferente da altura do edifício (66 m).

08. Correto

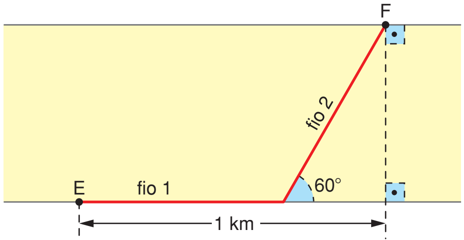


$$\left.\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{64}{29} \simeq 2{,}2 \\ \text{tg } 60° &= \sqrt{3} = 1{,}7 \end{aligned}\right\} \alpha > 60°$$

α é maior que 60°, pois 2,2 > 1,7.

Portanto: 1 + 8 = 9

12 (MACK-SP) Uma estação E, de produção de energia elétrica, e uma fábrica F estão situadas nas margens opostas de um rio de largura $\frac{1}{\sqrt{3}}$ km. Para fornecer energia a F, dois fios elétricos a ligam a E, um por terra e outro por água, conforme a figura.

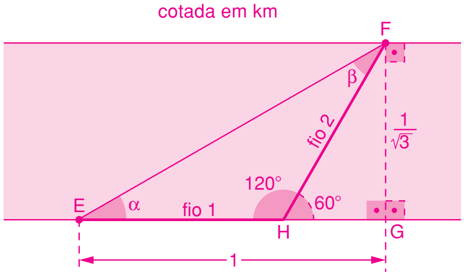


Supondo-se que o preço do metro do fio de ligação por terra é R$ 12,00 e que o metro do fio de ligação pela água é R$ 30,00, o custo total, em reais, dos fios utilizados é:

x a) 28 000
b) 24 000
c) 15 800
d) 18 600
e) 25 000

Do enunciado, temos a figura:

cotada em km



No triângulo retângulo EGF, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{FG}{EG} \therefore \text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} \therefore \alpha = 30°$ (1)

No triângulo EHF, temos:

$\alpha + 120° + \beta = 180°$ (2)

De (1) e (2), vem que 30° + 120° + β = 180°, ou seja, β = 30°.

Sendo α = β, então o triângulo EHF é isósceles e, portanto, EH = HF.

No triângulo retângulo GHF, temos:

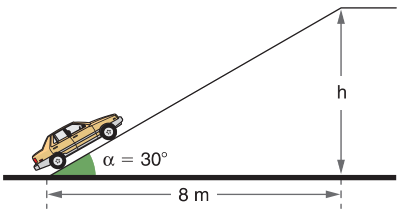
$\text{sen } 60° = \frac{GF}{HF} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{HF} \rightarrow HF = \frac{2}{3}$

Logo, $EH = \frac{2}{3}$.

Do enunciado, o custo C, em reais, dos fios utilizados é tal que:

$C = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \cdot 12 + \frac{2}{3} \cdot 10^3 \cdot 30 \rightarrow C = \text{R\$ } 28\,000{,}00$

13 (Unemat-MT) A rampa de acesso a um estacionamento de automóveis faz um ângulo de 30° com o solo e, ao subi-la, um carro desloca-se horizontalmente 8 m de distância, conforme o desenho.

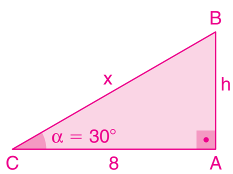


Dados:
sen 30° $= \frac{1}{2}$
cos 30° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

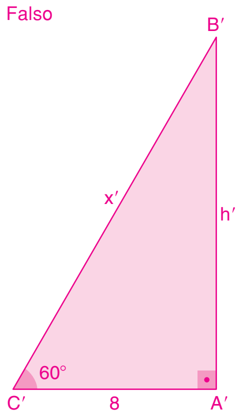
Sobre os dados, julgue os itens:

1. A altura da rampa, representada por h, no desenho, é de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.
2. O comprimento da rampa inclinada, por onde sobem os carros, é o dobro da altura h.
3. Na mesma rampa, se o ângulo formado com o solo fosse de 60°, ou seja, o dobro de α, então a altura h também seria o dobro.

Do enunciado, temos:

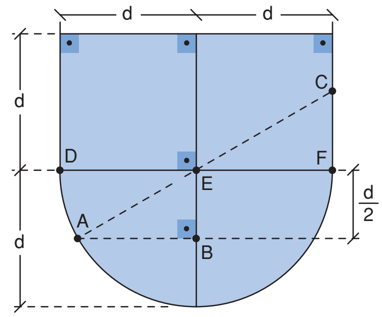


1. Verdadeiro
   No triângulo retângulo ABC, temos:
   $\text{tg } 30° = \frac{h}{8}$
   $\frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \frac{h}{8}$
   $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{h}{8}$
   $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{8}$
   $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ m
2. Verdadeiro
   No triângulo retângulo ABC, temos:
   $\text{sen } 30° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x}$
   $x = 2h$
3. Falso



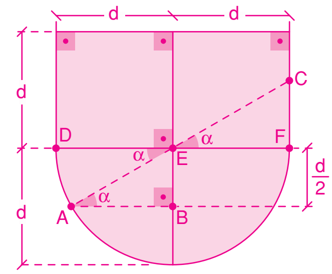
No triângulo retângulo A′B′C′, temos:
$\text{tg } 60° = \frac{h'}{8}$
$\sqrt{3} = \frac{h'}{8}$
$h' = 8\sqrt{3}$ m
$\text{sen } 60° = \frac{h'}{x'}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{x'}$
$x' = 16$ m

14 (FGV-SP) Na figura estão representados dois quadrados de lado d e dois setores circulares de 90° e raio d:



Sabendo que os pontos A, E e C estão alinhados, a soma dos comprimentos do segmento $\overline{CF}$ e do arco de circunferência $\widehat{AD}$, em função de d, é igual a:

X a) $\frac{(2\sqrt{3} + \pi)}{6}$ d
b) $\frac{(3 + \pi)}{6}$ d
c) $\frac{(4\sqrt{3} + \pi)}{12}$ d
d) $\frac{(12 + \pi)}{24}$ d
e) $\frac{(2\sqrt{3} + \pi)}{12}$ d



No △ABE, retângulo em B, tem-se:

$\text{sen } \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{d}{2}}{d} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30°$

Assim:

$\frac{CF}{EF} = \text{tg } \alpha \rightarrow \frac{CF}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow CF = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ e

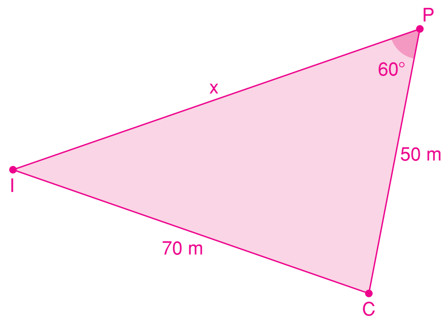
$\frac{\widehat{AD}}{AE} = \frac{30°}{360°} \cdot 2\pi \rightarrow \widehat{AD} = \frac{\pi}{6} \cdot d$

Portanto:

$CF + \widehat{AD} = \frac{d\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi d}{6} = \left(\frac{2\sqrt{3} + \pi}{6}\right) \cdot d$

15 (Cesupa-PA) A água utilizada em um sítio é captada de um igarapé para a casa, que está distante dele 70 metros. Deseja-se construir uma piscina a 50 metros da casa e pretende-se captar a água do mesmo ponto do igarapé até a piscina. Sabendo que o ângulo formado pelas direções casa–piscina e igarapé–piscina é de 60°, a quantidade de encanamento necessária será, em metros, igual a:

a) 30   b) 45   c) 60   x d) 80



Usando a lei dos cossenos, temos:

$70^2 = x^2 + 50^2 - 2 \cdot x \cdot 50 \cdot \cos 60°$

$4\,900 = x^2 + 2\,500 - 100x \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 - 50x - 2\,400 = 0$ → $x' = 80$; $x'' = -30$ (não serve)

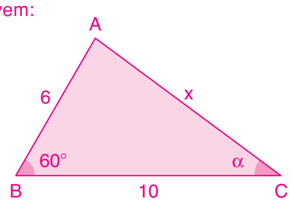
Logo, x = 80 m.

16 (UEMA) Em um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*, AB = 6 cm, BC = 10 m e o ângulo interno formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ mede 60°. A medida do cosseno do ângulo interno formado pelos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é:

a) $\frac{1}{\sqrt{19}}$ x c) $\frac{7}{2\sqrt{19}}$ e) $\frac{1}{5\sqrt{19}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{19}}$ d) $\frac{5}{3\sqrt{19}}$

Fazendo a figura, vem:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB) \cdot (BC) \cdot \cos 60°$

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \to x^2 = 36 + 100 - 60$

$x^2 = 76 \to x = 2\sqrt{19}$

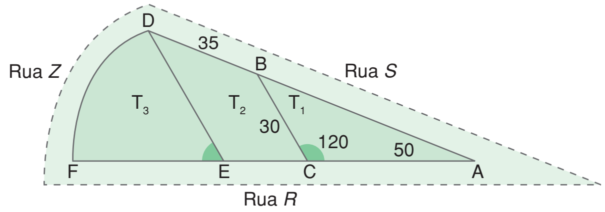
Aplicando novamente a lei dos cossenos, vem:

$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2(BC) \cdot (AC) \cdot \cos \alpha$

$6^2 = 10^2 + \left(2\sqrt{19}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{19} \to 36 = 100 + 76 - 40\sqrt{19} \cdot \cos \alpha$

$40\sqrt{19}\ \cos \alpha = 140 \to \cos \alpha = \frac{140}{40\sqrt{19}} \to \cos \alpha = \frac{7}{2\sqrt{19}}$

17 (Vunesp-SP) Dois terrenos, T_1 e T_2, têm frentes para a rua *R* e fundos para a rua *S*, como mostra a figura. O lado $\overline{BC}$ do terreno T_1 mede 30 m e é paralelo ao lado $\overline{DE}$ do terreno T_2. A frente $\overline{AC}$ do terreno T_1 mede 50 m e o fundo $\overline{BD}$ do terreno T_2 mede 35 m. Ao lado do terreno T_2 há um outro terreno, T_3, com frente para a rua *Z*, na forma de um setor circular de centros *E* e raio $\overline{ED}$.

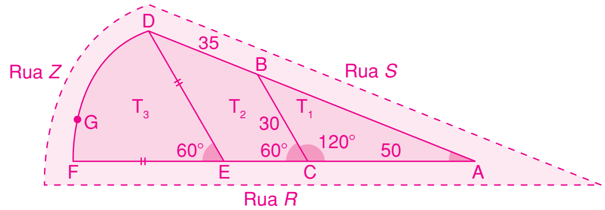


Determine:

a) as medidas do fundo $\overline{AB}$ do terreno T_1 e da frente $\overline{CE}$ do terreno T_2;

b) a medida do lado $\overline{DE}$ do terreno T_2 e o perímetro do terreno T_3.

Do enunciado, temos a figura, cotada em m:



a) Aplicando o teorema dos cossenos ao triângulo ACB, temos:

$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos 120°$

$(AB)^2 = (30)^2 + (50)^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \to AB = 70$ e $AD = 105$ m

Pelo teorema de Tales, temos:

$\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB} \to \frac{CE}{35} = \frac{50}{70} \to CE = 25$ m

b) Do item anterior, temos AB = 70 e AD = 105. Os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Logo:

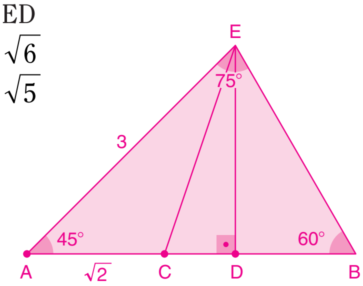
$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \to \frac{DE}{30} = \frac{105}{70} \to DE = 45$ e $EF = 45$

O comprimento do arco $\overset{\frown}{DGF}$, em m, é igual a $\frac{60°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 45$, ou seja, 15π.

Portanto, o perímetro do terreno T_3, em m, é igual a $45 + 45 + 15\pi$, ou seja, $15 \cdot (6 + \pi)$.

18 (UFPR) Em um triângulo ABE, a medida do lado $\overline{AE}$ é 3, a do ângulo $\hat{E}$ é 75°, e a do ângulo $\hat{A}$ é 45°. Dois pontos, *C* e *D*, pertencem ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se que a distância $\overline{AC}$ é $\sqrt{2}$ e que o segmento $\overline{ED}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Nessas condições, é correto afirmar:

~~(01)~~ A medida do ângulo $\hat{B}$ é igual a 60°.
(02) AD > ED
~~(04)~~ $EB = \sqrt{6}$
~~(08)~~ $EC = \sqrt{5}$



01. Correto
$\hat{A} + \hat{E} + \hat{B} = 180° \rightarrow 45° + 75° + \hat{B} = 180° \rightarrow \hat{B} = 60°$

02. Incorreto

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 45° = \dfrac{ED}{AE} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{ED}{3} \rightarrow ED = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45° = \dfrac{AD}{AE} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AD}{3} \rightarrow AD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} AD = ED$$

04. Correto
No triângulo retângulo ADB, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{ED}{EB} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{EB} \rightarrow EB = \sqrt{6}$$

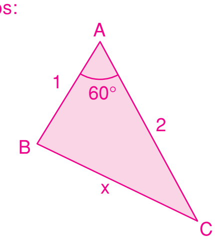
08. Correto
Usando a lei dos cossenos no triângulo AEC, temos:
$(EC)^2 = (AE)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot AE \cdot AC \cdot \cos 45°$
$(EC)^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$(EC)^2 = 9 + 2 - 6$
$(EC)^2 = 5$
$EC = \sqrt{5}$

Portanto: 1 + 4 + 8 = 13

19 (UFPI) Em um triângulo, um dos ângulos mede 60° e os lados adjacentes a esse ângulo medem 1 cm e 2 cm. O valor do perímetro desse triângulo, em centímetros, é:

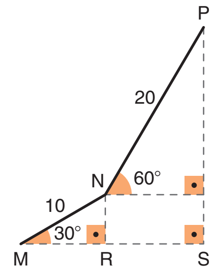
a) $3 + \sqrt{5}$
b) $5 + \sqrt{3}$
X c) $3 + \sqrt{3}$
d) $3 + \sqrt{7}$
e) $5 + \sqrt{7}$

Fazendo a figura, temos:



Aplicando a lei dos cossenos, vem:
$x^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 60°$
$x^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \dfrac{1}{2}$
$x^2 = 3$
$x = \sqrt{3}$ cm
O valor do perímetro do triângulo é:
$1 + 2 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ cm

20 (UFRN) Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de 30 m de comprimento, entre os pontos *M* e *P* de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado, entortou, como mostra a figura abaixo.



A partir desses dados, calcule, em metros:
a) o comprimento dos segmentos $\overline{MS}$ e $\overline{SP}$;
b) quanto o arame deveria medir para que tenha o mesmo tamanho do segmento $\overline{MP}$.

a) Cálculo de $\overline{MS}$

$\overline{MR}$: $\cos 30° = \dfrac{MR}{10}$ $MR = 10 \cos 30° = 10\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\overline{RS}$: $\cos 60° = \dfrac{NT}{20}$ $NT = 20 \cos 60° = 20\dfrac{1}{2} = 10$
• NT = RS
• RS = 10

$\overline{MS}$: $MS = MR + RS = 5\sqrt{3} + 10 = 10 + 5\sqrt{3}$ m

Cálculo de $\overline{SP}$

$\overline{PT}$: $\text{sen } 60° = \dfrac{PT}{20}$ $PT = 20 \text{ sen } 60° = 20\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

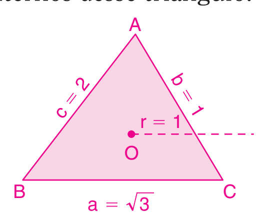
$\overline{TS}$: $\text{sen } 30° = \dfrac{NR}{10}$ $NR = 10 \text{ sen } 30° = 10\dfrac{1}{2} = 5$
• NR = TS
• TS = 5

$\therefore SP = PT + TS = 10\sqrt{3} + 5 = 5 + 10\sqrt{3}$ m

b) Observando que $\overline{MP}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo MPS, pode-se usar:
$(MP)^2 = (MN)^2 + (NP)^2 - 2 \cdot (MN) \cdot (NP) \cdot \cos(\text{MNP})$
$(MP)^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 150°$
$(MP)^2 = 100 + 400 - 400 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$MP = \sqrt{500 + 200\sqrt{3}} = 10\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$ m

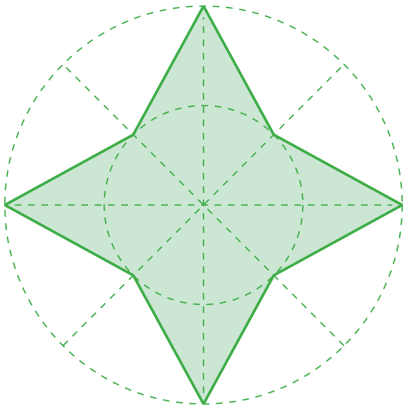
21 (UEMA) Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio unitário cujos lados medem $a = \sqrt{3}$, b = 1 e c = 2. Determine a soma $2\hat{A} + 3\hat{B} + \hat{C}$, em que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos internos desse triângulo.

Desenhando o triângulo ABC, vem:



Aplicando a lei dos senos, temos:
$\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{1}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{2}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot 1 = 0$
Logo:
$\dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } \hat{A}} = 2 \rightarrow \text{sen } \hat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \hat{A} = 60°$
$\dfrac{1}{\text{sen } \hat{B}} = 2 \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \hat{B} = 30°$
$\dfrac{2}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \rightarrow \text{sen } \hat{C} = 1 \rightarrow \hat{C} = 90°$
Portanto: $2\hat{A} + 3\hat{B} + \hat{C} = 2 \cdot 60° + 3 \cdot 30° + 90° = 300°$

22 (Fatec-SP) No centro de uma praça deve ser pintada uma linha com o formato de um polígono regular, não convexo, como mostra o projeto a seguir.



Se os vértices pertencem a circunferências de raios 4 m e 2 m, respectivamente, o comprimento total da linha a ser pintada, em metros, é igual a:

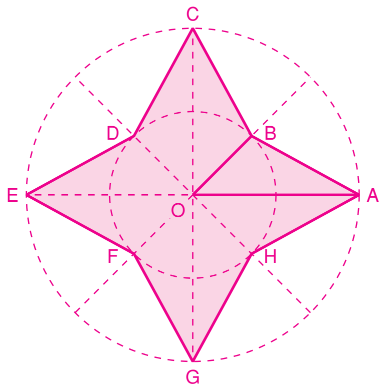
a) $5 - \sqrt{2}$

b) $8 \cdot \left(\sqrt{5 - \sqrt{2}}\right)$

c) $16 \cdot \left(\sqrt{5 - \sqrt{2}}\right)$

d) $4 \cdot \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\right)$

X e) $16 \cdot \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\right)$



Se o polígono ABCDEFGH é regular, e as circunferências têm raios de 4 m e 2 m, então no triângulo AOB tem-se:

$OA = 4$ m, $OB = 2$ m e $A\hat{O}B = 45°$

Assim, $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 45°$

$AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

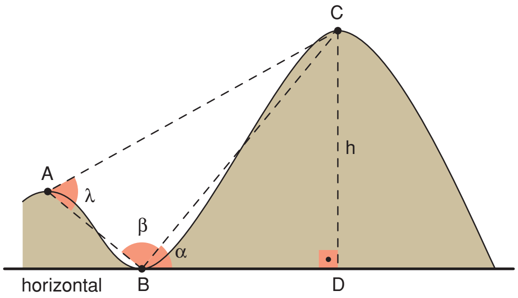
$AB^2 = 20 - 8\sqrt{2} \rightarrow AB = 2 \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$

O perímetro do polígono é $8 \cdot AB = 16 \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ m

23 (UFMT) Para determinar a altura de um morro, um topógrafo adotou o seguinte procedimento:

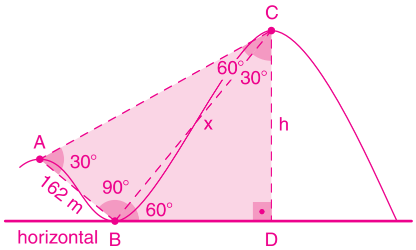
- Escolheu dois pontos, *A* e *B*, situados no mesmo plano vertical que passa por *C*.
- Mediu a distância $\overline{AB}$, encontrando 162 m.
- Com auxílio de um teodolito mediu os ângulos α, β e λ, encontrando, respectivamente, 60°, 90° e 30°.

A figura ilustra o procedimento descrito.



Qual a altura do morro (h), em metros, encontrada pelo topógrafo?

Da figura, temos:



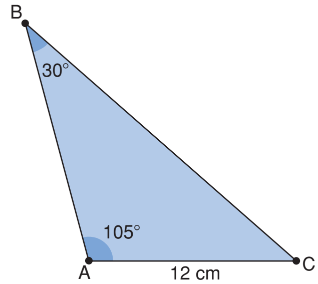
Usando a lei dos senos no △ABC, temos:

$$\frac{\text{sen } 30°}{x} = \frac{\text{sen } 60°}{162} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{162} \rightarrow x = 54\sqrt{3} \text{ m}$$

No △BDC, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{54\sqrt{3}} \rightarrow h = 81 \text{ m}$$

24 (MACK-SP) Três ilhas, A, B, e C, aparecem num mapa, em escala 1 : 10 000, como na figura.



Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:

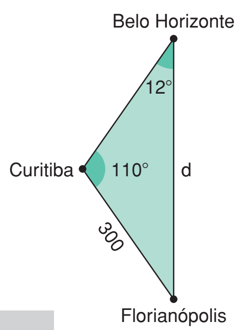
a) 2,3 km
b) 2,1 km
c) 1,9 km
d) 1,4 km
x e) 1,7 km

Se:
1 m = 100 cm
1 km = 1 000 m = 1 000 · 100 = 10^5 cm e 1 cm no mapa = 10 000 cm = 0,1 km
então:
12 cm no mapa corresponderá a 1,2 km, ou seja, AC = 1,2 km.
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow 105° + 30° + \hat{C} = 180° \rightarrow \hat{C} = 45°$
Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\text{sen } 30°} = \frac{AB}{\text{sen } 45°} \rightarrow \frac{1,2}{\frac{1}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Substituindo $\sqrt{2} \simeq 1,41$, vem:
AB $\simeq$ 1,7 km

25 (Furb-SC) Florianópolis, Curitiba e Belo Horizonte, respectivamente, capitais de Santa Catarina, Paraná e Minas Gerais, estão localizadas conforme a figura ao lado.
A partir dos dados fornecidos, qual a distância entre Florianópolis e Belo Horizonte?



a) 1 700 km
b) 2 395 km
x c) 1 395 km
d) 2 700 km
e) 2 390 km

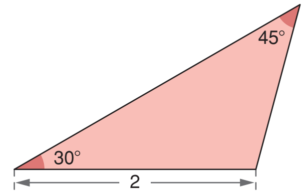
Dados:
cos 110° = −0,34
sen 110° = 0,93
cos 12° = 0,97
sen 12° = 0,20

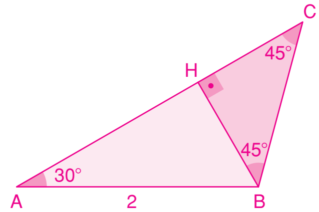
Da figura, temos:

$$\frac{\text{sen } 110°}{d} = \frac{\text{sen } 12°}{300} \rightarrow \frac{0,93}{d} = \frac{0,20}{300} \rightarrow d = 1\,395 \text{ km}$$

26 (MACK-SP) Supondo $\sqrt{3} = 1,7$, a área do triângulo da figura vale:

a) 1,15
b) 1,25
c) 1,30
x d) 1,35
e) 1,45





Da figura, temos:
No △ABH:

$$\text{sen } 30° = \frac{BH}{2} \therefore \frac{1}{2} = \frac{BH}{2} \therefore BH = 1$$

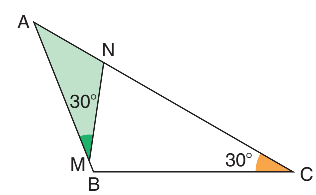
$$\cos 30° = \frac{AH}{2} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{2} \therefore AH = \sqrt{3}$$

No △BHC: HC = BH ∴ HC = 1
A área do △ABC é:

$$\frac{1}{2} \cdot (AC) \cdot (BH) = \frac{1}{2} \cdot (AH + HC) \cdot (BH) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot 1$$

Fazendo-se $\sqrt{3} = 1,7$, a área é $\frac{2,7}{2}$, ou seja, 1,35.

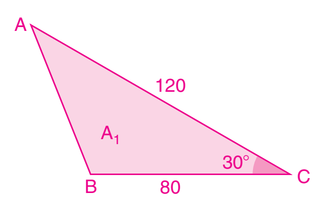
27 (Mack-SP) No terreno ABC da figura, uma pessoa pretende construir uma residência, preservando a área verde da região assinalada.

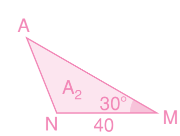


Se BC = 80 m, AC = 120 m e MN = 40 m, a área livre para a construção, em metros quadrados, é de:

a) 1 400
b) 1 600
x c) 1 800
d) 2 000
e) 2 200

Os triângulos ABC e ANM são semelhantes.





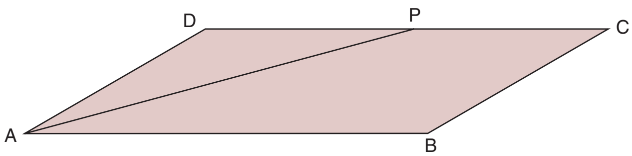
$$\frac{120}{AM} = \frac{80}{40} \rightarrow AM = 60 \text{ m}$$

$$A_1 = \frac{80 \cdot 120}{2} \cdot \text{sen } 30° \rightarrow A_1 = \frac{80 \cdot 120}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow A_1 = 2\,400 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{40 \cdot 60}{2} \cdot \text{sen } 30° \rightarrow A_2 = \frac{40 \cdot 60}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow A_2 = 600 \text{ m}^2$$

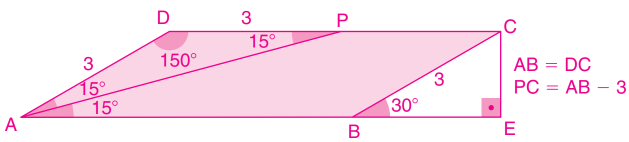
Portanto, a área livre para a construção é:
$A = A_2 - A_1 \rightarrow A = 2\,400 - 600 \rightarrow A = 1\,800 \text{ m}^2$

28 (Fuvest-SP) No paralelogramo ABCD abaixo, tem-se que AD = 3 e $D\hat{A}B$ = 30°. Além disso, sabe-se que o ponto *P* pertence ao lado $\overline{DC}$ e à bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$.



a) Calcule $\overline{AP}$.
b) Determine $\overline{AB}$ sabendo que a área do quadrilátero ABCP é 21.

Do enunciado, temos a figura:



a) Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo ADP, temos:

$(AP)^2 = (AD)^2 + (DP)^2 - 2 \cdot (AD) \cdot (DP) \cdot \cos 150°$

$(AP)^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \therefore AP = 3\sqrt{2+\sqrt{3}}$

b) No triângulo retângulo BEC, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{CE}{BC} \therefore \dfrac{1}{2} = \dfrac{CE}{3} \therefore CE = \dfrac{3}{2}$

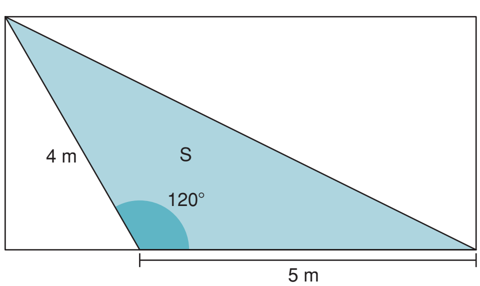
Como a área do trapézio ABCP é igual a 21, temos:

$\dfrac{1}{2} \cdot (AB + PC) \cdot CE = 21$

$\dfrac{1}{2} \cdot (AB + AB - 3) \cdot \dfrac{3}{2} = 21 \therefore AB = \dfrac{31}{2}$

29 (UEPB) Se um painel retangular foi afixado um cartaz de formato triangular, como mostra a figura, a área *S* ocupada pelo cartaz é igual a:

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m²
b) 10 m²
c) 5 m²
d) $10\sqrt{3}$ m²
x e) $5\sqrt{3}$ m²

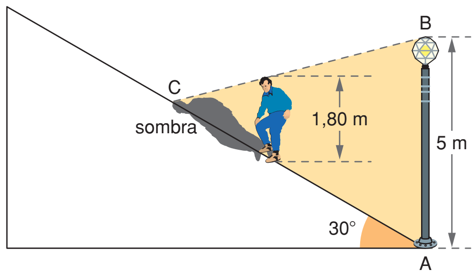


$S = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 120°}{2}$

$S = \dfrac{20}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

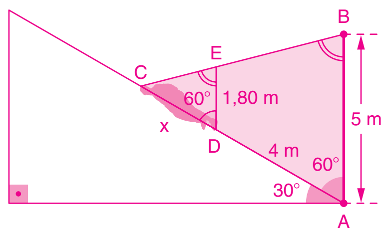
$S = 5\sqrt{3}$ m²

30 (Unicamp-SP) Um homem de 1,80 m de altura sobe uma ladeira com inclinação de 30°, conforme mostra a figura. No ponto *A* está um poste vertical de 5 m de altura, com uma lâmpada no ponto *B*.



Pede-se que:
a) calcule o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 m ladeira acima;
b) calcule a área do triângulo ABC.

Sendo *x* o comprimento da sombra do homem, em metros, depois que ele subiu 4 m ladeira acima, e *S* a área, em metros quadrados, do triângulo ABC, tem-se:



a) Os triângulos ABC e DEC são semelhantes.

Assim:

$\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{AB}{DE} \rightarrow \dfrac{4+x}{x} = \dfrac{5}{1,80}$

$\dfrac{4+x}{x} = \dfrac{25}{9} \rightarrow 16x = 36 \rightarrow x = \dfrac{36}{16} \rightarrow x = 2,25$ m

b) $S = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \text{sen } 60°}{2}$

$S = \dfrac{5 \cdot (4 + 2,25) \cdot \sqrt{3}}{4} = S = \dfrac{125\sqrt{3}}{16}$ m²

Conjuntos

1 (Unicruz-RS) Dados:
$A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, temos que $A \cap (B \cap C)$ resulta:

a) $\{5, 6, 9\}$
X b) $\{5\}$
c) $\{1, 3\}$
d) $\{1, 3, 4, 7, 8\}$
e) $\{7, 8\}$

$A \cap B \cap C = \{5\}$

2 (ECM-AL) Sendo $A = \{x \in \mathbb{N}, x = 2n + 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, x$ é divisor de $18\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}, x$ é múltiplo de $3\}$, então $(B - A) \cap C$ é:

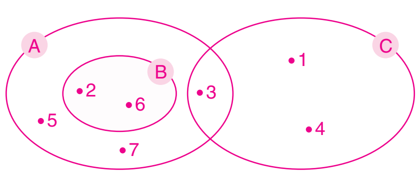
a) $\{6, 9, 18\}$
X b) $\{6, 18\}$
c) $\{6, 9\}$
d) $\{6\}$
e) $\varnothing$

Determinando os conjuntos, vem:
$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...\}$
$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
Logo, $B - A = \{2, 6, 18\}$ e $(B - A) \cap C = \{6, 18\}$

3 (Unifor-CE) Sejam os conjuntos *A*, *B* e *C* tais que $B \subset A$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \{3\}$, $C - A = \{1, 4\}$, $B - C = \{2, 6\}$ e $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Nessas condições, é verdade que:

X a) $A - C = \{2, 5, 6, 7\}$
b) $B \cup C = \{1, 2, 4, 6\}$
c) $A \cap B = \{2, 3, 6\}$
d) $C - B = \{1, 4\}$
e) $\complement_A^B = \{5, 7\}$

Do enunciado, temos:



$A - C = \{2, 5, 6, 7\}$

4 (UESC-BA) Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x; x = n^2, n \in A\}$, pode-se afirmar:

a) $4 \in A - B$
b) $1 \in B - A$
c) $25 \in A \cup B$
d) $A \cup B = A$
X e) $A \cap B = \{0, 1, 4\}$

Sendo $x = n^2$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} n = -1 \rightarrow x = (-1)^2 \rightarrow x = 1 \\ n = 0 \rightarrow x = 0^2 \rightarrow x = 0 \\ n = 1 \rightarrow x = 1^2 \rightarrow x = 1 \\ n = 2 \rightarrow x = 2^2 \rightarrow x = 4 \\ n = 3 \rightarrow x = 3^2 \rightarrow x = 9 \\ n = 4 \rightarrow x = 4^2 \rightarrow x = 16 \end{array}\right\} B = \{0, 1, 4, 9, 16\}$$

a) Falso. $A - B = \{-1, 2, 3\} \rightarrow 4 \notin (A - B)$
b) Falso. $B - A = \{9, 16\} \rightarrow 1 \notin (B - A)$
c) Falso. $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 9, 16\} \rightarrow 25 \notin (A \cup B)$
d) Falso. $A \cup B \neq A$
e) Verdadeiro. $A \cap B = \{0, 1, 4\}$

5 (ITA-SP) Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$
II. $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$
IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$

Pode-se dizer, então, que é(são) verdadeira(s):

a) apenas I e III
b) apenas II e IV
X c) apenas II e III
d) apenas IV
e) todas as afirmações

Observe que:
I. $\varnothing \subset U$, mas $\varnothing \notin U$
II. $n(U) = 10$
III. $5 \in U \rightarrow \{5\} \subset U$
IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$
Assim sendo, I e IV são falsas e II e III são verdadeiras.

6 (Esam-RN) Considerando-se os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}, x$ é divisor de $30\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}, x$ é par$\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}, x$ é múltiplo de $4\}$, é correto afirmar:

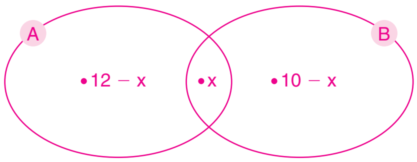
01) $B \subset C$ e $B \cap C = \varnothing$
02) $B \subset C$ e $C \subset B$
03) $B \subset C$ ou $B \cup C = \mathbb{N}$
04) $A \subset C$ ou $A \cap C \neq \varnothing$
X 05) $A \not\subset B$ ou $C \subset B$

$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ..., 30, ...\}$
$C = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...\}$
Logo, $A \not\subset B$ e $C \subset B$.

7 (MACK-SP) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam os produtos *A* ou *B*, sendo que algumas delas utilizam *A* e *B*. O produto *A* é usado por 12 dessas pessoas e o produto *B*, por 10 delas.
O número de pessoas que utilizam ambos os produtos é:

a) 5 b) 3 c) 6 d) 8 x e) 7

Se *x* for o número de pessoas que utilizam os produtos *A* e *B*, então:



$(12 - x) + x + (10 - x) = 15 \rightarrow x = 7$

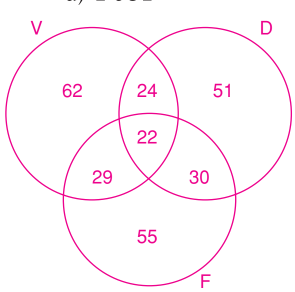
8 (UFPel-RS) Um levantamento epidemiológico foi realizado em cinco praias paulistas freqüentadas por grande número de famílias com crianças menores de 10 anos. Os principais aspectos do estudo foram relacionar a incidência de doenças gastrintestinais em banhistas com os índices de contaminação fecal das praias do litoral paulista. A pesquisa, feita com 2 100 pessoas, teve por objetivo detectar o número de pessoas com sintomas de vômitos (V), diarréia (D) e febre (F), conforme o quadro abaixo.

D	F	V	D e V	D e F	F e V	D, V e F
127	136	137	46	52	51	22

Fonte: Adaptado da revista *Discutindo Ciência*, ano 1, nº 1.

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que o número de pessoas entrevistadas que não apresentaram nenhum dos sintomas pesquisados é:

a) 1 529 x c) 1 827 e) 1 929
b) 2 078 d) 1 951 f) I.R.

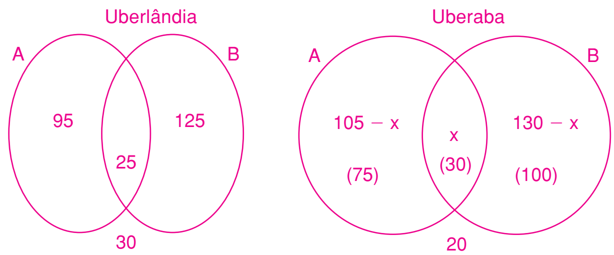


Logo, o número de pessoas que não apresentaram sintomas é:
2 100 − (62 + 29 + 22 + 24 + 30 + 51 + 55) = 1 827

9 (UFU-MG) Numa pesquisa realizada em Uberlândia e Uberaba, para avaliar dois novos produtos, foram consultadas 50 pessoas a mais em Uberlândia. Verificou-se que, das pessoas consultadas em Uberlândia, 120 delas aprovaram o produto *A*, 150 aprovaram o produto *B*, 25 aprovaram os produtos *A* e *B* e 30 não aprovaram nenhum dos dois produtos. Em Uberaba, verificou-se que, das pessoas consultadas, 130 aprovaram o produto *B*, 105 aprovaram o produto *A* e 20 não aprovaram nenhum dos dois produtos.

De acordo com as informações acima, decida se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F).

F 1. Nessa pesquisa foram entrevistadas 600 pessoas.
V 2. Nessa pesquisa 55 entrevistados aprovaram os dois produtos.
V 3. Em Uberaba, 100 entrevistados aprovaram somente o produto *B*.
F 4. Em Uberlândia, 270 entrevistados aprovaram somente o produto *A* ou somente o produto *B*.

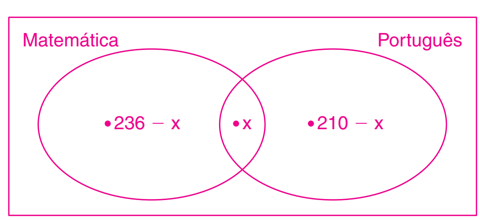


Em Uberlândia, temos:
$n_1 = 95 + 25 + 125 + 30 \rightarrow n_1 = 275$ pessoas
Em Uberaba, temos:
$n_2 = 275 - 50 \rightarrow n_2 = 225$ pessoas
Logo:
$105 - x + x + 130 - x + 20 = 225 \rightarrow x = 30$
1. Falsa
275 + 225 = 500 pessoas
2. Verdadeira
25 + 30 = 55 pessoas
3. Verdadeira
130 − 30 = 100 pessoas
4. Falsa
95 + 125 = 220 pessoas

10 (UFOP-MG) Num concurso público para Técnico do Tesouro Nacional, foram inscritos 2 500 candidatos. O único critério de eliminação era nota inferior a 3,0 na prova de Matemática ou na prova de Português. Após a apuração dos resultados, verificou-se que foram eliminados 330 candidatos, sendo 236 em Matemática e 210 em Português. Pergunta-se:

a) Quantos candidatos foram eliminados nas duas provas simultaneamente?
b) Quantos candidatos foram eliminados apenas na prova de Matemática?
c) Quantos candidatos não foram eliminados?

Fazendo o diagrama, vem:



Logo:
a) $236 - x + x + 210 - x = 330 \rightarrow x = 116$
b) 236 − 116 = 120
c) 2 500 − 120 − 116 − (210 − 116) = 2 170

11 (UFES) Uma empresa tem 180 funcionários. Dentre os funcionários que torcem pelo Flamengo, 25% também torcem pelo Cruzeiro. Dentre os funcionários que torcem pelo Cruzeiro, $\frac{1}{8}$ também torce, simultaneamente, pelo Flamengo e pelo Rio Branco. Nessas condições:

a) mostre que, no máximo, 16 funcionários da empresa torcem, simultaneamente, pelo Flamengo, pelo Cruzeiro e pelo Rio Branco;

b) admitindo que, dentre os funcionários da empresa,
- 80 torcem pelo Flamengo,
- 20 torcem pelo Rio Branco e não torcem nem pelo Flamengo nem pelo Cruzeiro,
- 60 não torcem nem pelo Flamengo, nem pelo Cruzeiro nem pelo Rio Branco,

calcule o número de funcionários que torcem, simultaneamente, pelo Flamengo, pelo Cruzeiro e pelo Rio Branco.

a) Sejam:
- *a*: número de funcionários que torcem pelo Flamengo e não torcem nem pelo Cruzeiro nem pelo Rio Branco
- *b*: número de funcionários que torcem pelo Cruzeiro e não torcem nem pelo Flamengo nem pelo Rio Branco
- *c*: número de funcionários que torcem pelo Rio Branco e não torcem nem pelo Flamengo nem pelo Cruzeiro
- *d*: número de funcionários que torcem simultaneamente pelo Flamengo e Rio Branco e não torcem pelo Cruzeiro
- *e*: número de funcionários que torcem simultaneamente pelo Flamengo e Cruzeiro e não torcem pelo Rio Branco
- *f*: número de funcionários que torcem simultaneamente pelo Cruzeiro e Rio Branco e não torcem pelo Flamengo
- *g*: número de funcionários que torcem simultaneamente pelo Flamengo, Cruzeiro e Rio Branco
- *h*: número de funcionários que não torcem nem pelo Flamengo, nem pelo Cruzeiro nem pelo Rio Branco

Então, tem-se que $a + b + c + d + e + f + g + h = 180$,

$\left(\frac{25}{100}\right)(a + d + e + g) = e + g$, isto é, $a + d = 3(e + g)$, e

$\left(\frac{1}{8}\right)(b + e + f + g) = g$, isto é, $b + e + f = 7g$.

Substituindo $a + d = 3(e + g)$ e $b + e + f = 7g$ em $a + b + c + d + e + f + g + h = 180$, obtém-se $c + 3e + 11g + h = 180$ e, portanto, $11g \leqslant 180$. Logo, $g \leqslant 16$.

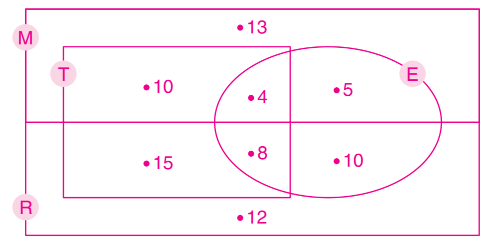
b) Como $h = 60$, $c = 20$ e $a + d + e + g = 80$, então $b + f = 20$, já que $a + b + c + d + e + f + g + h = 180$. Substituindo $b + f = 20$ em $b + e + f = 7g$, obtém-se $7g - e = 20$.
Substituindo $a + d = 3(e + g)$ em $a + d + e + g = 80$, obtém-se $e = 20 - g$. Substituindo $e = 20 - g$ em $7g - e = 20$, obtém-se $g = 5$.

12 (UFAL) As alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna *V* e as falsas, na coluna *F*.
O resultado de uma pesquisa mostrou que, em um grupo de 77 jovens, há:
- um total de 32 moças
- 4 moças que trabalham e estudam
- 15 rapazes que trabalham e não estudam
- 13 moças que não estudam nem trabalham
- 10 rapazes que estudam e não trabalham
- 25 jovens que não trabalham nem estudam
- 15 jovens que estudam e não trabalham

Nesse grupo, o número de:

V – F
0 – ~~0~~ rapazes é 50.
~~1~~ – 1 rapazes que não trabalham nem estudam é 12.
2 – ~~2~~ moças que trabalham e não estudam é 9.
3 – ~~3~~ rapazes que trabalham e estudam é 9.
4 – ~~4~~ moças que estudam e não trabalham é 4.

Temos:



0 0. Falsa. R = 12 + 10 + 15 = 37
1 1. Verdadeira. Veja a figura.
2 2. Falsa. São 10.
3 3. Falsa. São 8.
4 4. Falsa. São 5.

Portanto:

V	F
0	~~0~~
~~1~~	1
2	~~2~~
3	~~3~~
4	~~4~~

13 (UFF-RJ) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo:

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$
b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
X c) $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
d) $(-1, 1)$
e) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$

Substituindo $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{2} = 1{,}41$, vem:
$\pi - \sqrt{2} = 3{,}14 - 1{,}41 = 1{,}73$, que pertence ao intervalo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

14 (Acafe-SC) Analise os conjuntos apresentados e as proposições abaixo.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x + 6)(x - 2)(x - 1) = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$

I. $A \cap B = \{1, 2\}$

II. $A \cup B = \{-3, 1, 2\}$

III. $B \subset A$

IV. $B - A =]1, 2[$

São corretas as proposições:

x a) I e IV
b) I, II e III
c) II e III
d) II e IV
e) I, III e IV

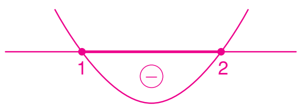
Se:

$(2x + 6)(x - 2)(x - 1) = 0 \rightarrow x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = 1$

$A = \{-3, 2, 1\}$

Se $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$, vem:

$x^2 - 3x + 2 = 0$ < $x' = 2$ ou $x'' = 1$



$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

I. Correta
$A \cap B = \{1, 2\}$

II. Incorreta
$A \cup B = \{-3\} \cup [1, 2]$

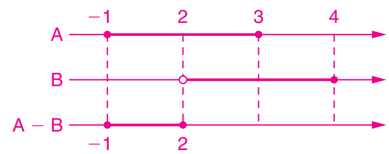
III. Incorreta
$B \not\subset A$

IV. Correta
$B - A =]1, 2[$

15 (UEMA) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 4\}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, podemos afirmar que $A - B$ é o conjunto:

x a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

Representando os conjuntos, vem:

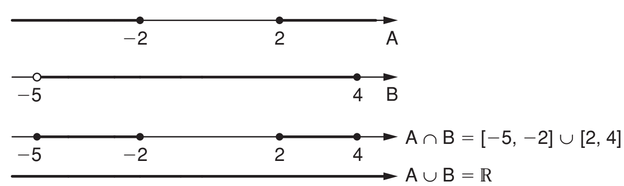


A diferença $A - B$ é:

$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

16 (Cefet-MA) A um aluno foi proposto que ele resolvesse o seguinte exercício: "Obtenha $A \cap B$ e $A \cup B$ para $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 4\}$".

O aluno encontrou a seguinte solução:



a) O aluno errou ao determinar o conjunto $A \cup B$.
b) O aluno acertou o exercício.
x c) O aluno errou ao determinar o conjunto $A \cap B$.
d) Somente o cálculo do conjunto $A \cap B$ está correto.
e) O aluno errou o cálculo da determinação dos dois conjuntos.

O aluno errou ao calcular $A \cap B$:

$A \cap B =]-5, -2] \cup [2, 4]$

Funções

1 (UFMA) Considere as seguintes afirmações:

I. Uma função é uma relação que associa a cada elemento do seu domínio um único elemento no seu contradomínio.

II. Toda relação é uma função.

III. Dada uma função sobrejetora, então seu contradomínio é diferente de sua imagem.

IV. Uma função será injetora se, e somente se, elementos distintos do domínio possuírem imagens distintas.

Assinale a alternativa correta:

a) I, II e III estão corretas.

b) I e II estão corretas.

c) III e I estão corretas

d) II, III e IV estão corretas.

X e) I e IV estão corretas.

I. Correta
Para que uma relação seja função, ela deverá associar a cada elemento do seu domínio um único elemento do seu contradomínio.

II. Incorreta
Uma relação não será função se um elemento do seu domínio associar mais de um elemento do seu contradomínio.

III. Incorreta
Uma função é sobrejetora quando sua imagem é igual ao seu contradomínio.

IV. Correta
Elementos distintos devem corresponder a imagens distintas.

2 (UFSM-RS) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 1, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

O valor de $f(\pi) + f(\sqrt{2}) - f(1)$ é:

a) $\pi^2 + 2\sqrt{\pi} - 2$

b) $2\pi + 2\sqrt{2} - 2$

X c) $\pi^2 - 2$

d) $2\pi + 1$

e) $2\sqrt{2} - \pi + 1$

Pelos dados, temos:

$f(\pi) = \pi^2 - 1$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

Logo:

$f(\pi) + f(\sqrt{2}) - f(1) = \pi^2 - 1 + 1 - 2 = \pi^2 - 2$

3 (Fuvest-SP) Uma função f satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x - 1) + 1$ para todo número real x.

a) Calcule $g(3)$.

b) Determine $f(x)$, para todo x real.

c) Resolva a equação $g(x) = 8$.

1 $f(ax) = af(x), \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

2 $f(4) = 2$

3 $g(x) = f(x - 1) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

a) De 1 e 2, temos:

$a = 2$ e $x = 2 \to f(2 \cdot 2) = 2 \cdot f(2) \to f(4) = 2f(2) = 2 \to f(2) = 1$

Em 3, $x = 3 \to g(3) = f(2) + 1 \to g(3) = 2$.

b) Em 1, se $x = 4 \to f(4 \cdot a) = a \cdot f(4) \to f(4a) = 2a$.

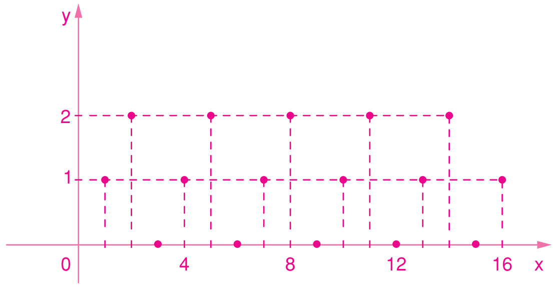
Então: $f(x) = \frac{x}{2}$.

c) Em 3, $g(x) = \frac{x - 1}{2} + 1 = 8 \to x = 15$.

4 (UEM-PR) Sejam $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$. Considere a função $f : \mathbb{N} \to B$, dada por $f(x) = y$, em que y é o resto da divisão de x por 3. É incorreto afirmar que:

a) f é uma função sobrejetora.
b) $f(73) = 1$
x c) f é uma função injetora.
d) $f(1) = 1$
e) $f(102) = 0$

Numa divisão de um número natural por 3 o resto pode ser: 0, 1 ou 2 (valores de *y*).
Para que *y* seja:
$0 \to x$ deve ser múltiplo de 3, isto é, 3, 6, 9, ...
$1 \to x$ deve ser 1, 4, 7, 10, ...
$2 \to x$ deve ser 2, 5, 8, 11, ...



a) Correto
A função f(x) é sobrejetora, pois o contradomínio é igual à imagem.
CD = Im = {0, 1, 2}

b) Correto

$$\begin{array}{r|l} 73 & 3 \\ \hline 13 & 24 \\ 1 & \end{array} \to f(73) = 1$$

c) Incorreto
Não é injetora, pois $f(1) = 1$ e $f(3) = 1$.
Elementos diferentes do domínio levam a imagens iguais.

d) Correto

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \to f(1) = 1$$

e) Correto

$$\begin{array}{r|l} 102 & 3 \\ \hline 12 & 34 \\ 0 & \end{array} \to f(102) = 0$$

5 (EEM-SP) Uma função satisfaz a relação $f(2x) = 2f(x) + f(2)$, para qualquer valor real de x. Sabendo-se que $f(4) = 6$, calcule $f(16)$.

Fazendo x = 2, vem:
$f(2 \cdot 2) = 2f(2) + f(2)$
$f(4) = 3f(2)$
$6 = 3f(2)$
$f(2) = 2$

Fazendo x = 4, vem:
$f(8) = 2f(4) + f(2)$
$f(8) = 2 \cdot 6 + 2$
$f(8) = 14$

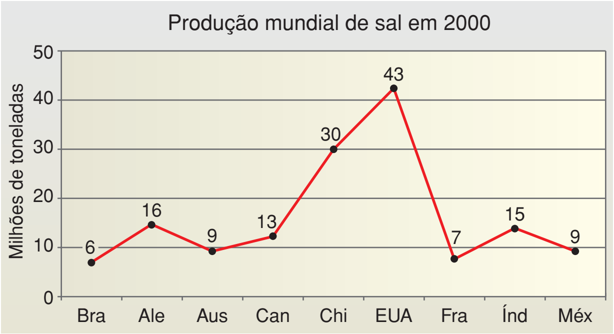
Fazendo x = 8, vem:
$f(16) = 2f(8) + f(2)$
$f(16) = 28 + 2$
$f(16) = 30$

6 (Acafe-SC) Dadas as funções reais $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 12x + 8$, o valor de $a + b$ é:

a) 10 x b) 13 c) 12 d) 20 e) 8

$f[g(x)] = f(ax + b) = 2(ax + b) - 6 = 2ax + 2b - 6$
Daí, vem:
$f[g(x)] = 12x + 8 \to 12x + 8 = 2ax + 2b - 6$
Igualando os coeficientes, temos:
$2a = 12 \to a = 6$
$2b - 6 = 8 \to b = 7$
Logo:
$a + b = 6 + 7 = 13$

7 (UFRN) Embora o Brasil tenha uma das maiores jazidas de sal do mundo, sua produção anual em milhões de toneladas ainda é inferior à da Alemanha, da Austrália, do Canadá, da China, dos EUA, da França, da Índia e do México. O gráfico abaixo mostra a produção de sal nesses países, no ano 2000.



Considerando esses principais países produtores, a melhor aproximação do percentual de participação do Brasil na produção mundial de sal em 2000 foi de:

x a) 4% b) 5% c) 6% d) 11%

A produção mundial é igual a
$6 + 16 + 9 + 13 + 30 + 43 + 7 + 15 + 9 = 148$ milhões.

Logo, a participação do Brasil é $\frac{6}{148} \simeq 0{,}04$ ou 4%.

8 (UFES) O banco Mutreta & Cambalacho cobra uma Tarifa para Manutenção de Conta (TMC) da seguinte forma: uma taxa de R$ 10,00 mensais mais uma taxa de R$ 0,15 por cheque emitido. O banco Dakah Tom Malah cobra de TMC uma taxa de R$ 20,00 mensais mais uma taxa de R$ 0,12 por cheque emitido. O senhor Zé Doular é correntista dos dois bancos e emite, mensalmente, 20 cheques de cada banco.

A soma das TMCs, em reais, pagas mensalmente por ele aos bancos é:

a) 10,15 b) 20,12 c) 30,27 x d) 35,40 e) 50,27

Sendo *x* o número de cheques emitidos, temos:

$y_{MC} = 10 + 0{,}15x$

$y_{DTM} = 20 + 0{,}12x$

Se x = 20, vem:

$y_{MC} = 10 + 0{,}15 \cdot 20 \rightarrow y_{MC} = 13$ reais

$y_{DTM} = 20 + 0{,}12 \cdot 20 \rightarrow y_{DTM} = 22{,}40$ reais

Logo:

$13 + 22{,}40 = 35{,}40$ reais

9 (UFMA) Considere as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = Ax^2 + 3x - 5$ e $g(x) = Bx^2 + 5x - 2$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Sabendo-se que $f(3) = g(3)$, é correto afirmar que o valor de $B - A$ é igual a:

a) -2 x b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

$f(3) = A \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 5 \to f(3) = 9A + 4$ (1)
$g(3) = B \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 \to g(3) = 9B + 13$ (2)
Fazendo (2) = (1), vem:
$g(3) = f(3)$
$9B + 13 = 9A + 4$
$9B - 9A = 4 - 13$
$9(B - A) = -9$
$B - A = -1$

10 (Unifor-CE) Sobre os preços dos ingressos para certo espetáculo, foi estabelecido que, na compra de:

- até um máximo de 20 ingressos, o preço unitário de venda seria R$ 18,00;
- mais de 20 unidades, cada ingresso que excedesse os 20 seria vendido por R$ 15,00.

Nessas condições, a expressão que permite calcular, em reais, o gasto de uma pessoa que compra *x* ingressos, $x > 20$, é:

a) 15x c) 15x + 90 e) 18x − 90
x b) 15x + 60 d) 18x − 60

$f(x) = 20 \cdot 18 + 15(x - 20)$
$f(x) = 360 + 15x - 300$
$f(x) = 15x + 60$

11 (UFPel-RS) O exaustivo empreendimento que é organizar uma festa de casamento vem ganhando acréscimos constantes: bufê, música e ainda um mar de lembrancinhas.
Bem-casados, incrementados com crepom e fitas de cetim, é o doce que não pode faltar em uma cerimônia de casamento. O preço de venda dessa iguaria é de R$ 1,60, do qual R$ 0,72 é o preço de custo.

Fonte: revista *Veja*, nº 22, 1º jun. 2005.

De acordo com o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que uma doceira, para obter um lucro de R$ 1 320,00, deverá fabricar __________ bem-casados.
Assinale a alternativa que completa corretamente a lacuna da sentença acima.

a) 1 833 c) 1 692 e) 568
b) 825 x d) 1 500 f) I.R.

Preço de venda = 1,60x
Preço de custo = 0,72x
Lucro = 1,60x − 0,72x → lucro = 0,88x
Para ter lucro de 1 320 reais, temos:
1 320 = 0,88x → x = 1 500 bem-casados

12 (UFSC) Seja f uma função polinomial do 1º grau, decrescente, tal que $f(3) = 2$ e $f[f(1)] = 1$. Determine a abscissa do ponto onde o gráfico de f corta o eixo x.

Sendo $f(x) = ax + b$, temos:
$f(3) = 2 \rightarrow 3a + b = 2$ ①
$f[f(1)] = 1$
$f(a + b) = 1$
$a(a + b) + b = 1$
$a^2 + ab + b = 1$ ②
De ① e ②, vem:
$3a + b = 2 \rightarrow b = 2 - 3a$
$a^2 + a(2 - 3a) + 2 - 3a = 1$
$-2a^2 - a + 1 = 0$
$2a^2 + a - 1 = 0 \begin{cases} a' = \frac{1}{2} \\ a'' = -1 \end{cases}$
O valor $a = \frac{1}{2}$ não serve, pois a função f é decrescente.
Se $a = -1$, vem:
$b = 2 - 3a \rightarrow b = 2 - 3 \cdot (-1) \rightarrow b = 5$
Logo, $f(x) = -1x + 5$.
A função f corta o eixo x quando $y = 0$. Logo: $0 = -1x + 5 \rightarrow x = 5$

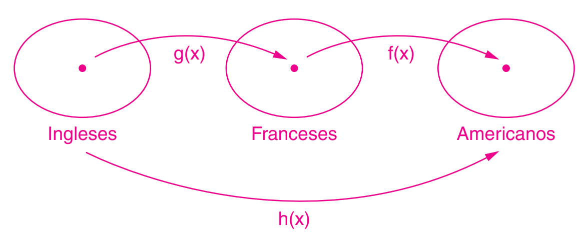
13 (Faap-SP) Tabela de Conversão para tamanhos de Chapéus Masculinos.

Inglaterra	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{5}{8}$	$6\frac{3}{4}$	$6\frac{7}{8}$	7	$7\frac{1}{8}$	$7\frac{1}{4}$	$7\frac{3}{8}$
França	53	54	55	56	57	58	59	60
EUA	$6\frac{5}{8}$	$6\frac{3}{4}$	$6\frac{7}{8}$	7	$7\frac{1}{8}$	$7\frac{1}{4}$	$7\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{2}$

O quadro acima fornece uma tabela para conversão de tamanho de chapéus masculinos para três países. A função $g(x) = 8x + 1$ converte os tamanhos ingleses para os franceses, e a função $f(x) = \frac{1}{8}x$ converte os tamanhos franceses para os tamanhos americanos.
Com base no exposto, assinale a afirmativa correta:

a) A função $h(x) = g[f(x)] = x^2 + 1$ fornece a conversão de tamanhos ingleses para americanos.
x b) A função $h(x) = f[g(x)] = x + \frac{1}{8}$ fornece a conversão de tamanhos ingleses para americanos.
c) A função $h(x) = f[g(x)] = x^2 + 1$ fornece a conversão de tamanhos ingleses para americanos.
d) A função $h(x) = f[g(x)] = 8x + 1$ fornece a conversão de tamanhos ingleses para americanos.
e) A função $h(x) = f[g(x)] = \frac{1}{8}x$ fornece a conversão de tamanhos americanos para ingleses.

Pelos dados, temos:



$h(x) = f[g(x)] = f(8x + 1) = \frac{1}{8} \cdot (8x + 1) = x + \frac{1}{8}$
(que fornece a conversão de tamanhos ingleses para americanos).

14 (UFPR) Considere as seguintes afirmativas a respeito da função f: D → ℝ definida por $f(x) = \frac{x}{1 - x}$:

I. O ponto x = 1 não pertence ao conjunto *D*.

II. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x - 1}$.

III. $f(x) \neq -1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

IV. A função inversa de *f* é $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x}$.

Assinale a alternativa correta:

x a) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

I. Correta
Se x = 1, teremos divisão por zero. Logo, 1 ∈ D.

II. Correta

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \to f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} \to f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x - 1}$$

III. Correta

$$f(x) = -1 \to \frac{x}{1 - x} = -1 \to x = -1 + x \to 0 = -1$$

Logo, $f(x) \neq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

IV. Incorreta

$$y = \frac{x}{1 - x} \to x = \frac{y}{1 - y}$$
$$x - xy = y$$
$$x = xy + y$$
$$x = y(x + 1)$$
$$y = \frac{x}{x + 1}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x + 1}$$

15 (UFU-MG) Considere a função $f(x) = 2x^2 + 1$ para $x \geqslant 0$. Sendo *g* a função inversa de *f*, então, pode-se afirmar que o número real g[f(6)] + f[g(6)] pertence ao intervalo:

a) [0, 4)
x b) [4, 13]
c) [20, 36)
d) [36, 73]

Cálculo da função *g*, inversa de *f*:

$$y = 2x^2 + 1$$
$$x = 2y^2 + 1$$
$$2y^2 = x - 1$$
$$y^2 = \frac{x - 1}{2}$$
$$y = \sqrt{\frac{x - 1}{2}}$$

Logo:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{2}}$$
$$f(6) = 2 \cdot 6^2 + 1 \to f(6) = 73$$
$$g(6) = \sqrt{\frac{6 - 1}{2}}$$
$$g(6) = \sqrt{\frac{5}{2}}$$
$$g(6) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$f(6) + f[g(6)] = 73 + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{146 + \sqrt{10}}{2}$$

Portanto:

$$g\left(\frac{146 + \sqrt{10}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{146 + \sqrt{10}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{146 + \sqrt{10}}{4}} \simeq 6,11$$

16 (UFSM-RS) Sendo as funções f: ℝ → ℝ, definida por f(x − 5) = 3x − 8 e g: ℝ → ℝ definida por g(x) = 2x + 1, assinale verdadeiro (V) ou falso (F) em cada uma das afirmações a seguir.

I. $f(x - 6) = 3x + 11$

II. $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

III. $f(2) - g^{-1}(7) = 10$

A seqüência correta é:

a) F – V – F
b) F – V – V
x c) F – F – V
d) V – V – F
e) V – F – V

Fazendo x − 5 = a, temos x = 5 + a.
Logo: f(x − 5) = 3x − 8 → f(a) = 3(5 + a) − 8 ou f(x) = 3(5 + x) − 8
Daí, temos:

I. Falso. f(x − 6) = 3(5 + x − 6) − 8 = 3(x − 1) − 8 = 3x − 11

II. Falso. g(x) = 2x + 1 → y = 2x + 1 → x = 2y + 1

$$y = \frac{x - 1}{2}$$
$$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

III. Verdadeiro. $f(2) - g^{-1}(7) = 3(5 + 2) - 8 - \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = 21 - 11 = 10$

Função Polinomial

1 (Furg-RS) Seja *g* uma função do tipo $g(x) = ax + b$, com $x \in \mathbb{R}$. Se $g(-2) = -4$ e $2g(3) = 12$, os valores de *a* e *b* são, respectivamente:

a) $-\frac{1}{2}$ e 0
b) 0 e $\frac{1}{2}$
c) 0 e 2
d) $\frac{1}{2}$ e 0
x e) 2 e 0

$g(-2) = -4 \rightarrow -4 = -2a + b$
$g(3) = 6 \rightarrow 6 = 3a + b$
Resolvendo o sistema, obtemos:
$a = 2$ e $b = 0$

2 (UFMS) Para custear seus estudos, um estudante oferece serviços de digitação de textos. O preço a ser pago pela digitação de um texto inclui uma parcela fixa e outra parcela que depende do número de páginas digitadas. Se a parcela fixa for de R$ 4,00 e cada página digitada custar R$ 1,60, então a quantidade de páginas digitadas de um texto, cujo serviço de digitação custou R$ 39,20, será igual a:

a) 29 b) 24 c) 25 d) 20 x e) 22

$P = 4 + 1{,}60x$
Logo:
$4 + 1{,}60x = 39{,}20$
$1{,}60x = 35{,}20$
$x = 22$

3 (UEPA) O empregado de uma empresa ganha mensalmente *x* reais. Sabe-se que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:

a) encontre uma expressão matemática que defina a poupança *P* em função do seu salário *x*;
b) para poupar R$ 240,00, qual deverá ser o seu salário mensal?

Sendo ganho mensal $= x$; aluguel $= 120$; manutenção $= \frac{3x}{4}$, temos:

a) Poupança $\rightarrow P = x - \left(120 + \frac{3x}{4}\right) \rightarrow P = \frac{x}{4} - 120$

b) Sendo $P = 240 \rightarrow 240 = \frac{x}{4} - 120 \rightarrow x =$ R$ 1 440,00

4 (UCSal-BA) Um restaurante cobra de seus clientes um preço fixo por pessoa: R$ 15,00 no almoço e R$ 12,00 no jantar. Certo dia, dos 120 clientes que compareceram a esse restaurante, *x* foram atendidos no jantar. Se foram gastos R$ 6,00 no preparo de cada refeição, a expressão que define o lucro *L*, em reais, obtido nesse dia, em função de *x*, é:

a) $L(x) = 120x - 720$
b) $L(x) = 1\,440x - 720$
c) $L(x) = -6x + 1\,440$
d) $L(x) = -4x + 720$
x e) $L(x) = -3x + 1\,080$

	Preço unitário (em reais)	Número de pessoas	Venda
Almoço	15	$120 - x$	$P_A = 15(120 - x)$
Jantar	12	x	$P_J = 12x$
Custo	$120 \cdot 6 = 720$		

$P_A \rightarrow$ preço do almoço; $P_J \rightarrow$ preço do jantar

Lucro = venda − custo
$L = P_A + P_J - \text{custo}$
$L = 15(120 - x) + 12x - 720$
$L = 1\,800 - 15x + 12x - 720$
$L = -3x + 1\,080$

5 (UENF-RJ) Sabe-se que, nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo e que, ao ser exalado, tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Através de medições realizadas em um laboratório foi obtida a função $T_E = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot T_A$, $12° \leq T_A \leq 30°$, em que T_E e T_A representam, respectivamente, a temperatura do ar exalado e a do ambiente.
Calcule:

a) a temperatura do ambiente quando $T_E = 25$ °C;
b) o maior valor que pode ser obtido para T_E.

a) $25 = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot T_A \rightarrow T_A = 22$ °C
b) $T_E = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot 30 \rightarrow T_E = 31$ °C

6 (UERJ) Uma panela, contendo um bloco de gelo a -40 °C, é colocada sobre a chama de um fogão.
A evolução da temperatura *T*, em graus Celsius, ao longo do tempo *x*, em minutos, é descrita pela seguinte função real:

$$T(x) = \begin{cases} 20x - 40 \text{ se } 0 \leqslant x < 2 \\ 0 \text{ se } 2 \leqslant x \leqslant 10 \\ 10x - 100 \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 100 \text{ se } 20 < x \leqslant 40 \end{cases}$$

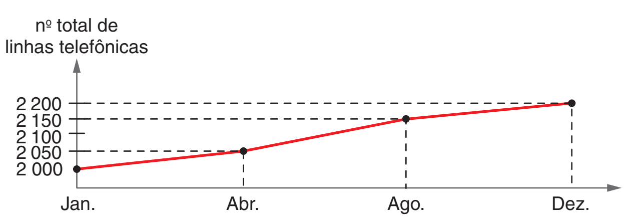
O tempo necessário para que a temperatura da água atinja 50 °C, em minutos, equivale a:

a) 4,5 b) 9,0 x c) 15,0 d) 30,0

Pelos dados, vem:
$10x - 100 = 50$
$10x = 150$
$x = 15$ min

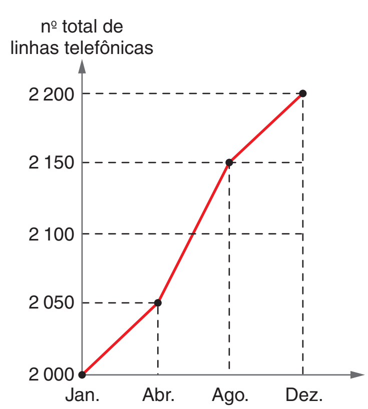
7 (ENEM) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado.

Gráfico I



A companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

Gráfico II

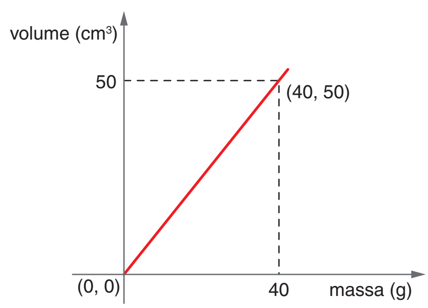


Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
x d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

Ambos os gráficos apresentam, no eixo das ordenadas (y), o número total de linhas telefônicas e, no eixo das abscissas (x), o tempo. Podemos concluir que as taxas de crescimento $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, tomadas em qualquer intervalo, são iguais nos dois gráficos.
A aparente diferença de crescimento nos gráficos decorre somente da escolha de escalas diferentes.

8 (Vunesp-SP) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.



Baseado nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico;
b) qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool.

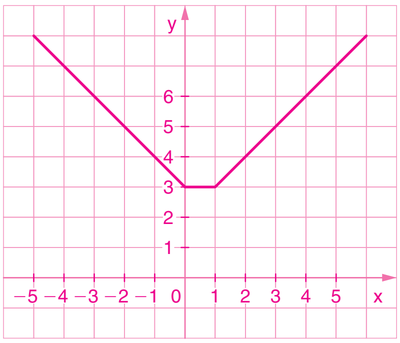
a) Como o gráfico da função é uma semi-reta com origem no ponto (0, 0), podemos representá-la por uma igualdade de forma $V = k \cdot m$, em que *V* representa o volume (em cm^3) correspondente a uma massa *m* (em gramas) de álcool, e *k* é uma constante.
Temos que $50 = k \cdot 40$, ou seja: $k = \frac{5}{4}$, pois o gráfico passa pelo ponto (40, 50).
Portanto, uma lei da função apresentada no gráfico é $V = \frac{5}{4}$ m.
b) Com $V = 30$, temos: $30 = \frac{5}{4} \cdot m$, portanto, $m = 24$ g.

9 (UA-AM) Dada a função $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \geq 1 \\ 3, \text{ se } 0 < x < 1 \\ -x + 3, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$

para que valores de x f(x) é crescente?

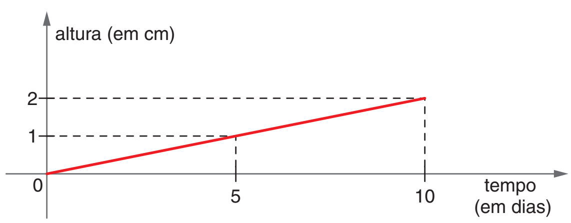
a) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 1\}$
b) $\mathbb{R}$
x c) $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$

Construindo o gráfico da função f(x), temos:



Observando o gráfico, temos que a função f(x) é crescente para $x \geq 1$.

10 (UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.



Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá, no trigésimo dia, uma altura igual a:

a) 5 b) 150 c) 15 d) 30 x e) 6

A função é do 1º grau. Logo, $y = ax + b$.

$x = 5$ e $y = 1 \rightarrow 1 = 5a + b$ (1)

$x = 10$ e $y = 2 \rightarrow 2 = 10a + b$ (2)

Daí, vem:

$$\begin{array}{r} 10a + b = 2 \\ -5a - b = -1 \quad (+) \\ \hline 5a = 1 \end{array}$$

$$a = \frac{1}{5}$$

Se $a = \frac{1}{5}$, temos: $1 = 5 \cdot \frac{1}{5} + b \rightarrow 1 = 1 + b \rightarrow b = 0$.

Portanto: $y = \frac{1}{5}x + 0$.

$y = \frac{1}{5}x$

$y = \frac{1}{5} \cdot 30$

$y = 6$ cm

11 (ESPM-SP) Do centro de uma cidade até o aeroporto são 40 km por uma grande avenida. Os táxis que saem do aeroporto cobram R$ 3,60 pela bandeirada e R$ 0,80 por quilômetro rodado. Os que saem do centro cobram R$ 2,00 pela bandeirada e R$ 0,60 por quilômetro rodado. Dois amigos se encontraram num restaurante que fica nessa avenida, sendo que um tomou o táxi que sai do aeroporto e o outro tomou o que parte do centro e, para surpresa dos dois, os seus gastos foram exatamente iguais. A distância do restaurante ao aeroporto é:

a) 10 km
b) 12 km
c) 14 km
x d) 16 km
e) 18 km

Do enunciado, temos:

Daí, vem:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 40 & (1) \\ 3{,}60 + 0{,}8x_1 = 2 + 0{,}60x_2 & (2) \end{cases}$

De (1), temos:

$x_2 = 40 - x_1$

Substituindo em (2), obtemos:

$3{,}60 + 0{,}8x_1 = 2 + 0{,}60(40 - x_1)$

$3{,}60 + 0{,}8x_1 = 2 + 24 - 0{,}60x_1$

$x_1 = 16$ km

12 (UFMT) Num acidente no litoral brasileiro, o navio Virgínia II sofreu uma fissura no casco atingindo um dos tanques que continha óleo cru. Considere que a mancha provocada pelo vazamento tenha a forma de um disco circular de raio R e que o raio cresce em função do tempo t obedecendo à relação $R(t) = 16t + 1$. Sendo A a área ocupada pela mancha após 5 minutos do início do vazamento, calcule $\frac{A}{81\pi}$.

Quando $t = 5$ min, temos:

$R(5) = 16 \cdot 5 + 1 \rightarrow R = 81$

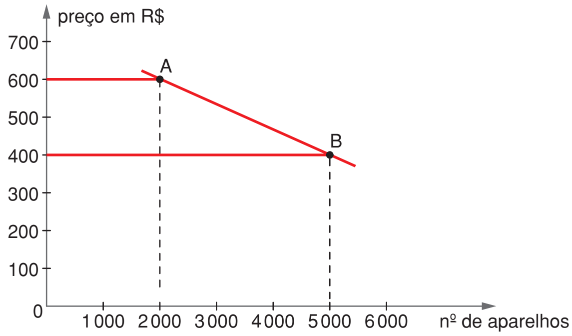
A área da mancha é:

$A = \pi R^2 \rightarrow A = \pi \cdot 81^2 \rightarrow A = 81^2\pi$

Portanto:

$\frac{A}{81\pi} = \frac{81^2\pi}{81\pi} = 81$

13 (UFPel-RS) O sistema de telefonia móvel no Brasil vem crescendo a cada ano. Dados mostrados na *Folha de S.Paulo*, em 25 de abril de 2004, apontam a empresa *X* como uma das maiores prestadoras desse serviço. O gráfico abaixo, publicado nesse jornal, mostra o preço de cada celular, em função da quantidade vendida.
Considerando-se a venda de 3 650 aparelhos telefônicos, determine o preço de cada unidade.



A função é do tipo $y = ax + b$.

$\begin{matrix} x = 2\,000 \\ y = 600 \end{matrix} \rightarrow 600 = 2\,000a + b$

$\begin{matrix} x = 5\,000 \\ y = 400 \end{matrix} \rightarrow 400 = 5\,000a + b$

Daí, vem:

$600 = 2\,000a + b$
$400 = 5\,000a + b$ ⊖

$200 = -3\,000a$

$a = -\frac{1}{15}$

e

$600 = 2\,000 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) + b \rightarrow b = \frac{2\,200}{3}$

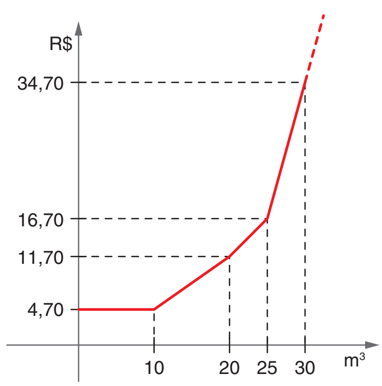
Portanto:

$y = -\frac{1}{15}x + \frac{2\,200}{3}$

Se $x = 3\,650$, vem:

$y = -\frac{1}{15} \cdot 3\,650 + \frac{2\,200}{3} \rightarrow y = \text{R\$ } 490{,}00$

14 (UFJF-MG) Para desencorajar o consumo excessivo de água, o Departamento de Água de certo município aumentou o preço desse líquido. O valor mensal pago em reais por uma residência, em função da quantidade de metros cúbicos consumida, é uma função cujo gráfico é a poligonal representada abaixo.



De acordo com o gráfico, quanto ao pagamento relativo ao consumo mensal de água de uma residência, é correto afirmar que, se o consumo:

a) for nulo, a residência estará isenta do pagamento.
b) for igual a 5 m³, o valor pago será menor do que se o consumo for igual a 10 m³.
c) for igual a 20 m³, o valor pago será o dobro do que se o consumo for igual a 10 m³.
x d) exceder 25 m³, o valor pago será R$ 16,70 acrescido de R$ 3,60 por m³ excedente.
e) for igual a 22 m³, o valor pago será R$ 15,00.

a) Incorreto. Se o consumo for nulo ($V = 0$), o valor mensal será R$ 4,70.
b) Incorreto. Se o consumo for de 5 m³, o valor pago será igual ao do consumo de 10 m³, isto é, R$ 4,70.
c) Incorreto.

10 m³	R$ 4,70
20 m³	R$ 11,70

R$ 11,70 não é o dobro de R$ 4,70.

d) Correto. A taxa por metro cúbico para o volume que exceder 25 m³ é:

$\text{taxa} = \frac{34{,}70 - 16{,}70}{30 - 25} = \frac{18}{5} = 3{,}60$

Daí, obtemos: Preço $= 16{,}70 + 3{,}60V$

e) Incorreto. Entre 20 m³ e 25 m³, temos:

$\text{Preço} = 11{,}70 + \frac{16{,}70 - 11{,}70}{25 - 5}V \rightarrow \text{Preço} = 11{,}70 + 1V$

Para $V = 2$ m³, vem: Preço $= 11{,}70 + 1 \cdot 2 = 13{,}70$

15 (UEL-PR) Uma turma de torcedores de um time de futebol quer encomendar camisetas com o emblema do time para a torcida.
Contataram um fabricante que deu o seguinte orçamento:

- Arte-final mais serigrafia: R$ 90,00, independentemente do número de camisetas.
- Camiseta costurada, fio 30, de algodão: R$ 6,50 por camiseta.

Quantas camisetas devem ser encomendadas com o fabricante para que o custo por camiseta seja R$ 7,00?

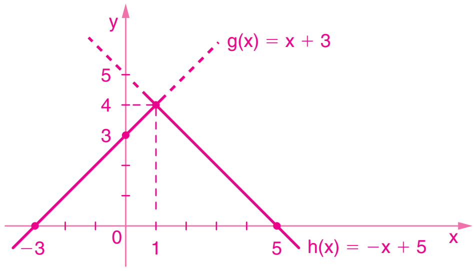
a) 18 b) 36 c) 60 x d) 180

A função é:
$f(x) = 90 + 6{,}50x$
O custo a R$ 7,00 é: $7x$.
Portanto:
$7x = 90 + 6{,}50x$
$0{,}5x = 90$
$x = 180$

16 (Fuvest-SP) Seja *f* a função que associa, a cada número real *x*, o menor dos números $x + 3$ e $-x + 5$. Assim, o valor máximo de $f(x)$ é:

a) 1 b) 2 x c) 4 d) 6 e) 7

Seja a função definida por $f(x) = \text{mínimo } \{x + 3, -x + 5\}$.
Esboçando-se os gráficos das funções *g* e *h* tais que $g(x) = x + 3$ e $h(x) = -x + 5$, tem-se:



O valor máximo da função *f* é 4, que se obtém para $x = 1$, pois:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

17 (FGV-SP) A receita mensal de vendas de uma empresa (y) relaciona-se com os gastos mensais com propaganda (x) por meio de uma função do 1º grau. Quando a empresa gasta R$ 10 000,00 por mês de propaganda, sua receita naquele mês é de R$ 80 000,00; se o gasto mensal com propaganda for o dobro daquele, a receita mensal crescerá 50% em relação àquela.

a) Qual a receita mensal se o gasto mensal com propaganda for de R$ 30 000,00?
b) Obtenha a expressão de *y* em função de *x*.

a) A receita mensal (g) relaciona-se com o gasto mensal segundo a equação $y = mx + n$. Assim:
Se $x = 10\,000$, temos $y = 80\,000$.
Se $x = 2 \cdot 10\,000 = 20\,000$, temos:
$y = 80\,000 + 50\%$ de $80\,000$
$y = 80\,000 + 0{,}50 \cdot 80\,000$
$y = 80\,000 + 40\,000$
$y = 120\,000$
Logo:

$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} 80\,000 = 10\,000m + n \\ 120\,000 = 20\,000m + n \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $m = 4$ e $n = 40\,000$.
Portanto, $y = 4x + 40\,000$.
Se a receita mensal for $x = 30\,000$, teremos:
$y = 4 \cdot 30\,000 + 40\,000 \rightarrow y = 160\,000 \rightarrow$ R$ 160 000,00

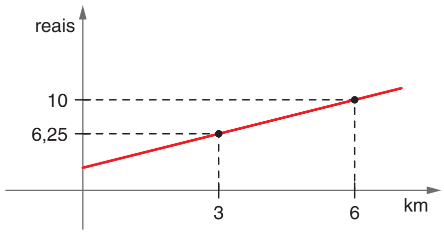
b) $y = 4x + 40\,000$

18 (Unimep-SP) Certo professor tem a opção de escolher entre duas formas de receber seu salário:
Opção *A*: um fixo de R$ 300,00 mais R$ 20,00 por aula dada, ou
Opção *B*: R$ 30,00 por aula dada, sem remuneração fixa.
Quantas aulas mensais, no mínimo, o professor deve ministrar para que a opção *B* seja mais vantajosa?

a) 20 b) 30 x c) 31 d) 32 e) 29

Sendo *x* o número de aulas dadas, temos:
$A \rightarrow y_A = 300 + 20x$
$B \rightarrow y_B = 30x$
Daí, vem:
$y_B > y_A \rightarrow 30x > 300 + 20x \rightarrow 10x > 300 \rightarrow x > 30$
O professor deverá ministrar, no mínimo, 31 aulas.

19 (UFSM-RS) Na figura, é indicado o preço pago por uma corrida de táxi, em função da distância percorrida.



Nessas condições, o valor a ser pago num trajeto de 5 km é, em reais:

a) 8,00 b) 8,13 c) 8,50 x d) 8,75 e) 9,00

Como o gráfico é uma função do 1º grau, é do tipo f(x) = ax + b.
Se x = 3, então f(x) = 6,25. Logo, 6,25 = 3x + b. (1)
Se x = 6, então f(x) = 10. Logo, 10 = 6x + b. (2)

Multiplicando (1) por −2, vem:

$$\begin{cases} -12{,}5 = -6x - 2b \\ 10 = 6x + b \end{cases} \oplus$$
$$-2{,}5 = -b \rightarrow b = 2{,}5$$

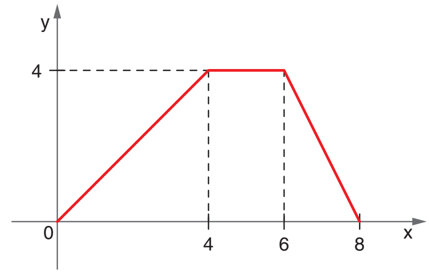
Substituindo b = 2,5 em (2), vem:
10 = 6a + 2,5 → 6a = 7,5 → a = 1,25
Logo: f(x) = 1,25x + 2,5.
Portanto, se x = 5, vem:
f(5) = 1,25 · 5 + 2,5 = 8,75 → R$ 8,75

20 (UFRJ) Um motorista de táxi cobra, em cada corrida, o valor fixo de R$ 3,20 mais R$ 0,80 por quilômetro rodado.

a) Indicando por x o número de quilômetros rodados e por P o preço a pagar pela corrida, escreva a expressão que relaciona P com x.
b) Determine o número máximo de quilômetros rodados para que, em uma corrida, o preço a ser pago não ultrapasse R$ 120,00.

a) P = 3,20 + 0,80x
b) P ⩽ 120 → 3,20 + 0,80x ⩽ 120 → 0,80x ⩽ 116,80
x ⩽ 146 → 146 km
O número máximo é 146 quilômetros.

21 (UFF-RJ) O gráfico da função f está representado na figura a seguir.



Sobre a função f é falso afirmar que:

a) f(1) + f(2) = f(3)
b) f(2) = f(7)
c) f(3) = 3f(1)
d) f(4) − f(3) = f(1)
x e) f(2) + f(3) = f(5)

Pelo gráfico, temos:
Se 0 ⩽ x ⩽ 4 → f(x) = 1x
Se 4 < x ⩽ 6 → f(x) = 4
Se 6 < x ⩽ 8 → f(x) = −2x + 16

Logo:
a) Verdadeiro
f(1) = 1 · 1 = 1
f(2) = 1 · 2 = 2
f(3) = 1 · 3 = 3
Portanto: f(1) + f(2) = f(3).
b) Verdadeiro
f(7) = −2 · 7 + 16 = 2
Portanto: f(2) = f(7).
c) Verdadeiro
3f(1) = 3 · 1 = 3
Portanto: f(3) = 3f(1).
d) Verdadeiro
f(4) = 1 · 4 = 4
Portanto: f(4) − f(3) = f(1).
e) Falso
f(5) = 4
Portanto: f(2) + f(3) = 2 + 3 = 5 ≠ f(5).

22 (Unicruz-RS) Se resolvermos a inequação 2(4x − 9) − 2(x + 2) > −4, obtemos para x o valor:

a) x > 1 c) x ≠ 0 e) x < 3
b) x < 1 x d) x > 3

2(4x − a) − 2(x + 2) > −4
8x − 18 − 2x − 4 > −4 → 6x > 18 → x > 3

23 (UFSC) A soma dos dígitos do número inteiro m tal que $5m + 24 > 5\,500$ e $-\frac{8}{5}m + 700 > 42 - m$ é:

Devemos ter:
5m + 24 > 5 500 → 5m > 5 476 → m > 1 095,2
$-\frac{8}{5}m + 700 > 42 - m \rightarrow m < 1\,096{,}66...$
Logo, m = 1 096.
A soma dos dígitos é: 1 + 0 + 9 + 6 = 16.

24 (Unesp-SP) Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro *n* (tamanho do calçado) em função do comprimento *c*, do pé, em cm.

Pela fórmula, tem-se n = [x], em que $x = \frac{5}{4}c + 7$ e [x] indica o menor inteiro maior ou igual a *x*. Por exemplo, se c = 9 cm, então x = 18,25 e n = [18,25] = 19. Com base nessa fórmula:

a) determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm;

b) se o comprimento do pé de uma pessoa é c = 24 cm, então ela calça 37. Se c > 24 cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

a) Para um pé com 22 cm de comprimento o número do calçado é:

$n = \left[\frac{5}{4} \cdot 22 + 7\right] = [34,5] = 35$

b) A pessoa que calça 38 tem o comprimento *c*, em cm, do pé de forma que:

$n = \left[\frac{5}{4}c + 7\right] = 38 \rightarrow 37 < \frac{5}{4}c + 7 \leqslant 38$

$30 < \frac{5}{4}c \leqslant 31$

$120 < 5x \leqslant 124$

$24 < x \leqslant 24,8$

Assim, o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38 é 24,8.

25 (MACK-SP) Uma parede, medindo 2,80 m por 1,80 m, deve ser revestida por ladrilhos quadrados, de lado 10 cm, que são vendidos em caixas com 36 unidades. Considerando que há uma perda, por quebra durante a colocação, de 10% dos ladrilhos, o número mínimo de caixas que devem ser compradas é:

X a) 16 b) 18 c) 12 d) 24 e) 22

Do enunciado, podemos concluir que, se não houvesse perda, seriam necessários para o revestimento $\frac{280 \cdot 180}{100}$ ladrilhos, ou seja, 504 ladrilhos. Ainda, na tentativa de colocar *x* ladrilhos, são perdidos 0,1x ladrilhos. Como devemos revestir com efetivamente 504 ladrilhos, temos:

$x - 0,1 \cdot x \geqslant 504$

$0,9x \geqslant 504 \therefore x \geqslant 560$

Logo, o número *n* de caixas deve ser tal que $n \geqslant \frac{560}{36}$, ou seja, $n \geqslant 15,6$.

Como *n* é um número inteiro, seu valor mínimo é 16.

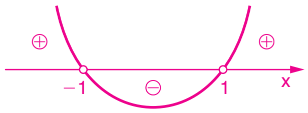
26 (Unisinos-RS) Para que a equação $x^2 - 2mx + 1 = 0$ não tenha raízes reais, a seguinte condição deve ser satisfeita:

a) m = 1 X c) −1 < m < 1 e) m < −1
b) m = −1 d) m > 1

Condição: $\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0$

Substituindo os valores, vem:

$(-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \rightarrow 4m^2 - 4 < 0$



$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -1 < m < 1\}$

27 (Unifor-CE) Seja a equação $x^2 + 4x + k = 0$, em que k é uma constante real. Se uma das raízes dessa equação é igual à terça parte da outra, então o número k é tal que:

a) $k \leq -4$
b) $-4 < k \leq 0$
c) $0 < k \leq 2$
X d) $2 < k \leq 4$
e) $k > 4$

Devemos ter:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \rightarrow x_1 + x_2 = -4 \quad ① \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = k \quad ② \\ x_1 = \dfrac{1}{3}x_2 \quad ③ \end{cases}$$

De ① e ②, vem:

$$x_1 + x_2 = -4 \rightarrow \frac{1}{3}x_2 + x_2 = -4 \rightarrow x_2 + 3x_2 = -12 \rightarrow x_2 = -3$$

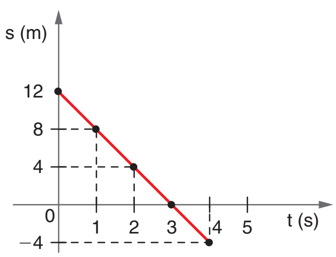
De ③, vem:

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot (-3) \rightarrow x_1 = -1$$

De ②, vem:

$$x_1 \cdot x_2 = k \rightarrow (-1) \cdot (-3) = k \rightarrow k = 3$$

28 (UERJ) A função que descreve a dependência temporal da posição s de um ponto material é representada pelo gráfico abaixo.



Sabendo que a equação geral do movimento é do tipo $s = A + Bt + Ct^2$, os valores numéricos das constantes A, B e C são, respectivamente:

a) 0, 12, 4
b) 0, 12, -4
c) 12, 4, 0
X d) 12, -4, 0

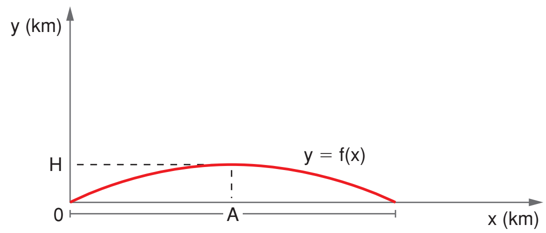
Do gráfico, temos:

$$\begin{matrix} t = 1 \text{ e } s = 8 \rightarrow \\ t = 2 \text{ e } s = 4 \rightarrow \\ t = 3 \text{ e } s = 0 \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 8 = A + B + C \\ 4 = A + 2B + 4C \\ 0 = A + 3B + 9C \end{cases}$$

Daí, vem: $A = 12$, $B = -4$ e $C = 0$.

29 (UFPB) O gráfico da função

$y = f(x) = -\dfrac{1}{200}x^2 + \dfrac{1}{5}x$, representado na figura abaixo, descreve a trajetória de um projétil, lançado a partir da origem.



Sabendo-se que x e y são dados em quilômetros, a altura máxima H e o alcance A do projétil são, respectivamente:

X a) 2 km e 40 km
b) 40 km e 2 km
c) 2 km e 10 km
d) 10 km e 2 km
e) 2 km e 20 km

Se $y = 0$, temos:

$$0 = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x \rightarrow x\left(-\frac{1}{200}x + \frac{1}{5}\right) = 0 \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 40 \end{cases}$$

Logo, $A = 40$ km.
A altura máxima é o valor máximo da função.
Portanto:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{-\frac{1}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{200}\right)} \rightarrow x_v = 20 \text{ km}$$

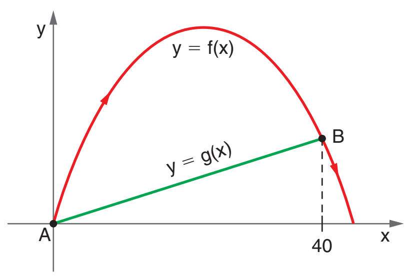
$$y_v = -\frac{1}{200} \cdot 20^2 + \frac{1}{5} \cdot 20 \rightarrow y_v = -2 + 4 \rightarrow y_v = 2 \text{ km}$$

30 (UFSM-RS) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, em que $v(t)$ é o número de elementos vivos no tempo *t* (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estavam vivos no 10º mês era:

a) 80 b) 100 c) 120 x d) 220 e) 300

Pelos dados, temos:
$v(0) = 720$
$a \cdot 0^2 + b = 720$
$b = 720$ (1)
$v(12) = 0$
$a \cdot 12^2 + b = 0$
$144a + b = 0$ (2)
Substituindo (1) em (2), vem:
$144a + 720 = 0$
$a = \frac{-720}{144}$
$a = -5$
Logo, a quantidade de frangos que ainda estavam vivos no 10º mês era:
$v(10) = -5 \cdot 10^2 + 720 \to v(10) = 220$

31 (UFPB) Um míssil foi lançado acidentalmente do ponto *A*, como mostra a figura, tendo como trajetória o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 70x$, em que *x* é dado em km.



Desejando-se destruí-lo num ponto *B*, que está a uma distância horizontal de 40 km de *A*, utiliza-se um outro míssil que se movimenta numa trajetória descrita, segundo o gráfico da função $g(x) = kx$. Então, para que ocorra a destruição no ponto determinado, deve-se tomar *k* igual a:

a) 20 x b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

Se x = 40 km, temos:
$y = -40^2 + 70 \cdot 40 \to y = 1\,200$ km
Substituindo x = 40 km e y = 1 200 km em $g(x) = kx$, temos:
$1\,200 = k \cdot 40 \to k = 30$

32 (Vunesp-SP) A temperatura *T* de um forno, após ser desligado, varia com o tempo *t*, de acordo com a expressão $T = 1\,000 - 15t^2$, no qual *T* é dado em graus Celsius e *t*, em minutos, até atingir a temperatura ambiente.

a) Obtenha a taxa de variação média de *T*, considerando o período entre 3 e 5 minutos após o desligamento do forno.

b) Verifique o valor do tempo em que a temperatura atinge 50% de seu valor inicial.

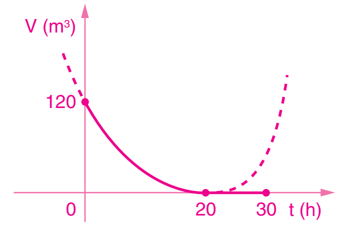
Consideremos t = 0 no instante em que o forno foi desligado.
a) Com $T(t) = 1\,000 - 15t^2$, temos:
$T(3) = 1\,000 - 15 \cdot 3^2 = 865$
$T(5) = 1\,000 - 15 \cdot 5^2 = 625$
Nesse intervalo, a taxa de variação média é dada por:
$$\frac{T(5) - T(3)}{5 - 3} = \frac{625 - 865}{2} = -120 \text{ °C/min}$$
b) Com $t > 0$ e $T(t) = \frac{1}{2}T(0)$, temos:
$1\,000 - 15t^2 = 500$
$15t^2 = 500$
$t^2 = \frac{100}{3} \to t = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ min

33 (Unicamp-SP) Uma piscina, cuja capacidade é de 120 m³, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, *t* horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b - t)^2$ para $0 \leq t \leq 20$ e $V(t) = 0$ para $t \geq 20$.

a) Calcule as constantes *a* e *b*.

b) Faça o gráfico da função V(t) para $t \in [0, 30]$.

Se a piscina de volume 120 m³ leva 20 horas para ser esvaziada, então:
$$\begin{cases} V(20) = 0 = a \cdot (b - 20)^2 \\ V(0) = 120 = a \cdot (b - 0)^2 \end{cases} \to \begin{cases} b = 20, \text{ pois } a \neq 0 \\ a \cdot b^2 = 120 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0{,}3 \\ b = 20 \end{cases}$$
O volume de água na piscina, *t* horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = 0{,}3(20 - t)^2$ para $0 \leq t \leq 20$ e $V(t) = 0$ para $t \geq 20$.
O gráfico da função é:



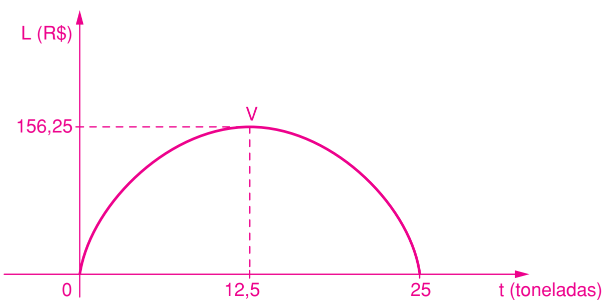
34 (Unemat-MT) Uma empresa apresenta o lucro mensal de acordo com a equação $L = -t^2 + 25t$, em que *t* é a quantidade de toneladas vendidas mensalmente e *L* (lucro) é dado na proporção de 1 (um) por R$ 1 000,00 (um mil reais). Então, podemos dizer:

F 1. Quanto maior for a venda mensal, maior será o lucro.
V 2. O lucro obtido com a venda de 10 toneladas é de R$ 150 000,00, porém é o mesmo lucro obtido com a venda de 15 toneladas.
F 3. Se a venda mensal for maior que 20 toneladas, a empresa terá um lucro superior a R$ 175 000,00.
V 4. O lucro máximo que essa empresa pode ter é de R$ 156 250,00.

Quais sentenças são falsas e quais são verdadeiras?

1. Falsa
A função $L = -t^2 + 25t$ pode ser crescente ou decrescente conforme o valor de *t*. Observe o gráfico:

$L = 0 \rightarrow -t^2 + 25t = 0 \rightarrow t(-t + 25) = 0$ → $t = 0$ ou $t = 25$



$t_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{25}{2} = 12,5$ toneladas

Quanto maior a venda no intervalo $0 < t \leqslant 12,5$, maior será o lucro, e quanto maior a venda no intervalo $12,5 \leqslant t \leqslant 25$, menor será o lucro.

2. Verdadeira
$L(10) = -10^2 + 25 \cdot 10 \rightarrow L(10) = 150$, ou seja, R$ 150 000,00
$L(15) = -15^2 + 25 \cdot 15 \rightarrow L(15) = -225 + 375 = 150$, ou seja, R$ 150 000,00

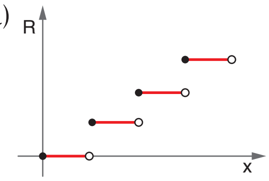
3. Falsa
Vide gráfico acima.

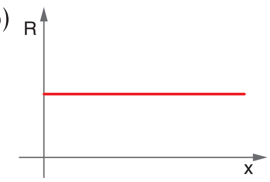
4. Verdadeira
$L(12,5) = -(12,5)^2 + 25 \cdot (12,5) \rightarrow L(12,5) = 156,25$ ou R$ 156 250,00

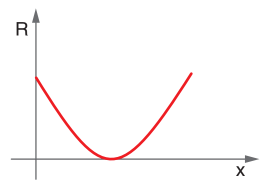
(ENEM) O quadro abaixo refere-se às questões 35 e 36.

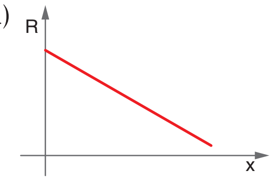
Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo *R* a rapidez de propagação, *P* o público-alvo e *x* o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se: $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que *k* é uma constante positiva característica do boato.

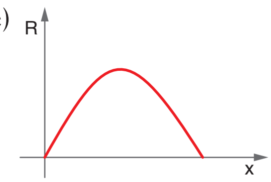
35 O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para *x* real, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

x e) 

Da expressão matemática dada do enunciado, temos:
$R(x) = kx(P - x)$
$R(x) = -kx^2 + kPx$
Como $k > 0$, R(x) é representada por um arco de parábola com a concavidade voltada para baixo.
alternativa *e*

36 Considerando o modelo anteriormente descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11 000
x b) 22 000
c) 33 000
d) 38 000
e) 44 000

$R(x) = kx(44\,000 - x)$
$R(x) = -kx^2 + 44\,000kx$
O número de pessoas para a qual a rapidez de propagação é máxima é dado por:

$x = \dfrac{-(44\,000k)}{2(-k)} = 22\,000$

A rapidez será máxima quando o boato for conhecido por 22 000 pessoas.

Em questões como a 37, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I e as falsas, na coluna II.

37 (UFG) Uma agência de turismo deseja fretar um ônibus de 50 lugares. Duas empresas, *A* e *B*, candidatam-se para fazer a viagem. Se for contratada a empresa *A*, o custo da viagem terá uma parte fixa de R$ 280,50, mais um custo, por passageiro, de R$ 12,00. Se for contratada a empresa *B*, o custo terá um valor fixo de R$ 250,00, mais um custo (C), por passageiro, dado por C(n) = 35 − 0,5n, em que *n* é o número de passageiros que fará a viagem. De acordo com essas informações, julgue os itens a seguir:

I – II

~~1~~ – 1 Se todos os lugares do ônibus forem ocupados, será mais caro contratar a empresa *B*.

2 – ~~2~~ Caso contrate a empresa *B*, o custo máximo da viagem será R$ 862,50.

~~3~~ – 3 Para um mesmo número de passageiros, os valores cobrados pelas empresas *A* e *B* serão diferentes.

~~4~~ – 4 Para um custo de R$ 700,50, a empresa *A* levará mais que o dobro de passageiros que a empresa *B*.

11. Verdadeira
Empresa *A*
custo = 280,50 + 50 · 12,00 = 880,50 → R$ 880,50
Empresa *B*
C(50) = 35 − 0,5 · 50 = 15,00
custo = 250 + 50 · 15,00 = 1 000,00 → R$ 1 000,00

22. Falsa

33. Verdadeira
280,50 + n · 12 = 250 + n(35 − 0,5n)
$n^2 - 46n + 61 = 0$ (não existe *n* inteiro)
Logo, os valores das empresas *A* e *B* são sempre diferentes.

44. Verdadeira
700,50 = 280,50 + n · 12 → n = 35
700,50 = 250,00 + n(35 − 0,5n) → $n^2 - 70n + 901 = 0$ → $n' = 53$, $n'' = 17$

O número de passageiros da empresa *A* é 35, e o da empresa *B* é 17; logo, n(A) > 2 · n(B).

Portanto:

I	II
~~1~~	1
2	~~2~~
~~3~~	3
~~4~~	4

38 (UEM-PR) Considere a função *f* definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ para todo *x* real. É incorreto afirmar que:

a) o vértice do gráfico da função *f* é (1, −4).

x b) a função *f* é negativa para todos os valores de *x* pertencentes ao intervalo [−1, 3].

c) a imagem da função *f* é o intervalo [−4, ∞[.

d) a intersecção da reta de equação y = x − 3 com o gráfico de *f* são os pontos (0, −3) e (3, 0).

e) todas as raízes da função *f* são números inteiros.

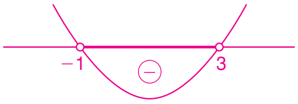
a) Correto

$$\left.\begin{array}{l} x_V = -\dfrac{b}{2a} \rightarrow x_V = \dfrac{2}{2} = 1 \\ f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 \rightarrow f(1) = -4 = x_V \end{array}\right\} V(1, -4)$$

b) Incorreto

$x^2 - 2x - 3 = 0$ → $x' = 3$, $x'' = -1$

$f(x) < 0 \rightarrow\ ]-1, 3[$



c) Correto
Im = [−4, ∞[

d) Correto

$x^2 - 2x - 3 = x - 3 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0$ → $x' = 0$, $x'' = 3$

Os pontos de intersecção são:
x = 0 → y = x − 3 = 0 − 3 = −3 → (0, −3)
x = 3 → y = x − 3 = 3 − 3 = 0 → (3, 0)

e) Correto
As raízes são os números inteiros −1 e 3.

Em questões como a 39, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

39 (UFPR) Um grupo de estudantes decidiu viajar de ônibus para participar de um encontro nacional. Ao fazerem uma pesquisa de preços, os estudantes receberam de uma empresa uma proposta, na qual o preço de cada passagem depende do total de passageiros: cada passageiro pagará R$ 90,00 mais o valor de R$ 5,00 por lugar que eventualmente ficar vago no ônibus. Sabendo que o ônibus tem 52 lugares, é correto afirmar:

(01) Se viajarem 30 passageiros, cada um deles pagará R$ 110,00.

~~(02)~~ Se o total de passageiros for *x*, o preço (em reais) de cada passagem será calculado pela expressão $90 + 5(52 - x)$.

~~(04)~~ Se viajarem 40 pessoas, a empresa deverá receber um total de R$ 6 000,00, referente ao pagamento das passagens.

(08) Se viajarem *x* pessoas, o valor total (em reais) que a empresa deverá receber, referente ao pagamento das passagens, é calculado pela expressão $300x - 5x^2$.

~~(16)~~ O valor total máximo que a empresa poderá receber pelo pagamento das passagens ocorrerá quando o total de passageiros for igual a 35.

(01) Incorreto
$52 - 30 = 22$ lugares vagos
$y = 90 + 22 \cdot 5 = 90 + 110 =$ R$ 200,00

(02) Correto
Sendo *x* o número de passageiros, o número de lugares vagos é $52 - x$. Logo:
$f(x) = 90 + 5(52 - x)$

(04) Correto
$f(40) = 90 + 5(52 - 40) = 90 + 5 \cdot 12 = 150$
O total é igual a: $150 \cdot 40 =$ R$ 6 000,00

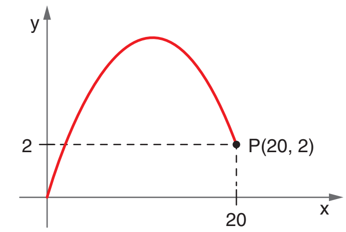
(08) Incorreto
Devemos ter:
$x[90 + 5(52 - x)] = x[90 + 260 - 5x] = 350x - x^2$

(16) Correto
Sendo o valor igual a $350x - 5x^2$:
$x_v = \frac{-b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{-350}{2(-5)} = \frac{-350}{-10} = 35$ pessoas

Portanto: $2 + 4 + 16 = 22$

40 (Furg-RS) Um jogador de futebol se encontra a uma distância de 20 m da trave do gol adversário, quando chuta uma bola que vai bater exatamente sobre essa trave, de altura 2 m. Se a equação da trajetória da bola em relação ao sistema de coordenadas indicado na figura é $y = ax^2 + (1 - 2a)x$, a altura máxima atingida pela bola é:

a) 6,00 m
b) 6,01 m
x c) 6,05 m
d) 6,10 m
e) 6,50 m



Fazendo $x = 20$ e $y = 2$, temos:
$2 = a \cdot 400 + (1 - 2a)20 \rightarrow a = -\frac{1}{20}$

Substituindo, temos:
$y = -\frac{1}{20}x^2 + \left[1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)\right]x \rightarrow y = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{11}{10}x$

A altura máxima é:
$\Delta = \frac{121}{100} - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 0 \rightarrow \Delta = \frac{121}{100}$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \rightarrow y_v = \frac{-\frac{121}{100}}{4 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)} \rightarrow y_v = 6{,}05$ m

41 (Acafe-SC) Sobre o gráfico da função, definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a alternativa correta é:

x a) Todo ponto pertencente ao gráfico possui ordenada negativa.

b) O gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice V(2, 1).

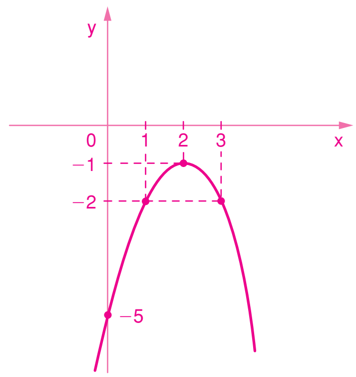
c) O ponto (0, 5) pertence ao gráfico.

d) A parábola tangencia o eixo $\overrightarrow{OX}$.

e) Todo ponto da parábola pertence ao primeiro ou segundo quadrante.

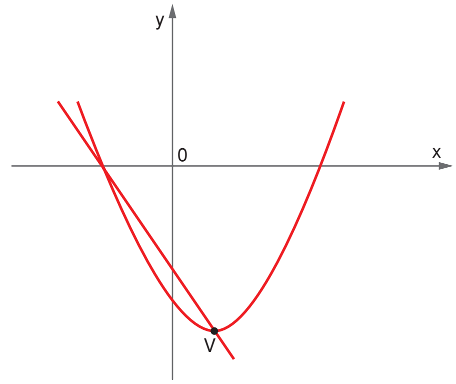
x	y
0	−5
1	−2
2	−1
3	−2

$$\left.\begin{array}{l} x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y_V = -2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$



alternativa *a*

42 (IBMEC-RJ) A figura mostra os gráficos de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 + bx + c$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = ax - 2$, com *a*, *b*, *c* números reais.



Sabendo que o ponto *V* é o vértice da parábola, que $f(-1) = 0$ e que a função *f* apresenta mínimo para $x = 1$, determine:

a) a + b + c

b) f[g(x)]

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 + bx + c \to f(-1) = 0 \\ x_V = 1 \end{array}\right\} \to f(3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (-1, 0) \to 0 = 1 - b + c \\ (3, 0) \to 0 = 9 + 3b + c \end{array}\right\} \to 0 = 8 + 4b \to b = -2 \to c = -3$$

$g(x) = ax - 2 \to g(-1) = 0 \to 0 = -a - 2 \to a = -2$

a) $a + b + c = -2 - 2 - 3 = -7$

b) $$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 - 2x - 3 \\ g(x) = -2x - 2 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} f[g(x)] = (-2x - 2)^2 - 2(-2x - 2) - 3 \\ f[g(x)] = 4x^2 + 12x + 5 \end{array}$$

43 (UFSE) Para analisar as afirmativas abaixo, considere a função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 3$.

I – II

0 – $\cancel{0}$ A função inversa de *f* é definida por $f^{-1}(x) = x - \frac{3}{2}$.

1 – $\cancel{1}$ A função composta $f \circ f$ é definida por $f[f(x)] = 4x + 6$.

2 – $\cancel{2}$ A função *g* definida por $g(x) = [f(x)]^2$ tem por gráfico uma parábola de concavidade para cima e que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

$\cancel{3}$ – 3 O vértice da parábola definida por $y = x^2 - 2x + 6$ pertence ao gráfico de *f*.

$\cancel{4}$ – 4 Se o gráfico de *f* intercepta os eixos coordenados nos pontos *A* e *B*, a função quadrática cujo gráfico contém os pontos *A*, *B* e $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ é definida por $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$.

00. Falsa

$y = 2x + 3 \rightarrow x = 2y + 3$

$y = \frac{x - 3}{2} = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

11. Falsa

$f[f(x)] = f(2x + 3) = 2 \cdot (2x + 3) + 3 \rightarrow f[f(x)] = 4x + 9$

22. Falsa

$g(x) = [f(x)]^2 \rightarrow g(x) = (2x + 3)^2 \rightarrow g(x) = 4x^2 + 6x + 9$

Como $a = 4 > 0$, a concavidade é voltada para cima.

$4x^2 + 6x + 9 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9$

$\Delta = -108$

A função g(x) não tem raízes reais. Portanto, ela não intercepta o eixo das abscissas.

33. Verdadeira

Sendo $y = x^2 - 2x + 6$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{2}{2} = 1 \\ y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 5 \end{array}\right\} V(1, 5)$$

Para $f(x) = 2x + 3$, temos:

$x = 1 \rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

Logo, o ponto (1, 5) pertence ao gráfico de f(x).

44. Verdadeira

$f(x) = 0 \rightarrow 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \rightarrow A\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow B(0, 3)$

Se $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, (0, 3) e $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, temos:

$$\begin{cases} 0 = \frac{9a}{4} - \frac{3}{2}b + c \\ 3 = c \\ 0 = \frac{81}{4}a + \frac{9}{2}b + c \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{4}{9} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = 3 \end{array}$$

Logo:

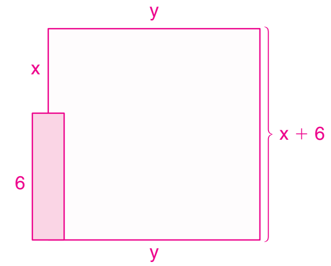
$y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$

Portanto:

I	II
0	$\cancel{0}$
1	$\cancel{1}$
2	$\cancel{2}$
$\cancel{3}$	3
$\cancel{4}$	4

44 (UFF-RJ) Um muro, com 6 metros de comprimento, será aproveitado como parte de um dos lados do cercado retangular que certo criador precisa construir. Para completar o contorno desse cercado o criador usará 34 metros de cerca.

Determine as dimensões do cercado retangular de maior área possível que o criador poderá construir.



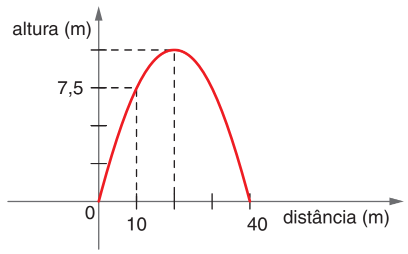
O perímetro do cercado é dado por 6 + x + y + x + 6 + y. Como o muro de 6 m será aproveitado, tem-se que 34 = x + y + x + 6 + y, ou seja, y = 14 − x.

A área do cercado é dada por:

$A = (x + 6)y = (x + 6)(14 - x) = -x^2 + 8x + 84$, $0 \leqslant x < 14$, que pode ser representada graficamente por um arco de parábola, com concavidade voltada para baixo e vértice no ponto de abscissa $x_v = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$, que fornece o maior valor para a área. Portanto, o valor de *y* no cercado é $y = 14 - x = 14 - 4 = 10$.

Logo, o cercado de maior área será o quadrado de lado igual a 10 m.

45 (UCSal-BA) Um futebolista chutou uma bola que se encontrava parada no chão e ela descreveu uma trajetória parabólica, indo tocar o solo 40 m adiante, como mostra a figura.



Se, a 10 m do ponto de partida, a bola atingiu a altura de 7,5 m, então a altura máxima, em metros, atingida por ela, foi de:

a) 12 x b) 10 c) 9,2 d) 8,5 e) 8

Como a função é do 2º grau, podemos escrever:
$f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

Pelo gráfico, temos:
$f(0) = 0$, $f(40) = 0$ e $f(10) = 7,5$

Logo:
$f(0) = 0 \to a(0)^2 + b(0) + c = 0 \to c = 0$
$f(40) = 0 \to a(40)^2 + b(40) + 0 = 0$
$1\,600a + 40b = 0 \quad (: -40)$
$-40a - b = 0$ (1)
e
$f(10) = 7,5 \to a(10)^2 + b(10) + 0 = 7,5$
$100a + 10b = 7,5 \quad (: 2,5)$
$40a + 4b = 3$ (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem:

$$\begin{cases} -40a - b = 0 \\ 40a + 4b = 3 \end{cases} \oplus$$
$$3b = 3 \to b = 1$$

Substituindo $b = 1$ em (1), vem:

$$-40a - 1 = 0 \to a = \frac{-1}{40}, \text{ logo } f(x) = \frac{-1}{40}x^2 + x$$

Portanto, a altura máxima atingida pela bola é:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \to y_v = \frac{-1}{4 \cdot \frac{-1}{40}} = \frac{-1}{\frac{-1}{10}} = 10 \text{ metros}$$

46 (UEM-PR) Considere a função: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$. É correto afirmar que:

a) as coordenadas do ponto de máximo são $(3, -4)$.
b) o domínio da função é o conjunto $\mathbb{R} - \{1,5\}$.
c) a função é sobrejetora, mas não injetora.
x d) a função é negativa para todos os pontos cuja abscissa está entre suas raízes.
e) a função é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \geq 3$.

a) Incorreto
As coordenadas do vértice são:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 \to y_v = -4 \end{array}\right\} V(3, -4)$$

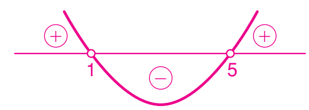
Como $a = 1 > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo. Portanto, $V(3, -4)$ é ponto de mínimo e não de máximo.

b) Incorreto
O domínio é o conjunto dos números reais.

c) Incorreto
A função não é sobrejetora, pois o conjunto imagem $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$ não é igual ao contradomínio $CD = \mathbb{R}$.

d) Correto

$$y = x^2 - 6x + 5 \to 0 = x^2 - 6x + 5 \begin{cases} x_1 = 5 \\ \text{ou} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

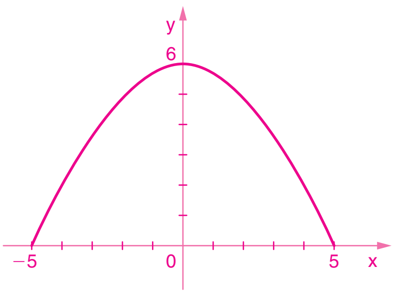


$y < 0 \to 1 < x < 5$

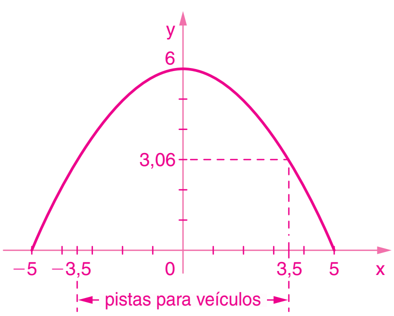
e) Incorreto
Para $x \geq 3$, a função é crescente.

47 (UFMG) A seção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado são reservados 1,5 m para passagem de pedestre, e o restante é dividido em duas pistas para veículos.
As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.

A figura mostra a seção transversal desse túnel.
A abscissa *x* mede o comprimento, em metros, na base do túnel, a partir de seu ponto médio, e a ordenada *y* representa a altura, em metros, a partir da base do túnel.



A equação da parábola é: $y = ax^2 + bx + c$.
Como a parábola passa pelo ponto de coordenadas (0, 6), fazendo $x = 0$ na equação acima, obtemos $c = 6$. Como a parábola passa também pelos pontos $(-5, 0)$ e $(5, 0)$, temos, substituindo, sucessivamente, $x = -5$ e $x = 5$ na equação $y = ax^2 + bx + 6$, $\begin{cases} 25a - 5b = -6 \\ 25a + 5b = -6 \end{cases}$ e segue-se que $b = 0$ e $a = -\frac{6}{25}$.
A equação da parábola é, então, $y = -\frac{6}{25}x^2 + 6$, ou seja, $y = -\frac{6}{25}(x^2 - 25)$.
De cada lado do ponto médio da base do túnel são destinados 3,5 m para as pistas de veículos. Logo, a altura mínima sobre as pistas de veículos é igual ao valor de *y* quando fazemos $x = 3{,}5$ na equação da parábola. Essa altura é, então, em metros, igual a $-\frac{6}{25}(3{,}5^2 - 25) = \frac{6}{25} \cdot 12{,}75 = 3{,}06$.



Para que a passagem de um veículo pelo túnel seja permitida, sua altura deve ser, em metros, no máximo, igual a $3{,}06 - 0{,}30 = 2{,}76 \to 2{,}76$ m.

48 (Unicap-PE) Considere a função definida por $f(x) = x^2 + x$, tendo como domínio o conjunto dos números reais.

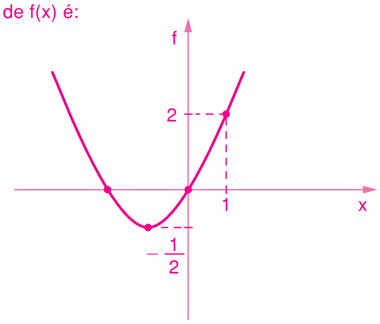
I – II
~~0~~ – 0 Existe um número real *a* tal que $f(a) = 1$.
1 – ~~1~~ A função é par.
2 – ~~2~~ Considerando o domínio da função, ela é sobrejetora.
3 – ~~3~~ Considerando o domínio da função, ela admite inversa.
~~4~~ – 4 A função possui uma raiz não-nula.

00. Verdadeira

$$f(a) = 1 \to a^2 + a = 1 \to a^2 + a - 1 = 0 \begin{cases} a_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ a_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

11. Falsa
$f(-x) = (-x)^2 + (-x) \to f(-x) = x^2 - x \to f(x) \neq f(-x)$
A função não é par.

22. Falsa
O gráfico de f(x) é:



Ela não é sobrejetora, pois o conjunto imagem é diferente do contradomínio.
$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{2}\right\}$ e $CD = \mathbb{R}$

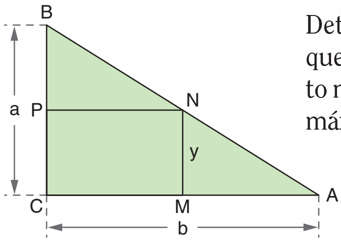
33. Falsa
Ela não tem inversa, pois f(x) não é bijetora.

44. Verdadeira
A função tem uma raiz não-nula.
$x = -1$

Portanto:

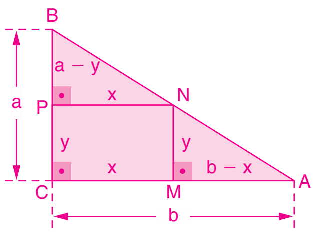
I	II
~~0~~	0
1	~~1~~
2	~~2~~
3	~~3~~
~~4~~	4

49 (UFOP-MG) Um triângulo ABC é retângulo em *C* e seus catetos medem *a* e *b*, conforme a figura abaixo.



Determine y = MN, de modo que o retângulo CMNP, inscrito nesse triângulo, tenha área máxima.

Pelos dados, temos:



Os triângulos ABC, NBP e ANM são semelhantes.
Logo, se $\triangle ABC \sim \triangle NBP$, então:

$$\frac{a}{a-y} = \frac{b}{x}$$

$ax = ab - by$

$by = ab - ax$

$y = a - \frac{a}{b}x$ ①

$A_{\text{retângulo CMNP}} = x \cdot y$ ②

Substituindo ① em ②, vem:

$$A = x \cdot \left(a - \frac{a}{b}x\right) \to A = \frac{-a}{b}x^2 + ax$$

$$x_v = \frac{-a}{2 \cdot \frac{-a}{b}} \to x_v = \frac{b}{2}$$

Substituindo $x = \frac{b}{2}$ em ①, vem:

$$y = a - \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2}$$

50 (Unitau-SP) O conjunto imagem, Im, da função $y = x^2 - 4x + 3$ é:

a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$
b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$
X c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
d) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1\}$
e) $Im = \mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

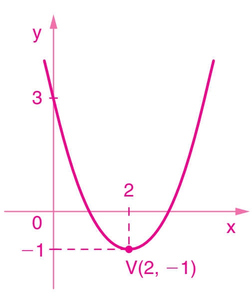
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$$x_v = \frac{-b}{2a} \to x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \to y_v = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1$$

Esboço de gráfico



Podemos observar que $y \geqslant -1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Portanto, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

51 (UFES) Sabendo-se que a imagem da função $y = x^2 + 5x + (k + 4)$ é o conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$, podemos afirmar que o valor de *k* é:

a) 0,25 b) 0,50 c) 0,75 d) 1,00 X e) 1,25

Cálculo do Δ:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 4)$

$\Delta = 25 - 4(k + 4)$

$\Delta = 25 - 4k - 16$

$\Delta = 9 - 4k$

O valor mínimo é:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \to y_v = \frac{-(9-4k)}{4 \cdot 1} \to y_v = \frac{4k-9}{4}$$

O conjunto imagem é:

$y \geqslant y_v \to y \geqslant -1$

$y_v = -1$

$\frac{4k-9}{4} = -1$

$4k - 9 = -4$

$4k = 5$

$k = \frac{5}{4}$

$k = 1{,}25$

52 (Unitau-SP) Para quais valores de *x* é satisfeita a inequação $-3 + 4x - x^2 \geqslant 0$?

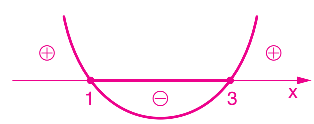
a) $1 < x < 3$
b) $x < 1$ ou $x > 3$
c) $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 3$
X d) $1 \leqslant x \leqslant 3$
e) qualquer *x* real

$-3 + 4x - x^2 \geqslant 0 \to x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$

As raízes são:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ⟨ $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

Portanto, $1 \leqslant x \leqslant 3$.



53 (FGV-SP) Quantos números inteiros satisfazem a inequação $x^2 - 10x < -16$?

a) 3 b) 4 X c) 5 d) 6 e) 7

$x^2 - 10x < -16$

$x^2 - 10x + 16 < 0$

sinal de $x^2 - 10x + 16$

Assim, $2 < x < 8$.
Logo, os números inteiros que satisfazem a inequação são 3, 4, 5, 6 e 7.
Portanto: 5 números

54 (Unifor-CE) O número de soluções inteiras e não-nulas da inequação $\left(\frac{2}{n} - \frac{n}{2}\right)^2 < \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{n}{2}$ é:

X a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Desenvolvendo, temos:

$\frac{4}{n^2} - 2 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} < \frac{4}{n^2} + \frac{n}{2}$

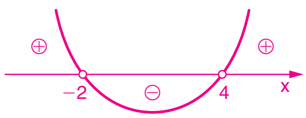
$\frac{4}{n^2} - 2 + \frac{n^2}{4} < \frac{4}{n^2} + \frac{n}{2}$

$\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 2 < 0$

$n^2 - 2n - 8 < 0$

Raízes:

$n^2 - 2n - 8 = 0 \quad n_1 = 4, \quad n_2 = -2$



Entre −2 e 4, temos os números inteiros −1, 0, 1, 2 e 3. Os não-nulos são −1, 1, 2 e 3.

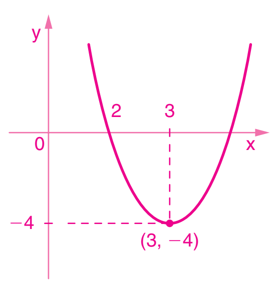
Portanto: 4 números

55 (FGV-SP) Uma função quadrática *f* tem um gráfico cujo vértice é o ponto (3, −4). Sabe-se que 2 é uma raiz da função.

a) Obtenha a expressão da função *f*.

b) Para que valores de x tem-se $f(x) > 0$?

a) Do enunciado, pode-se concluir que o gráfico da função quadrática *f* é:



Daí, tem-se que 4 é a outra raiz de *f*. Então:

$f(x) = a(x - 2)(x - 4)$

Como $f(3) = -4$, então $a(3 - 2)(3 - 4) = -4 \therefore a = 4$

Logo, $f(x) = 4(x - 2)(x - 4)$, ou seja, $f(x) = 4x^2 - 24x + 32$.

b) Do gráfico do item *a*, $f(x) > 0$ se $x < 2$ ou $x > 4$.

56 (UFRJ) Seja $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Para que valores de x se tem $p(x) \geq 0$?

Vamos analisar o sinal de p(x) verificando o sinal de cada um de seus fatores pelo quadro:

	1		2		3	
−		+		+		+
−		−		+		+
−		−		−		+
−		⊕		−		⊕
	1		2		3	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

57 (FGV-SP) O maior número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{5}{x - 3} > 3$ é:

X a) um múltiplo de 2

b) um múltiplo de 5

c) um número primo

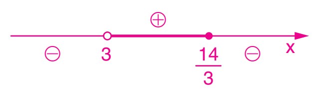
d) divisível por 3

e) divisível por 7

$\frac{5}{x - 3} > 3$

$\frac{5}{x - 3} - 3 > 0$

$\frac{-3x + 14}{x - 3} > 0$



sinal de $\frac{-3x + 14}{x - 3}$

Portanto, $3 < x < \frac{14}{3}$.

Logo, o maior número inteiro que satisfaz a inequação é o 4.

58 (UCSal-BA) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução de $\frac{2x - 1}{2 - 3x} \leq 0$ é:

X a) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

b) $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

c) $\left]-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$

d) $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$

e) $\varnothing$

Sendo $\frac{2x - 1}{2 - 3x} \leq 0$, temos:

	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
−		+		+
+		+		−
⊖		+		⊖
	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	

$S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

59 (Unilasalle-SP) No conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), o conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} \leqslant 3$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2, -1 \leqslant x \leqslant 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -1, x \geqslant 3\}$
X c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2, -1 < x \leqslant 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{7}{2} \leqslant x < -1, x \geqslant \dfrac{3}{2}\right\}$

$\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} - 3 \leqslant 0$

$\dfrac{x^2 + 2x - 3 - 3x - 3}{x + 1} \leqslant 0$

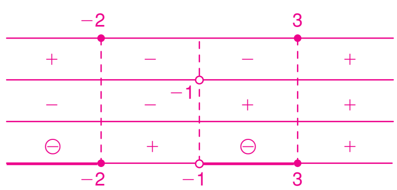
$\dfrac{x^2 - x - 6}{x + 1} \leqslant 0$

As raízes são:

$x^2 - x - 6 = 0 \;\begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -2 \end{cases}$

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Logo:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } -1 < x \leqslant 3\}$

60 (UEM-PR) Considere uma função real dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x + 3}}$. Existe(m) valor(es) real(is) para *x* tal(is) que f(x) seja maior que 1? Em caso afirmativo, determine o(s) possível(is) valor(es) de *x* para que isso ocorra. Caso contrário, justifique sua resposta.

Devemos ter:

$\dfrac{x^2 + 1}{x + 3} > 1$

$\dfrac{x^2 + 1}{x + 3} - 1 > 0$

$\dfrac{x^2 + 1 - x - 3}{x + 3} > 0$

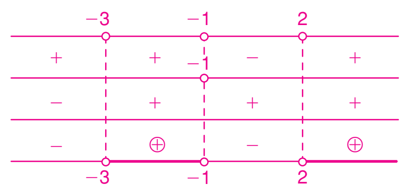
$\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} > 0$

Raízes:

$x^2 - x - 2 = 0 \;\begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -1 \end{cases}$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

Logo:

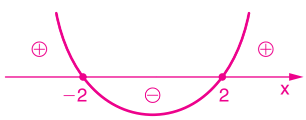


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

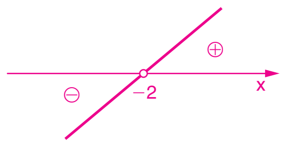
61 (Unifor-CE) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $\frac{x^2 - 4}{x + 2} \leqslant 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
X c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ e } x \neq -2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 2\}$

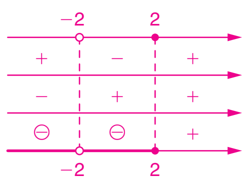
$x^2 - 4 = 0 \to x = 2$ ou $x = -2$



$x + 2 = 0 \to x = -2$



Fazendo o quadro de sinais, temos:



$\therefore x \leqslant 2$ e $x \neq -2$

62 (UCSal-BA) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $x + \frac{1}{x} < 2$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
X d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

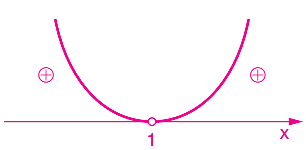
$x + \frac{1}{x} < 2$

$x + \frac{1}{x} - 2 < 0$

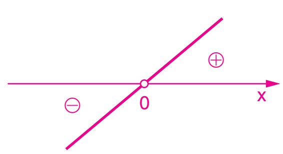
$\frac{x^2 + 1 - 2x}{x} < 0$

$\frac{x^2 - 2x + 1}{x} < 0$

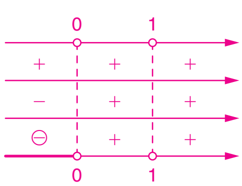
• $x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$



• $x = 0$

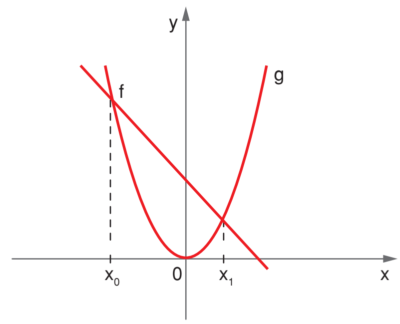


Fazendo o quadro de sinais, temos:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

63 (Uneb-BA)



Da análise do gráfico onde estão representadas as funções $f(x) = -x + 2$ e $g(x) = x^2$, pode-se concluir que o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ é:

01) $]-2, 1[- \{0\}$
02) $]-1, 2[- \{0\}$
03) $\mathbb{R} - [-1, 1]$
04) $\mathbb{R} - [-1, 2]$
X 05) $\mathbb{R} - [-2, 1]$

Para $f(x) = g(x)$, temos:

$-x + 2 = x^2 \to x^2 + x - 2 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Daí, temos:

$x < -2 \to f(x) < g(x)$, portanto $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$

$x > 1 \to f(x) < g(x)$, portanto $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$

$-2 < x < 1 \to f(x) > g(x)$, portanto $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$

Portanto, teremos $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ para:

$x \in \mathbb{R} - [-2, 1]$

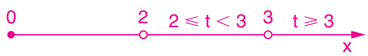
Função Modular

1 (UERJ) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

$$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|,\ t \in \mathbb{R}_+$$

Nela, *V* é o volume medido, em m³, após *t* horas, contadas a partir de 8 h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

Representando na reta numerada, temos:
$4 - 2t = 0 \to 2t = 4 \to t = 2$
$2t - 6 = 0 \to 2t = 6 \to t = 3$



Se:
- $0 < t < 2 \to V = 10 - (4 - 2t) + (2t - 6) = 10 - 4 + 2t + 2t - 6 = 4t$
- $2 \leq t < 3 \to V = 10 + (4 - 2t) + (2t - 6) = 10 + 4 - 2t + 2t - 6 = 8$
- $t \geq 3 \to V = 10 + (4 - 2t) - (2t - 6) = 10 + 4 - 2t - 2t + 6 = -4t + 20$

Portanto, o volume é constante ($V = 8$ m³) no intervalo $2 < t < 3$. Como as horas são contadas a partir de 8 h, temos:
$2 + 8 < t < 3 + 8 \to 10 < t < 11$
Então, o volume permanece constante entre 10 h e 11 h.

2 (UFSC) Sejam as funções $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = (x^2 + 4x - 4)$.

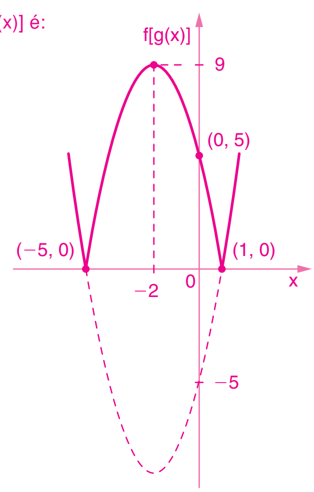
a) Calcule as raízes de $f[g(x)] = 0$.
b) Esboce o gráfico de $f[g(x)]$, indicando os pontos em que o gráfico intercepta o eixo cartesiano.

a) $f[g(x)] = |(x^2 + 4x - 4) - 1| = |x^2 + 4x - 5|$

$f[g(x)] = 0 \to |x^2 + 4x - 5| = 0 \to x^2 + 4x - 5 = 0$ ⟨ $x' = -5$ ou $x'' = 1$

Portanto, as raízes são -5 e 1.

b) O gráfico de $f[g(x)]$ é:



Em questões como a 3, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I e as falsas, na coluna II.

3 (Unicap-PE) Se *x* é um número real, representamos o valor absoluto de *x* por $|x|$.

I – II
$\cancel{0}$ – 0 $|x| = \sqrt{x^2}$
$\cancel{1}$ – 1 $|x + 1| = 2 \to x = 1$ ou $x = -3$
2 – $\cancel{2}$ $|x| < 4 \Leftrightarrow x < -4$ ou $x > 4$
3 – $\cancel{3}$ $|x| > 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$
4 – $\cancel{4}$ Não existe *x* real tal que $|x| > -3$.

00. Verdadeira
$\sqrt{x^2} = x$ se $x \geq 0$ e $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$, temos que $|x| = \sqrt{x^2}$.

11. Verdadeira
$|x + 1| = 2$
$x + 1 = 2 \to x = 1$ ou $x + 1 = -2 \to x = -3$

22. Falsa
$|x| < 4 \to -4 < x < 4$

33. Falsa
$|x| > 2 \to x < -2$ ou $x > 2$

44. Falsa
$|x| > -3 \to \forall\, x \in \mathbb{R}$

Portanto:

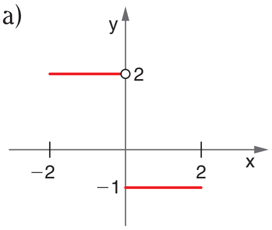
I	II
$\cancel{0}$	0
$\cancel{1}$	1
2	$\cancel{2}$
3	$\cancel{3}$
4	$\cancel{4}$

4 (Unifesp-SP) Considere a função

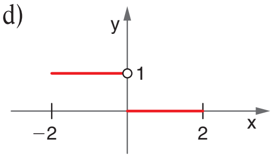
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

A função $g(x) = |f(x)| - 1$ terá o seguinte gráfico:

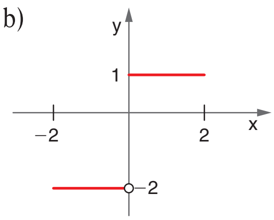
a)



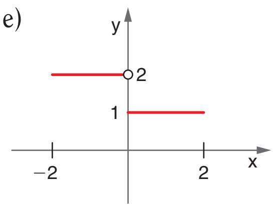
X d)



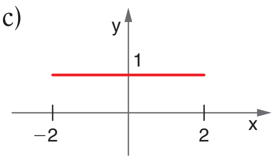
b)



e)



c)

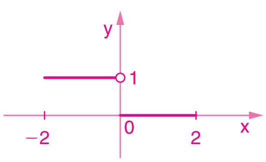


$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = |f(x)| - 1 = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1, \text{ se } -2 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Então, o gráfico da função g(x) será:



5 (Furg-RS) O produto de todas as raízes da equação $|x^2 - 8| - 4 = 0$ é:

a) 4 b) −4 c) −8 d) −48 X e) 48

$|x^2 - 8| - 4 = 0 \rightarrow |x^2 - 8| = 4$

Daí, vem:

- $x^2 - 8 = 4$
  $x^2 = 4 + 8$
  $x^2 = 12$
  $x = \sqrt{12}$ ou $x = -\sqrt{12}$
  $x = 2\sqrt{3}$ ou $x = -2\sqrt{3}$
- $x^2 - 8 = -4$
  $x^2 = 8 - 4$
  $x^2 = 4$
  $x = 2$ ou $x = -2$

O produto das raízes é:

$2 \cdot (-2) \cdot (2\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{3}) = 48$

6 (UFV-MG) A soma das soluções reais da equação $|x^2 + 3x + 2| - |6x| = 0$ é igual a:

a) 3 X b) −6 c) −3 d) 6

$|x^2 + 3x + 2| - |6x| = 0 \rightarrow |x^2 + 3x + 2| = |6x|$

Daí, vem:

$x^2 + 3x + 2 = 6x$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

ou

$x^2 + 3x + 2 = -6x$
$x^2 + 9x + 2 = 0$
$\Delta = 81 - 8 = 73$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$$

Logo:

$$2 + 1 + \left(\frac{-9 + \sqrt{73}}{2}\right) + \left(\frac{-9 - \sqrt{73}}{2}\right) =$$

$$= \frac{4 + 2 - 9 + \sqrt{73} - 9 - \sqrt{73}}{2} =$$

$$= \frac{-12}{2} = -6$$

7 (UESPI) A soma dos valores reais de *x* que satisfazem a igualdade $3|x + 1| = |x - 1|$ é igual a:

X a) $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) −5 d) −3 e) −2

Devemos ter:

$3(x + 1) = (x - 1)$ ou $3(x + 1) = -(x - 1)$

Daí, vem:

- $3(x + 1) = (x - 1)$
  $3x + 3 = x - 1$
  $2x = -4$
  $x = -2$
- $3(x + 1) = -(x - 1)$
  $3x + 3 = -x + 1$
  $4x = -2$
  $x = -\frac{1}{2}$

Portanto:

$$-2 - \frac{1}{2} = \frac{-4 - 1}{2} = -\frac{5}{2}$$

8 (FGV-SP) A e B são subconjuntos do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), definidos por:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = |x + 1| - |x|\}$;
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq ||x + 1| - 2|\}$
Determine o intervalo real que representa $\overline{A} \cap \overline{B}$, sendo $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os complementares de A e B, respectivamente, em relação a $\mathbb{R}$.

I. Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = |x + 1| - |x|\}$:

1º para $x \geq 0$, temos: $2x + 1 = x + 1 - x \rightarrow x = 0$, portanto $V_1 = \{0\}$.

2º para $-1 \leq x \leq 0$, temos: $2x + 1 = x + 1 - (-x) \rightarrow$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, portanto $V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$.

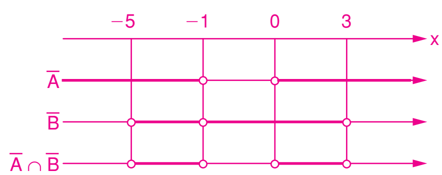
3º para $x \leq -1$, temos: $2x + 1 = (-x - 1) - (-x) \rightarrow x = -1$, portanto $V_3 = \{-1\}$.

Dessa forma, o conjunto
$A = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$ e $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x > 0\}$.

II. Seja o conjunto
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x + 1| - 2| \geq 2\}$, então:
$|x + 1| - 2 \leq -2$ ou $|x + 1| - 2 \geq 2 \rightarrow$
$\rightarrow |x + 1| \leq 0$ ou $|x + 1| \geq 4 \rightarrow x + 1 = 0$ ou
$x + 1 \leq -4$ ou $x + 1 \geq 4$
$\rightarrow x = -1$ ou $x \leq -5$ ou $x \geq 3$

Dessa forma, o conjunto
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -1$ ou $x \leq -5$ ou $x \geq 3\}$ e
$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 3$ e $x \neq -1\}$.

III. A intersecção $\overline{A} \cap \overline{B}$ resulta:



$\overline{A} \cap \overline{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1$ ou $0 < x < 3\}$.

9 (UFPI) A soma das raízes da equação
$|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$ é:

x a) 0 b) -2 c) -4 d) 6 e) 2

Fazendo $|x| = y$, vem:

$y^2 + 2y - 15 = 0$ $\rightarrow$ $y_1 = 3$, $y_2 = -5$

Daí, vem:
$|x| = 3$ ou $|x| = -5$
$x = 3$ ou $x = -3$ $\nexists\, x$

A soma das raízes é:
$-3 + 3 = 0$

10 (UFAC) Qualquer solução real da inequação $|x + 1| < 3$ tem uma propriedade geométrica interessante, que é:

a) A sua distância a 1 é maior que 3.
b) A sua distância a -1 é maior que 3.
x c) A sua distância a -1 é menor que 3.
d) A sua distância a 1 é menor que 3.
e) A sua distância a 3 é menor que 1.

Devemos ter $-3 < x + 1 < 3$. Logo:
$x + 1 < 3 \rightarrow x < 2$ e $x + 1 > -3 \rightarrow x > -4$
Logo:

Qualquer solução real tem a distância a -1 menor que 3.

11 (Faap-SP) A produção diária estimada x de uma refinaria é dada por $|x - 200\,000| \leq 125\,000$, em que x é medida em barris de petróleo. Os níveis de produção máximo e mínimo são:

a) $175\,000 \leq x \leq 225\,000$
b) $75\,000 \leq x \leq 125\,000$
x c) $75\,000 \leq x \leq 325\,000$
d) $125\,000 \leq x \leq 200\,000$
e) $x \leq 125\,000$ ou $x \geq 200\,000$

Devemos ter:
$|x - 200\,000| \leq 125\,000$
$x - 200\,000 \leq 125\,000$ (1)
ou
$x - 200\,000 \geq -125\,000$ (2)

De (1), vem:
$x - 200\,000 \leq 125\,000 \rightarrow x \leq 325\,000$

De (2), vem:
$x - 200\,000 \geq -125\,000 \rightarrow x \geq 75\,000$
Portanto: $75\,000 \leq x \leq 325\,000$.

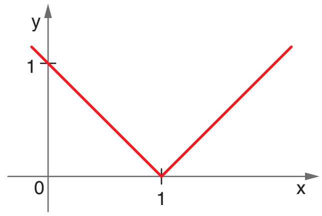
Em questões como a 12, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

12 (UFBA) Considere as funções reais *f* e *g*, tais que:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, seu gráfico tem por eixo de simetria a reta $x = 1$ e passa pelo ponto (2, 1).
- $g(x) = mx + n$ e $g[f(x)] = -x^2 + 2x$

Nessas condições, pode-se afirmar:

(~~01~~) O gráfico da função $h(x) = \sqrt{f(x)}$ é



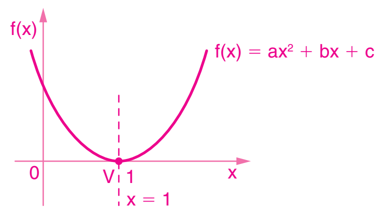
(~~02~~) $g^{-1}(x) = g(x)$

(04) A equação $f(|x|) = 0$ tem 4 raízes distintas.

(08) O conjunto solução da inequação $f(x) - |g(x)| \geqslant 0$ é $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

(16) A função $r(x) = f[g(x)]$ é crescente para $x \leqslant 0$.

Do enunciado, temos:



$$\begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \to 1 = -\dfrac{b}{2a} \to b = -2a \quad (1) \\ \Delta = 0 \to b^2 - 4ac = 0 \quad (2) \\ (2, 1) \to 4a + 2b + c = 1 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) e (2), vem:

$(-2a)^2 - 4ac = 0 \to 4a^2 - 4ac = 0 \to 4a(a - c) = 0$

Daí, $4a = 0 \to a = 0$ (não serve)

$a - c = 0 \to a = c$ (4)

Substituindo (1) e (4) em (3), temos:

$4a + 2 \cdot (-2a) + c = 1 \to c = 1$

Logo, $a = c \to a = 1$.

De $b = -2a$, temos: $b = -2 \cdot 1 \to b = -2$

Portanto, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Sendo $g[f(x)] = -x^2 + 2x$, temos:

$g(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x \to m(x^2 - 2x + 1) + n = -x^2 + 2x$

$mx^2 - 2mx + m + n = -x^2 + 2x$

Comparando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} m = -1 \\ m + n = 0 \to -1 + n = 0 \to n = 1 \end{cases}$$

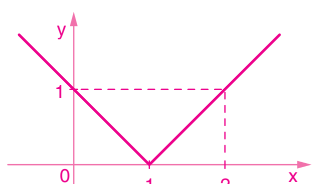
Logo, $g(x) = -x + 1$.

(01) Correta $h(x) = \sqrt{f(x)} \to h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

$h(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

$h(x) = |x - 1|$

O gráfico é:



(02) Correta $g(x) = -x + 1 \to y = -x + 1$

$x = -y + 1$

$y = -x + 1$

$g^{-1}(x) = g(x)$

(04) Incorreta $f(|x|) = 0 \to |x|^2 - 2|x| + 1 = 0$

$y^2 - 2y + 1 = 0 \to y = 1$

Logo: $|x| = 1 \to x = -1$ ou $x = 1$

A equação tem duas raízes distintas.

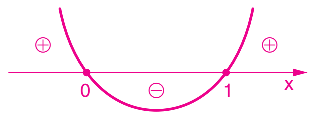
(08) Incorreta $f(x) - |g(x)| \geqslant 0 \to x^2 - 2x + 1 - |-x + 1| \geqslant 0$

$|-x + 1| \leqslant x^2 - 2x + 1$

Como $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, para qualquer *x* real, temos:

$-x + 1 \leqslant x^2 - 2x + 1 \to x^2 - x \geqslant 0$

Raízes: $x^2 - x = 0 \to x(x - 1) = 0 \to x_1 = 0$, $x_2 = 1$



$\to x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$

$]-\infty, 0] \cup [1, \infty]$

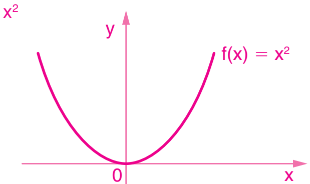
(16) Incorreta $r(x) = f[g(x)] \to r(x) = f(-x + 1)$

$r(x) = (-x + 1)^2 - 2(-x + 1) + 1$

$r(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1$

$r(x) = x^2$

O gráfico é:



Essa função é crescente para $x \geqslant 0$.

Portanto: $1 + 2 = 3$

13 (Uneb-BA) O conjunto solução da inequação $|6 - 3x| < 3|x - 1|$ é:

a) $\varnothing$

b) $|-\infty, -1|$

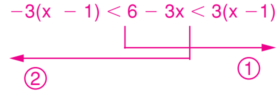
x c) $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

d) $]0, +\infty[$

e) $\mathbb{R}$

Devemos ter:

$-3(x - 1) < 6 - 3x < 3(x - 1)$



De (1), vem:

$6 - 3x < 3(x - 1)$

$6 - 3x < 3x - 3$

$-6x < -9$

$x > \dfrac{9}{6}$

$x > \dfrac{3}{2}$

De (2), vem:

$6 - 3x > -3(x - 1)$

$6 - 3x > -3x + 3$

$6 > 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Fazendo (1) ∩ (2), obtemos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$ ou $S = \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$